Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. И. Белопольская, Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 2, 268–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:06:54

© 2016 г.

БЕЛОПОЛЬСКАЯ Я. И.*

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КРОСС-ДИФфуЗИЕЙ**

В работе построена вероятностная интерпретация обобщенного решения задачи Коши для сильно связанной системы квазилинейных параболических уравнений. С этой целью выведена система стохастических уравнений, решение которой позволяет получить вероятностное представление решения исходной задачи и изучить свойства этого решения. Предложенная конструкция вероятностного представления решения задачи Коши существенно опирается на результаты теории стохастических потоков.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения, системы квазилинейных параболических уравнений, классические и обобщенные решения задачи Коши, стохастические потоки.

Введение Системы квазилинейных параболических уравнений возникают в качестве математических моделей динамики ряда биологических систем, в частности, процессов хемотаксиса, динамики роста клеток при контактном ингибировании, динамики взаимодействующих популяций, а также ряда других. В общем случае такие системы имеют вид

$$u_t^q = \operatorname{div} (F^{qm}(x, u) \nabla u^m) + a^{qm}(x, u, \nabla u) \nabla u^m + f^q(x, u), \quad q, m = 1, \dots, d_1. \quad (0.1)$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, будет предполагаться суммирование по всем повторяющимся индексам и приняты обозначения $u_t = \partial u / \partial t$, $\nabla u = (\nabla_1 u, \dots, \nabla_d u)$, $\nabla_i u = \partial u / \partial x_i$, $i = 1, \dots, d$.

Системы параболических уравнений, возникающие в качестве моделей динамики взаимодействующих популяций, называют сильно связанными системами и их изучению посвящено много работ как общего [1], так и прикладного характера [2], [3]. Обзоры современных результатов по исследованию краевых задач для таких систем можно найти, например, в работах [4], [5].

*Петербургский Государственный Архитектурно-Строительный Университет, 190005, Санкт-Петербург, yana@yb1569.spb.edu

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01453).

Один из важных примеров систем такого вида возникает при изучении динамики взаимодействующих популяций в пространственно неоднородной среде с учетом их взаимного влияния. Напомним, что классическая модель Лотка–Вольтерра динамики взаимодействующих популяций в пространственно однородной системе представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Учет самодиффузии в пространственно неоднородном случае приводит к системе параболических уравнений, не имеющих непостоянных стационарных состояний, что противоречит существованию наблюдаемых биологических структур. Неоднородные стационарные состояния возникают, если принимать во внимание наличие кросс-диффузии; такая модель была предложена в работе [6] для описания динамики двух взаимодействующих популяций. В рамках этой модели, называемой моделью SKT, предполагается, что основной причиной рассеяния является миграция во избежание перенаселения, а не простая диффузия, обусловленная случайным блужданием.

Задача Коши для системы параболических уравнений с кросс-диффузией, соответствующая модели SKT, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(\alpha_1 + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v), & u(0, x) = u_0(x), \\ v_t = \Delta[(\alpha_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v] + v(a_2 - b_2u - c_2v), & v(0, x) = v_0(x). \end{cases} \quad (0.2)$$

Здесь и ниже $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ — оператор Лапласа, $\alpha_q, \alpha_{qm}, a_q, b_q, c_q$ — неотрицательные константы, $q, m = 1, 2$, u и v — плотности популяций.

Модель SKT сразу привлекла внимание математиков. Одними из первых были работы [2], [3], в которых были исследованы классические (дважды дифференцируемые) стационарные решения этой системы при различных дополнительных предположениях о коэффициентах.

Обобщенные нестационарные решения задачи (0.1) были определены в работе [1], где также были получены и достаточные условия глобального существования таких решений. При этом вопрос о глобальном существовании локального по времени решения системы (0.1) был сведен к задаче получения априорных оценок в соболевском пространстве $W^{1,p}$. Точнее говоря, было показано следующее. Пусть T — максимальное время существования локального решения, тогда, если локальное решение ограничено в $W^{1,p}$ равномерно по $t \in (0, T)$ при $p > d$, где d — размерность пространственной переменной, то существует глобальное решение.

В соответствии с определением, сформулированным в работе [1], *обобщенным решением системы* (0.2) называется пара функций u, v , удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $u, v \in L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L^\infty(\mathbf{R}^d)), u, v \geq 0$;
- (2) $\nabla(u + v) \in L_{\text{loc}}^2((0, \infty) \times \mathbf{R}^d)$;

(3) Для любой пробной функции $h \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ с компактным носителем справедливы интегральные тождества:

$$\begin{cases} \langle u_t, h \rangle + B^u[u, v, h](t) - \langle (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, h \rangle = 0, \\ \langle v_t, h \rangle + B^v[u, v, h](t) - \langle (a_2 - b_2 u - c_2 v)v, h \rangle = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

где

$$\begin{aligned} B^u[u, v, h](t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \left[u(t, x) (\alpha_1 + \alpha_{11} u(t, x) + \alpha_{12} v(t, x)) \right] \cdot \nabla h(x) dx, \\ B^v[u, v, h](t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \left[v(t, x) (\alpha_2 + \alpha_{21} u(t, x) + \alpha_{22} v(t, x)) \right] \cdot \nabla h(x) dx. \end{aligned}$$

Здесь и ниже обозначение $\langle u, h \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} u(x) h(x) dx$ будет использовано либо как обозначение для скалярного произведения в гильбертовом пространстве (например, в $L^2(\mathbf{R}^d)$ или $H^1(\mathbf{R}^d)$), либо для обозначения спаривания между двойственными пространствами (например, соболевскими пространствами $H^k(\mathbf{R}^d)$ и $H^{-k}(\mathbf{R}^d)$ для натурального числа k), а $x \cdot y = \sum_{k=1}^d x_k y_k$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

Целью этой работы является построение вероятностных представлений обобщенного решения задачи (0.2) и развитие вероятностного подхода к исследованию задачи Коши для систем такого вида. При этом заметим, что предложенная в этой работе вероятностная интерпретация системы (0.2) мотивирована другим определением обобщенного решения, которое также используется в теории уравнений в частных производных (см., например, [5]).

Насколько нам известно, впервые попытки построить вероятностные представления решения задачи Коши для полностью недиагональных систем были предприняты в [7]–[9]. В этих работах было замечено, что интерпретируя рассматриваемую систему как двойственную систему уравнений, можно связать с ней соответствующие случайные процессы и показать, что обобщенное решение задачи Коши вида (0.1) (для некоторых частных случаев) можно получить в виде средних на траекториях соответствующих случайных процессов, используя результаты теории стохастических потоков Куниты [10]–[12] и соответствующие результаты работ Далецкого и автора [13], [14], а также работ [15], [16], в которых были сформулированы вероятностные методы построения обобщенных решений задачи Коши для семилинейных параболических уравнений и систем с диагональной главной частью (без кросс-диффузии). Отметим еще альтернативный вероятностный подход к выводу уравнений вида (0.2), основанный на моделировании популяционной динамики с помощью мерозначных марковских процессов [17], [18]. При этом рассматриваемая параболическая система с кросс-диффузией возникает как предел (при неограниченном увеличении числа частиц) уравнений, ко-

торым подчиняется плотность распределения системы взаимодействующих частиц, моделируемая соответствующей системой стохастических уравнений.

Далее структура статьи имеет следующий вид. В п. 1 мы приведем стохастические уравнения, описывающие диффузионные процессы, связанные с уравнениями, двойственными (в смысле теории обобщенных функций) к уравнениям рассматриваемой системы. В п. 2 будут приведены в удобной для наших целей форме необходимые результаты теории стохастических потоков. В случае отсутствия кросс-диффузионных членов и при априорном предположении о существовании и единственности регулярного обобщенного решения исходной задачи Коши будет построено вероятностное представление этого решения. В п.3 мы откажемся от априорного предположения о существовании решения исходной задачи. Замкнутая система стохастических уравнений для случайных процессов, ассоциированных с рассматриваемой параболической системой без кросс-диффузии, будет исследована независимо от исходной задачи Коши и будут сформулированы условия, при которых у этой системы существует единственное решение (возможно, на малом временном интервале). В заключение этого параграфа будет показано, что, решив рассматриваемую стохастическую задачу, мы одновременно построим искомое обобщенное (возможно, локальное по времени) решение исходной задачи Коши. В последнем пункте будет приведено вероятностное представление решения задачи Коши для параболической системы с кросс-диффузией и приведена стохастическая интерпретация этой системы. Здесь будут приведены стохастические уравнения, определяющие случайные процессы, участвующие в построении вероятностного представления обобщенного решения задачи Коши, и показано, что, при априорном предположении о существовании и единственности регулярного обобщенного решения задачи Коши для исходной параболической системы, решения этих стохастических уравнений существуют и позволяют строить требуемые вероятностные представления этого обобщенного решения.

1. Вероятностная интерпретация решения задачи Коши для двойственной системы параболических уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \frac{1}{2} \Delta(u^1(\alpha_1 + \alpha_{11}u^1 + \alpha_{12}u^2)) + u^1(a_1 - b_1u^1 - c_1u^2), \\ u^1(0, x) &= u_0^1(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} u_t^2 &= \frac{1}{2} \Delta(u^2(\alpha_2 + \alpha_{21}u^1 + \alpha_{22}u^2)) + u^2(a_2 - b_2u^1 - c_2u^2), \\ u^2(0, x) &= u_0^2(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для определения обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) нам понадобится ряд функциональных пространств.

Пусть $\mathscr{D}$ — пространство Шварца, т.е. пространство бесконечно дифференцируемых скалярных функций на $\mathbf{R}^d$ с компактными носителями, и $\mathscr{D}'$ — его сопряженное. Обозначим

$$\langle u, h \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} u(x)h(x) dx \quad \forall u \in \mathscr{D}', \quad h \in \mathscr{D}.$$

Если $u \in \mathbf{R}^d$ и $h \in \mathbf{R}^d$ — векторные функции, компоненты которых принадлежат $\mathscr{D}$, то

$$\langle u, h \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} u(x) \cdot h(x) dx.$$

Пусть Z обозначает множество всех положительных целых чисел, $k \in Z$ и $H^k \equiv H^k(\mathbf{R}^d) = \{v \in L^2(\mathbf{R}^d): \nabla^\alpha v \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$ обозначает множество всех вещественных функций v , определенных на $\mathbf{R}^d$ и квадратично интегрируемых вместе со своими (обобщенными) производными $D^\alpha v$ порядка α , $|\alpha| = \sum_i \alpha_i \leq k$, где

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} v$$

и $\sum_{n=1}^d \alpha_n = |\alpha| = k$. При этом H^k — это гильбертово пространство с нормой

$$\|v\|_k = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbf{R}^d} \|D^\alpha v(x)\|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим H^{-k} пространство, двойственное к H^k , с нормой

$$\|u\|_{H^{-k}} = \sup \left\{ |\langle u, h \rangle_k| : h \in H_0^k, \|h\|_{H_0^k} \leq 1 \right\},$$

H_0^k — подмножество функций из H^k с компактными носителями и пусть $\mathscr{W}^k$ — пространство квадратично-интегрируемых функций h , заданных на $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, $T > 0$,

$$\mathscr{W}^k = \left\{ h \in L^2([0, T] \times \mathbf{R}^d); \nabla^\alpha h \in L^2([0, T] \times \mathbf{R}^d), |\alpha| \leq k \right\},$$

с нормой

$$\|h\|_k = \left(\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha h(\theta, x)\|^2 \right] dx d\theta \right)^{1/2}.$$

Будем говорить, что пара положительных функций $u^1(t), u^2(t) \in H^1$ является обобщенным решением задачи Коши для системы (1.1), (1.2),

если для любой $h \in H^1$ и п.в. $0 \leq t \leq T$ справедливы интегральные тождества вида (0.3). Ниже полезным окажется несколько иное определение обобщенного решения системы параболических уравнений.

Предположим, что пробные функции $h: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ принадлежат пространству $\mathcal{H}_0^{1,2}$, где $\mathcal{H}_0^{1,2}$ — пространство вещественных функций с компактными носителями, дифференцируемых по $t \in (0, \infty)$ и дважды дифференцируемых по $x \in \mathbf{R}^d$.

Будем говорить, что задача Коши (1.1), (1.2) имеет слабое обобщенное решение u^1, u^2 , если для любой пробной функции $h \in \mathcal{H}_0^{1,2}([0, t] \times \mathbf{R}^d)$ справедливы интегральные тождества

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} u^q(t, x) h(t, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} u^q(0, x) h(0, x) dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} u^q(\theta, x) \left\{ h_\theta(\theta, x) + \frac{1}{2} [\alpha_q + \alpha_{q1} u^1(\theta, x) + \alpha_{q2} u^2(\theta, x)] \Delta h(\theta, x) \right\} dx d\theta \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} u^q(\theta, x) m_u^q(\theta, x) h(\theta, x) dx d\theta, \quad q = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$m_u^q(x) = a_q - b_q u^1(x) - c_q u^2(x), \quad u = (u^1, u^2). \quad (1.4)$$

Введем дополнительно обозначения

$$\mathcal{L}_0^q u^q = \frac{1}{2} \Delta [u^q (\alpha_q + \alpha_{q1} u^1 + \alpha_{q2} u^2)], \quad \mathcal{L}_u^q = \mathcal{L}_0^q + m_u^q, \quad q = 1, 2, \quad (1.5)$$

и

$$M_u^q(x) = \sqrt{\alpha_q + \alpha_{q1} u^1(x) + \alpha_{q2} u^2(x)}. \quad (1.6)$$

Тогда интегральные тождества можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [u_\theta^q(\theta, x) - \mathcal{L}_0^q u^q(\theta, x) - m_u^q(\theta, x) u^q(\theta, x)] h(\theta, x) dx d\theta \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} u^q(t, x) h(t, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} u^q(0, x) h(0, x) dx \\ &- \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} u^q(\theta, x) \left[h_\theta(\theta, x) + \frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h(\theta, x) + m_u^q(\theta, x) h(\theta, x) \right] dx d\theta = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Пусть $0 \leq s \leq \theta \leq t$. Для того, чтобы построить случайные процессы, связанные с обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2), предположим, что существует единственное ограниченное решение $u = (u^1, u^2)$ этой задачи, $u^q(t) \in C^2(\mathbf{R}^d)$, $q = 1, 2$, удовлетворяющее условию

$\inf_x u^q(t, x) \geq 0$, и рассмотрим задачу Коши для параболических уравнений

$$h_s^1 + \frac{1}{2} [M_u^1]^2 \Delta h^1 + m_u^1 h^1 = 0, \quad h^1(t, y) = h_0^1(y), \quad 0 \leq s \leq t, \quad (1.8)$$

$$h_s^2 + \frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h^2 + m_u^2 h^2 = 0, \quad h^2(t, y) = h_0^2(y), \quad (1.9)$$

двойственную (в смысле интегральных тождеств (1.7)) к системе (1.1), (1.2).

При сформулированных выше априорных предположениях, если $h_0^q \in C^2(\mathbf{R}^d)$, то существует единственное классическое решение $h(s, x) = (h^1(s, x), h^2(s, x))$ задачи Коши (1.8), (1.9), допускающее соответствующее вероятностное представление.

Для того, чтобы построить это представление, введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданный на нем стандартный винеровский процесс $w(t) \in \mathbf{R}^d$, $q = 1, 2$. Обозначим $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ поток σ -алгебр, порожденный процессом $w(t)$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$d\xi^q(\theta) = M_u^q(\xi^q(\theta)) dw(\theta), \quad \xi^q(s) = y, \quad q = 1, 2. \quad (1.10)$$

Поскольку в силу априорного предположения $u^q \in C^2(\mathbf{R}^d)$, и, следовательно, коэффициенты M_u^q в (1.10) являются ограниченными липшицевыми функциями, то существование и единственность решения (1.10) вытекают из общей теории СДУ. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $\inf_x u^q(\theta, x) \geq 0$ и ∇u^q — ограниченные функции, удовлетворяющие условию Липшица (по x), тогда СДУ (1.10) имеет единственное сильное решение $\xi_{s,y}^q(\theta)$ для всех $0 \leq s \leq \theta \leq t$ и процессы $\xi^q(\theta) \equiv \xi_{s,y}^q(\theta)$ обладают марковским свойством.

Вероятностное представление решения $h^q(s, y)$ задачи Коши (1.8), (1.9) нетрудно получить, если ввести дополнительно в рассмотрение случайные процессы

$$\eta^q(t) = \exp \left\{ \int_s^t m_u^q(\xi^q(\theta)) d\theta \right\}.$$

Теорема 1.2. Если выполнены условия теоремы 1.1, функции u^1, u^2 принадлежат классу $C^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R}^d)$ и $h \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$, то пара функций h^1, h^2 , заданная соотношениями

$$h^q(s, y) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_s^t m_u^q(\xi_{s,y}^q(\theta)) d\theta \right\} h_0^q(\xi_{s,y}^q(t)) \right], \quad q = 1, 2, \quad (1.11)$$

является единственным классическим решением системы (1.8), (1.9).

В силу условий теоремы 1.2, ее утверждение вытекает из результатов классической теории стохастических дифференциальных уравнений, и соотношение (1.11) — это классическая формула Фейнмана–Каца.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим СДУ вида

$$d\gamma^q(\theta) = a_u^q(\gamma^q(\theta)) d\theta + M_u^q(\gamma^q(\theta)) dw(\theta), \quad \gamma^q(s) = y, \quad q = 1, 2, \quad (1.12)$$

где, как и выше, $u^q \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R}^d)$ — заданная функция и $a^q(x, u) \in \mathbf{R}^d$ — функция класса $C^2(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^2)$. Тогда, как нетрудно проверить, функция

$$\bar{h}^q(s, y) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_s^t m_u^q(\gamma_{s,y}^q(\theta)) d\theta \right\} h_0^q(\gamma_{s,y}^q(t)) \right], \quad q = 1, 2, \quad (1.13)$$

является единственным классическим решением задачи Коши

$$\bar{h}_s^q + a_u^q \cdot \nabla \bar{h}^q + \frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta \bar{h}^q + m_u^q \bar{h}^q = 0, \quad \bar{h}^q(t, y) = h_0^q(y), \quad 0 \leq s \leq t. \quad (1.14)$$

Если $M^q(u) \equiv 0$, то (1.14) описывает гиперболическую систему, для которой рассматривается обратная задача Коши с данными на правом конце временного интервала. Стохастическое уравнение (1.12) при этом превращается в уравнение $d\gamma_0^q(\theta)/d\theta = a_u^q(\gamma_0^q(\theta))$, совпадающее с уравнением для характеристик рассматриваемой гиперболической системы, а соотношение (1.13), приобретает вид $\bar{h}_0^q(s, y) = \exp\{\int_s^t m_u^q(\gamma_0^q(\theta)) d\theta\} h_0^q(\gamma_0^q(t))$ и может быть получено методом характеристик.

Для того, чтобы перейти от изучения решения задачи Коши для системы (1.8), (1.9) к построению обобщенного решения исходной системы (1.1), (1.2), нам понадобятся ряд результатов из теории стохастических потоков и теории двойственности для марковских процессов.

2. Стохастические потоки и решения задачи Коши для параболических уравнений и систем. Как уже упоминалось выше, теория стохастических уравнений представляет собой обобщение теории обыкновенных дифференциальных уравнений и соответственно решения СДУ для линейных и нелинейных параболических уравнений и систем играют ту же роль, что и характеристики в теории линейных и нелинейных гиперболических уравнений и систем. Выше эта аналогия была проиллюстрирована на примере решения обратной задачи Коши.

Эту аналогию можно сохранить и при переходе к рассмотрению прямой задачи Коши. Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для гиперболической системы Хопфа

$$u_t + u \cdot \nabla u = 0, u(0, x) = u_0(x) \in \mathbf{R}^d. \quad (2.1)$$

Решая эту задачу методом характеристик, рассмотрим систему ОДУ

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u(0) = u_0(y) \in \mathbf{R}^d, \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = y \in \mathbf{R}^d, \quad (2.3)$$

решение которой имеет вид

$$u(t, x) = u_0(y), \quad x = y + u_0(y)t, \quad (2.4)$$

где функция u зависит от t и x , поскольку $y = y(t, x)$ рассматривается как неявная функция от t и x . Заметим, что отображение $\phi_{0,t}: y \rightarrow x$, порожденное решением $x(t) = \phi_{0,t}(y)$ задачи Коши (2.3), обратимо на интервале $[0, t_c)$, на котором обратима матрица $[\nabla u_0(y)]^{-1}$. Обозначим $\psi_{t,0}: x \rightarrow y$ отображение, обратное по отношению к $\phi_{0,t}$, для которого справедливо соотношение $\phi_{0,t} \circ \psi_{0,t}(x) = x$. Тогда, обозначив $\hat{x}(s) = x(t - s)$, получим $u(t, x) = u_0(\psi_{0,t}(x)) = u_0(\hat{x}_{0,x}(t))$.

Рассмотрение задачи Коши для системы Хопфа с диссипацией

$$u_t + u \cdot \nabla u = -cu, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

где c — положительная константа, приводит к модифицированной системе ОДУ,

$$\frac{du}{dt} = -cu, \quad u(0) = u_0(y), \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = y,$$

задающей ее характеристики. Решение этой задачи на интервале $[0, t_c]$, на котором обратим градиент матрицы ∇u_0 , можно представить в виде

$$u(t, x) = u_0(\hat{x}_{0,x}(t))e^{-ct}, \quad x = y + \frac{1}{c} u_0(\hat{x}_{0,x}(t))(1 - e^{-ct}).$$

Для того, чтобы распространить этот подход на теорию параболических систем, перейдем от системы Хопфа (2.1) к системе Бюргерса с вязкостью, что приведет к рассмотрению следующей задачи Коши

$$u_t + u \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta u, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (2.5)$$

где σ — положительная константа.

Отметим, что аналогом решения задачи Коши для гиперболического уравнения, построенного с помощью метода характеристик, является вероятностное представление решения задачи Коши (2.5) с помощью диффузионных процессов, удовлетворяющих соответствующим СДУ. Для того, чтобы построить такое представление, рассмотрим СДУ

$$d\xi(\theta) = u(\theta, \xi(\theta))d\theta + \sigma dw(\theta), \quad \xi(0) = y, \quad 0 \leq s \leq \theta \leq t. \quad (2.6)$$

Задать функцию $u(t, x)$ так, чтобы получить замкнутую систему соотношений и, в то же время, чтобы полученное соотношение можно было интерпретировать как решение задачи (2.5), можно двумя способами. Один из них состоит в том, чтобы вместо того, чтобы решать прямую задачу Коши (2.5) относительно функции $u(t, x)$, ввести в рассмотрение функцию $v(s, x) = u(t - s, x)$. При этом, очевидно, задача Коши (2.5) относительно u будет сведена к задаче Коши

$$v_s - v \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta v = 0, \quad v(t, x) = u_0(x), \quad (2.7)$$

относительно функции v . Как следует из работ [13], [14], классическое решение задачи Коши (2.7) можно построить, решив следующую стохастическую систему

$$d\xi(\theta) = -v(t - \theta, \xi(\theta)) d\theta + \sigma dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \quad (2.8)$$

$$v(s, x) = \mathbf{E}[u_0(\xi_{s,x}(t))]. \quad (2.9)$$

Если начальная функция $u_0(x)$ достаточно гладкая, то функция $v(s, x)$ вида (2.8) определяет классическое решение задачи Коши (2.7) (возможно, локальное по времени) и, соответственно, функция $u(t, x)$ удовлетворяет задаче Коши (2.5).

Второй подход представляет собой обобщение подхода к решению гиперболической задачи, описанного в начале этого параграфа, и может быть сформулирован следующим образом.

Пусть $u(t, x)$ — дважды дифференцируемая ограниченная функция. Тогда, в силу результатов классической теории стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), решение (2.6) существует, единственно и дважды дифференцируемо по начальным условиям. При этом случайный процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий (2.6), обладает марковским свойством и задает стохастический поток $\phi_{0,t}: y \mapsto \xi_{0,y}(t)$. Обозначим $\psi_{t,0}$ обратный по времени стохастический поток, удовлетворяющий условию $\psi_{t,0} \circ \phi_{0,t}(y) = y$ и пусть $\hat{\xi}(\theta) = \xi(t - \theta)$ — обращенный по времени процесс, порождающий поток $\psi_{t,0}$. Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\hat{\xi}(\theta) = u(\theta, \hat{\xi}(\theta)) d\theta + \sigma d\tilde{w}(\theta), \quad \hat{\xi}(0) = x, \quad (2.10)$$

$$u(t, x) = \mathbf{E}[u_0(\hat{\xi}_{0,x}(t))], \quad (2.11)$$

где $\tilde{w}(\theta) = w(t - \theta) - w(t)$. Эта система представляет собой замкнутую систему уравнений и, как следует из результатов [15], при определенных условиях на u_0 , ее решение существует на некотором интервале $[0, T]$.

Возвращаясь к задачам, рассмотренным в п.1, воспользуемся вторым подходом для того, чтобы построить соответствующие процессы $\xi^q(t) \in \mathbf{R}^d$, $q = 1, 2$, и обращенные во времени процессы $\hat{\xi}^q(\theta) = \xi^q(t - \theta) \in$

$\mathbf{R}^d$, которые позволили бы получить вероятностное представление решения прямой задачи Коши для системы (1.1), (1.2). При этом нам понадобится ряд результатов теории стохастических потоков Куниты [10].

В этом и следующем параграфах мы предположим, что $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, и существует единственное ограниченное регулярное (дважды дифференцируемое по x) обобщенное положительное решение $u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x))$ задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\xi^q(\theta) = -M_u^q(\xi^q(\theta)) dw(\theta), \quad \xi^q(s) = y, \quad q = 1, 2. \quad (2.12)$$

При сделанном выше априорном предположении мы находимся в рамках теории Куниты, что позволяет воспользоваться результатами работ [11], [12].

Для заданных процессов $\xi^q(t) \in \mathbf{R}^d$ и $\hat{\xi}^q(\theta) = \xi^q(t - \theta) \in \mathbf{R}^d$ обозначим $\phi_{\theta,t}^q: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\psi_{\theta,t}^q: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ порожденные ими стохастические потоки, т.е. $\xi_{\theta,x}^q(t) = \phi_{\theta,t}^q(x)$, $\hat{\xi}_{t,y}^q(\theta) = \psi_{\theta,t}^q(y)$. Как и выше, предположим, что u^1, u^2 — дифференцируемые по x ограниченные квадратично интегрируемые функции, удовлетворяющие в слабом смысле задаче (1.1), (1.2). Тогда процессы $\xi^q(t)$, удовлетворяющие (2.1), дифференцируемы (в среднем квадратичном) по начальным данным.

Пусть $\mathbf{J}_{s,y}^q(t) = \nabla \xi_{s,y}^q(t)$ — матрица Якоби стохастического отображения $\phi_{s,t}^q: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$. Для краткости мы будем иногда обозначать $\mathbf{J}_{s,y}^q(t) \equiv \mathbf{J}^q(s, t)$, $0 \leq s \leq t$. Пусть $J_{s,y}^q(t) = \det \mathbf{J}_{s,y}^q(t) \equiv J_{s,t}^q$.

Матрица Якоби $\mathbf{J}^q(s, t)$ удовлетворяет линейному СДУ

$$d\mathbf{J}^q(s, \theta) = -\mathbf{J}^q(s, \theta) \nabla M_u^q(\xi_{s,y}^q(\theta)) \cdot dw(\theta), \quad \mathbf{J}^q(s, s) = I, \quad (2.13)$$

где I — единичная матрица, $s \leq \theta \leq t$. Нетрудно проверить, что процессы $\hat{\xi}^q(\theta) = \xi^q(t - \theta)$ также дифференцируемы по начальным данным и из соотношений

$$\hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) \mathbf{J}^q(\theta, t) = \mathbf{J}^q(\theta, t) \hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) = I, \quad d[\hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) \mathbf{J}^q(\theta, t)] = 0,$$

и формулы Ито при этом вытекает, что $\hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) = \nabla \hat{\xi}^q(\theta)$ удовлетворяет СДУ

$$d\hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) = \hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) \kappa^q(\theta) d\theta + \hat{\mathbf{J}}^q(\theta, t) \nabla M_u^q(\xi^q(\theta)) \cdot dw(\theta), \quad \hat{\mathbf{J}}^q(t, t) = I, \quad (2.14)$$

где

$$\kappa^q(\theta) = [\nabla M_u^q(\xi^q(\theta))]^2.$$

Заметим, что $\hat{\mathbf{J}}_{\theta,t}^q(\omega) > 0$.

Можно показать (см. [14], [19]), что случайный процесс $\hat{\xi}^q(\tau) = \xi^q(t - \tau)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\hat{\xi}^q(\tau) = \xi^q(t) + \int_0^\tau \beta_u^q(\hat{\xi}^q(\theta)) d\theta + \int_0^\tau M_u^q(\hat{\xi}^q(\theta)) d\tilde{w}(\theta), \quad (2.15)$$

где, как и выше, $\tilde{w}(\theta) = w(t - \theta) - w(t)$, $0 \leq \tau \leq t$ и $\beta_u^q(x) = M_u^q(x) \nabla M_u^q(x)$.

Случайный процесс в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'$ или в соболевском пространстве H^{-k} можно задать, определив композицию обобщенной функции со стохастическим потоком. Для функции h из пространства Шварца $\mathscr{D}$ и обобщенной функции g из двойственного пространства $\mathscr{D}'$ определим композицию g с потоком $\psi_{\theta,t}$, порожденным процессом $\hat{\xi}^q(\theta)$, с помощью соотношения $\langle g \circ \psi_{\theta,t}, h \rangle = \langle g, h \circ \phi_{\theta,t} J_{\theta,t} \rangle$. Правая часть последнего равенства, как нетрудно проверить, задает непрерывный линейный функционал на $\mathscr{D}$, если $\phi_{s,t}(x)$ — бесконечно дифференцируемое отображение. Если же $\phi_{s,t}$ — k -раз дифференцируемое отображение, то это равенство определяет непрерывный линейный функционал на H^k .

Заметим, что, если обобщенная функция $g \in H^{-k}$ имеет вид $g = g(x) dx$, то $g \circ \psi_{t,s}$ — это композиция плотности g и отображения $\psi_{t,s}$

$$\begin{aligned} \langle g \circ \psi_{s,t}, h \rangle &= \int_{\mathbf{R}^d} g(\psi_{s,t}(x)) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} g(y) h(\phi_{s,t}(y)) J_{s,t}(\phi_{s,t}(y)) dy \quad \forall h \in \mathscr{D}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

что вытекает из формулы замены переменных под знаком интеграла.

Наша цель — построить вероятностное представление решения задачи (1.1), (1.2), исходя из предположения о том, что оператор $\mathcal{L}_u^q$ вида (1.5) определен в обобщенном смысле, т.е. в смысле интегрального тождества

$$\langle \mathcal{L}_u^q g, h \rangle = \langle g, \mathcal{M}_u^q h \rangle, \quad (2.17)$$

где $\mathcal{M}_u^q$ — соответствующий дифференциальный оператор. При этом мы рассмотрим два варианта системы (1.1), (1.2) как при отсутствии кросс-диффузионных членов, так и при их наличии.

Пусть $v(t, x) \in R^2$ — заданная ограниченная функция, дифференцируемая по пространственной переменной. Для того, чтобы построить соответствующие вероятностные представления, нам понадобится ряд вспомогательных результатов, получение которых можно существенно упростить, если рассмотреть СДУ (2.12) в форме Стратоновича. Напомним, что стохастические дифференциалы в форме Ито $d\xi(t) = M_v^q(\xi(t)) dw(t)$ и в форме Стратоновича $d^S \xi(t) = M_v^q(\xi(t)) \circ dw(t)$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} d^S \xi(t) &= M_v^q(\xi(t)) \circ dw(t) \\ &= \frac{1}{2} \beta_v^q(\xi(t)) dt + M_v^q(\xi(t)) dw(t) = d\xi(t) + \frac{1}{2} \beta_v^q(\xi(t)) dt, \end{aligned}$$

где

$$\beta_v^q(x) = M_v^q(x) \nabla M_v^q(x) = \frac{\alpha_{qq} \nabla v^q(x)}{2}. \quad (2.18)$$

Перепишем уравнение (2.12) в виде

$$d\xi^q(\theta) = -\frac{1}{2} \beta_v^q(\xi^q(\theta)) d\theta - M_v^q(\xi^q(\theta)) \circ dw(\theta), \quad \xi^q(s) = y. \quad (2.19)$$

Из теоремы 4.2.2 [10] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $\phi_{s,t}^q(y) = \xi^q(t)$ удовлетворяет СДУ (2.14), коэффициенты диффузии которого принадлежат классу C^{k+1} при $(k \geq 1)$. Тогда обратный поток $[\phi_{s,t}^q]^{-1} = \psi_{s,t}^q$ удовлетворяет СДУ

$$d\psi_{t,x}^q(\theta) = -\hat{J}_{\theta,t}^q(\psi_{t,x}(\theta)) \beta_v^q(x) d\theta + \hat{J}_{\theta,t}^q(\psi_{t,x}(\theta)) M_v^q(x) \circ dw(\theta). \quad (2.20)$$

При этом отображение $\psi_{\theta,t}^q: x \rightarrow \psi_{\theta,t}^q(x)$ является C^k -диффеоморфизмом.

Сужение производящего оператора $\mathcal{M}^q$ эволюционного семейства

$$U^q(s, t)h(y) = \mathbf{E}[h(\xi_{s,y}^q(t))]$$

на соболевское пространство H^2 можно вычислить с использованием классической формулы Ито. Производящий оператор $\mathcal{L}_v^q = [\mathcal{M}_v^q]^+$ двойственной полугруппы $[U^q]^+(t, s)$ — это двойственный оператор по отношению к $\mathcal{M}$ в смысле спаривания соболевских пространств H^k и H^{-k} (а также в смысле скалярного произведения в $L^2(\mathbf{R}^d)$ или H^2). Для вычисления генератора эволюционного семейства $[U^q]^+(t, s)$, используя его вероятностное представление, воспользуемся обобщенной формулой Ито (см. [12]).

Лемма 2.1 (Обобщенная формула Ито). Пусть $g(t)$ — непрерывная функция со значениями в H^k для некоторого $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, стохастический поток $\phi_{s,t}^q$ задан соотношением вида (2.1) и $\psi_{t,s}^q$ — это соответствующий обращенный по времени стохастический поток. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g(t) \circ \phi_{s,t}^q &= g(s) + \int_s^t \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \circ \phi_{s,\theta}^q d\theta + \int_s^t \nabla g(\theta) \circ \phi_{s,\theta}^q \cdot d\phi_{s,\theta}^q \\ &\quad + \int_s^t [\mathcal{N}_v^q g(\theta)] \circ \phi_{s,\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

и

$$\begin{aligned} g(t) \circ \psi_{s,t}^q &= g(t) + \int_s^t \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \circ \psi_{s,\theta}^q d\theta - \int_s^t \nabla g(\theta) \circ \psi_{s,\theta}^q \cdot d\psi_{s,\theta}^q \\ &\quad + \int_s^t \mathcal{N}_v^q [g(t) \circ \psi_{s,\theta}] d\theta, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\mathcal{N}_v^q g = \frac{1}{2} (\alpha_q + \alpha_{qq} v^q) \Delta g + \frac{1}{4} \nabla [\alpha_{qq} v^q] \nabla g.$$

При этом для обобщенной функции g действие операторов $\mathcal{N}_u^q$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим систему СДУ

$$d\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta) = \hat{J}_{\theta,0}^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))\beta_v^q(x) d\theta + \hat{J}_{\theta,0}^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))M_v^q(x) \circ dw(\theta), \quad (2.23)$$

$$d\hat{J}^q(\theta) = \hat{J}^q(\theta)\nabla M_v^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \circ dw(\theta) + \hat{J}^q(\theta)[\nabla\beta_v^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))]^2 d\theta, \quad \hat{J}^q(0) = I. \quad (2.24)$$

Обозначим $\mathcal{L}_v^q$ оператор, формально сопряженный к оператору

$$\mathcal{M}_v^q = \frac{1}{2}(\alpha_q + \alpha_{qq}v^q)\Delta, \quad \mathcal{L}_v^q = [\mathcal{M}_v^q]^+.$$

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{L}_v^q$ действует по правилу

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}_v^q g^q(x) h(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} g^q(x) (\alpha_q + \alpha_{qq}v^q) \Delta h dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \Delta [g^q(\alpha_q + \alpha_{qq}v^q)] h(x) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Заметим, что, при сделанных выше априорных предположениях, мы находимся в рамках теории Куниты и можем сформулировать следующее предложение (вытекающее из теоремы 2.1 работы [12]).

Теорема 2.2. Пусть $u_0^q \in H^k(\mathbf{R}^d)$ — заданная функция, $u^q(t)$ — ограниченные обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) из класса $H^k(\mathbf{R}^d)$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ и

$$\kappa^q(t) = \exp \left(\int_0^t m_u^q \circ \phi_{0,\theta} d\theta \right) u_0^q.$$

Тогда справедливо представление $u^q(t) = \mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q]$, $q = 1, 2$, где $\psi_{0,t}^q$ — стохастический поток порожденный решением СДУ (2.23) при $u \equiv v$.

При этом существует положительная константа C , зависящая только от k , T и $\mathcal{L}^q$, для которой справедлива оценка

$$\|u^q(t)\|_k^2 \leq C^q \|u_0\|_k^2.$$

Доказательство. Если $u_0^q \in H^2$, то $\kappa^q(t)$ — непрерывный семимартингал. Поскольку $\kappa^q(t)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d\kappa^q(t)}{dt} = m_u^q \kappa^q(t), \quad \kappa^q(0) = u_0^q, \quad (2.26)$$

то из обобщенной формулы Ито следует, что

$$\begin{aligned} \kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q &= u_0^q + \int_0^t \frac{\partial \kappa^q(\theta)}{\partial \theta} \circ \psi_{\theta,t}^q d\theta + \int_0^t \nabla(\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q) \cdot d\psi_{\theta,t}^q \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{L}_u^q(\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q) d\theta \end{aligned} \quad (2.27)$$

или, с учетом (2.26),

$$\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q = u_0^q + \int_0^t \nabla(\kappa^q(t) \circ \psi_{\theta,t}^q) \cdot M_u^q(x) dw(\theta) + \int_0^t \mathcal{L}_u^q(\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q) d\theta, \quad (2.28)$$

где $\mathcal{L}_u^q(x)$ — оператор, сопряженный к оператору

$$\mathcal{M}_u^q(x) = \frac{1}{2} [M_u^q(x)]^2 \Delta + m_u^q(x),$$

в смысле интегрального тождества

$$\langle \mathcal{L}_u^q g, h \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}_u^q(x) g(x) h(x) dx = \int_{\mathbf{R}^d} g(x) \mathcal{M}_u^q(x) h(x) dx = \langle g, \mathcal{M}_u^q h \rangle,$$

справедливого для любой тестовой функции h .

Вычислим математическое ожидание обеих частей соотношения (2.28). Поскольку

$$\mathbf{E} \left\langle \int_0^t \nabla(\kappa^q(t) \circ \psi_{t,\theta}^q) \cdot M_u^q(x) dw(\theta), h \right\rangle = 0,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left\langle \int_0^t [\mathcal{L}_u^q](\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,0}^q) d\theta, h \right\rangle \right] &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \langle \kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q, \mathcal{M}_u^q h \rangle d\theta \right] \\ &= \int_0^t \langle \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], \mathcal{M}_u^q h \rangle d\theta = \int_0^t \langle [\mathcal{L}_u^q] \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], h \rangle d\theta, \end{aligned} \quad (2.29)$$

то получим равенство

$$\mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q] = u_0^q + \int_0^t \langle \mathcal{L}_u^q \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], h \rangle d\theta. \quad (2.30)$$

Вычисляя производную по переменной t от обеих частей соотношения (2.30), получим, что функции $g^q(t) = \mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q]$ удовлетворяют задаче Коши (1.1), (1.2) при $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, и, поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \langle g^q(t), h \rangle = \langle u_0^q, h \rangle$, то $\lim_{t \rightarrow 0} g^q(t) = u_0^q$.

Покажем, что $g^q(t) \equiv u^q(t)$. Предположим, что существует два обобщенных решения (g^1, g^2) и (u^1, u^2) рассматриваемой задачи. Тогда их разность $G^q(t) = g^q(t) - u^q(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial G^q(t)}{\partial t} = \mathcal{L}_u^q(t) G^q(t), \quad G^q(0) = 0.$$

Покажем, что при этом $G^q(t) = 0$. Пусть $T > 0$ и $h \in C_0^2 \cap H^2$. Тогда существует решение $h^q(s, y)$ задачи Коши

$$h_s^q(s, y) + \mathcal{M}_u^q h^q(s, y) = 0, \quad h^q(T, y) = h(y),$$

и при этом $h^q(s)$ принадлежит $C^2(\mathbf{R}^d)$. Отсюда вытекает, что для любой функции $h \in C_0^2 \cap H^2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \langle G^q(t), h(t) \rangle &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{d\theta} G^q(\theta), h(\theta) \right\rangle d\theta + \int_0^t \left\langle G^q(\theta), \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right\rangle d\theta \\ &= \int_0^t \langle \mathcal{L}_u^q G^q(\theta), h(\theta) \rangle d\theta - \int_0^t \langle G^q(\theta), \mathcal{M}_u^q h(\theta) \rangle d\theta = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $G^q(t) = 0$. Последнее утверждение теоремы вытекает из следующего утверждения ([11], теорема 2.1). Теорема доказана.

Лемма 2.2. Пусть $g(t), g_0 \in H^k \cap C(\mathbf{R}^d)$ и $\hat{\xi}(t) = \psi_{s,t}^q(x)$ удовлетворяют СДУ (2.23). Тогда существует $t_0 > 0$ и константа C_{k,t_0}^q , для которой справедливо неравенство

$$\mathbf{E} [\|g_0 \circ \psi_{s,t}^q\|_k^2] \leq C_{k,t_0}^q \|g_0\|_k^2 \quad \forall s, t \in [0, t_0]. \quad (2.31)$$

При этом, если случайная величина G не зависит от потока $\psi_{s,t}^q$ то справедлива оценка

$$\mathbf{E} [\|G \circ \psi_{s,t}^q\|_k^2] \leq C_{k,t_0}^q \mathbf{E} [\|G\|_k^2] \quad \forall s, t \in [0, t_0]. \quad (2.32)$$

3. СДУ, ассоциированные с системой параболических уравнений без кросс диффузии. Анализ результатов, полученных в предыдущих параграфах, показывает, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) при $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ можно свести к исследованию следующей системы стохастических соотношений

$$d\xi^q(\theta) = -\frac{1}{2} \beta_{u^1, u^2}^q(\xi^q(\theta)) d\theta - M_u^q(\xi(\theta)) \circ dw(\theta), \quad \xi^q(0) = y, \quad (3.1)$$

$$d\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta) = -\frac{1}{2} \hat{J}_{\theta,0}^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \beta_{u^1, u^2}^q(x) d\theta + \hat{J}_{\theta,0}^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) M_u^q(x) \circ dw(\theta), \quad (3.2)$$

$$d\hat{J}^q(\theta) = \hat{J}^q(\theta) \nabla M_u^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \cdot dw(\theta) + \hat{J}^q(\theta) [\nabla M_u^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))]^2 d\theta, \quad \hat{J}^q(0) = I. \quad (3.3)$$

$$u^q(t) = \mathbf{E} \left(\exp \left(\int_0^t m_u^q \circ \psi_{\theta,t}^q d\theta \right) u_0^q \circ \psi_{0,t}^q \right). \quad (3.4)$$

Заметим, что, наряду с уравнением (3.2) для обращенного по времени процесса $\hat{\xi}^q(t)$, можно воспользоваться также уравнением (2.15) и рассмотреть следующие интегральные стохастические уравнения

$$\hat{\xi}^q(\tau) = \xi^q(t) + \int_0^\tau (M_u^q \nabla M_u^q)(\hat{\xi}^q(\theta)) d\theta + \int_0^\tau M_u^q(\hat{\xi}^q(\theta)) d\tilde{w}(\theta), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}^q(\tau) &= I + \int_\tau^t \hat{J}^q(\theta) \nabla M_u^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \cdot dw(\theta) \\ &\quad + \int_\tau^t \hat{J}^q(\theta) [\nabla M_u^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))]^2 d\theta, \quad \hat{J}^q(0) = I. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поскольку коэффициенты сноса в уравнениях (3.5), (3.6) зависят от ∇u^q , то для того, чтобы получить замкнутую систему соотношений, нужно систему (3.4)–(3.6) пополнить вероятностным представлением для вектор-функции ∇u^q . Для этого нужно продифференцировать исходную задачу и построить вероятностное представление для ее дифференциального продолжения (см. [9]). Формальное дифференцирование соотношения (3.4) позволяет получить соотношение

$$\begin{aligned} \nabla u^q(t) = & \mathbf{E} \left[\int_0^t \nabla m_u^q(\psi_{0,\theta}^q) \hat{\mathbf{J}}^q(\theta) d\theta \exp \left(\int_0^t m_{u^1, u^2}^q(\psi_{\theta,t}^q) d\theta \right) u_0^q \circ \psi_{0,t}^q \right] \\ & + \mathbf{E} \left[\exp \left(\int_0^t m_u^q(\psi_{\theta,t}^q) d\theta \right) \nabla u_0^q \circ \psi_{0,t}^q \hat{\mathbf{J}}^q(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Мы вернемся к рассмотрению этой системы стохастических уравнений ниже, а пока рассмотрим стохастическую систему, ассоциированную с задачей (1.1), (1.2), предполагая, что $\alpha_{12} = \alpha_{21} = a_q = b_q = c_q = 0$. При этом уравнения (3.5)–(3.6) сохраняются, а функции $u^q(t)$, $\nabla u^q(t)$ задаются соотношениями

$$u^q(t) = \mathbf{E} [u_0^q \circ \psi_{0,t}^q], \quad (3.8)$$

$$\nabla u^q(t) = \mathbf{E} [\nabla u_0^q \circ \psi_{0,t}^q \hat{\mathbf{J}}^q(t)]. \quad (3.9)$$

Для того, чтобы построить решение системы (3.5), (3.6), (3.8), (3.9), рассмотрим семейство последовательных приближений вида

$$\hat{\xi}_n^q(\tau) = x + \int_0^\tau \beta_{u_n}^q(\hat{\xi}_n^q(\theta)) d\theta + \int_0^\tau M_{u_n}^q(\hat{\xi}_n^q(\theta)) d\tilde{w}(\theta), \quad (3.10)$$

$$\hat{J}_n^q(\tau) = I + \int_\tau^t \hat{J}_n^q(\theta) \nabla M_{u_n}^q(\hat{\xi}_n^q(\theta)) \cdot dw(\theta) + \int_\tau^t \hat{J}_n^q(\theta) [\nabla M_{u_n}^q(\hat{\xi}_n^q(\theta))]^2 d\theta, \quad (3.11)$$

$$u_{n+1}^q(t) = \mathbf{E} [u_0^q(\hat{\xi}_n^q(t))], \quad (3.12)$$

$$\nabla u_{n+1}^q(t) = \mathbf{E} [\nabla u_0^q(\hat{\xi}_n^q(t)) \hat{\mathbf{J}}_n^q(t)]. \quad (3.13)$$

Наша цель — доказать сходимость построенной системы последовательных приближений и изучить свойства предельных функций $u^q(t)$. Для достижения этой цели нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $v^q, q = 1, 2$ — заданные функции. Будем говорить, что для функции v^q выполнены условия **С 3.1**, если $v^q \in \mathcal{W}^1$, $\inf_x v^q(t, x) \geq 0$.

Обозначим $K_{v^q}(t) = \sup_x [v^q(t, x)]^2$, $K_{v^q}^1(t) = \sup_x \|\nabla v^q(t, x)\|^2$ и $v = (v^1, v^2)$.

Рассмотрим вспомогательные уравнения вида

$$\hat{\xi}_{v^q}^q(\tau) = x + \int_0^\tau \beta_{v^q}^q(\hat{\xi}_{v^q}^q(\theta)) d\theta + \int_0^\tau M_{v^q}^q(\hat{\xi}_{v^q}^q(\theta)) d\tilde{w}(\theta), \quad (3.14)$$

$$\hat{J}_v^q(\tau) = I + \int_0^\tau \hat{J}_{v^q}^q(\theta) \nabla M_{v^q}^q(\hat{\xi}^q(\theta)) \cdot dw(\theta) + \int_0^\tau \hat{J}_{v^q}^q(\theta) \left[\nabla M_{v^q}^q(\hat{\xi}_{v^q}^q(\theta)) \right]^2 d\theta, \quad (3.15)$$

$$u_{v^q}^q(t) = \mathbf{E} [u_0^q \circ \psi_{0,t}^q], \quad (3.16)$$

где $\psi_{0,t}^q(x) = \hat{\xi}_{v^q}^q(t)$,

$$\nabla u_{v^q}^q(t) = \mathbf{E} [\nabla u_0^q \circ \psi_{0,t}^q \hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(t)]. \quad (3.17)$$

Напомним, что

$$\beta_v^q(x) = M_{v^q}^q(x) \nabla M_{v^q}^q(x) = \frac{1}{2} [\alpha_{qq} \nabla v^q(x)],$$

обозначим $\sup_x \|u(x)\| = \|u\|_\infty$ и пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в соответствующем пространстве, в частности, если J^q — матрица, то $\|J^q\|$ обозначает матричную норму.

Лемма 3.1. Пусть $v^q \in \mathcal{W}^1$ удовлетворяют условию **С 3.1**. Тогда существуют процессы $\hat{\xi}_v^q(\theta)$, $\hat{\mathbf{J}}_v^q(\theta)$, удовлетворяющие уравнениям (3.14), (3.15) соответственно, и справедливы оценки

$$\mathbf{E} \|\hat{\xi}^q(\theta)\|^2 \leq 3 \left[\|x\|^2 + \frac{\theta}{4} \int_0^\theta \alpha_{qq}^2 K_{v^q}^1(\tau) d\tau + \int_0^\theta [\alpha_q + \alpha_{qq} K_v(\tau)] d\tau \right], \quad (3.18)$$

при $0 \leq \theta \leq T$, где константа T будет определена ниже, и

$$\mathbf{E} \|\hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(\theta)\|^2 \leq \exp \left(\int_0^\theta \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right), \quad (3.19)$$

где $\Lambda_q = (5\alpha_{qq}^2)/(4\alpha_q)$.

Доказательство. Воспользовавшись стандартными оценками и условием **С 3.1**, нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E} \|\hat{\xi}_{v^q}^q(\theta)\|^2 \leq 3 \left[\|x\|^2 + \frac{\theta}{4} \int_0^\theta \alpha_{qq}^2 K_{v^q}^1(\tau) d\tau + \int_0^\theta [\alpha_q + \alpha_{qq} K_{v^q}(\tau)] d\tau \right].$$

Применяя формулу Ито к оценке решения линейного СДУ (3.15), получим неравенство

$$\mathbf{E} \|\hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(\theta)\|^2 \leq I + \mathbf{E} \left[\frac{5}{4} \int_0^\theta \frac{\alpha_{qq}^2 \|\nabla v^q\|^2(\tau, \hat{\xi}^q(\tau))}{[\alpha_q + \alpha_{qq} v^q(\tau, \hat{\xi}_{v^q}^q(\tau))]} \|\hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(\tau)\|^2 d\tau \right],$$

из которого, в силу леммы Гронуолла, вытекает оценка

$$\mathbf{E} \|\hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(\theta)\|^2 \leq \exp \left(\int_0^\theta \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right),$$

где $\Lambda_q = (5\alpha_{qq}^2)/(4\alpha_q)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.1 и $u_{0q} \in H^2$ — ограниченные функции, подчиняющиеся оценке $\inf u_{0q}(x) \geq 0$. Тогда для некоторой положительной константы T и $0 \leq t \leq T$ справедливы оценки

$$\|u_{v^q}^q(t)\|_\infty^2 \leq K_{0q}, \quad (3.20)$$

$$\|\nabla u_{v^q}^q(t)\|_\infty^2 = K_{u^q}^1(t) \leq K_{0q}^1 \exp \left(\int_0^t \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right). \quad (3.21)$$

Доказательство. Первая оценка непосредственно вытекает из формулы (3.16) с учетом условий на u_{0q} и v^q . Для доказательства второй оценки воспользовавшись формулой (3.17) и определением функций $K_v(\theta)$, $K_v^1(\theta)$, получим

$$\|\nabla u_{v^q}^q(t)\|_\infty^2 \leq K_{0q}^1 E \|\hat{\mathbf{J}}^q(t)\|^2,$$

откуда с учетом (3.18) следует

$$\|\nabla u^q(t)\|_\infty^2 \leq K_{0q}^1 \exp \left(\int_0^t \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где T — некоторая константа, которая будет выбрана ниже. Из полученных оценок вытекает, что функции $K_{u^q}^1(t) = \|\nabla u_q^1(t)\|_\infty^2$ удовлетворяют оценкам

$$K_{u^q}^1(t) \leq K_0^1 \exp \left(\int_0^t \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right). \quad (3.22)$$

Лемма доказана.

В качестве завершающего предварительного результата сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и справедливы оценки $\|K_{v^q}(\theta)\| \leq \kappa^q(\theta)$, $K_{v^q}^1(\theta) \leq \kappa_1^q(\theta)$ для положительных функций $\kappa^q(\theta)$, $\kappa_1^q(\theta)$, ограниченных на интервале $[0, T]$ для некоторого $T > 0$. Тогда существует интервал $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leq T$, такой, что функции $u^q(\theta)$, $\nabla u^q(\theta)$ вида (3.15), (3.16) подчиняются оценкам

$$K_{u^q}(\theta) \leq \kappa^q(\theta), \quad K_{u^q}^1(\theta) \leq \kappa_1^q(\theta)$$

для всех $\theta \in [0, T_1]$.

Доказательство. Из оценок (3.18)–(3.20) леммы 3.1 и леммы 3.2 следует, что справедливы неравенства $K_{u^q}(t) \leq K_{0q}$ откуда следует, что в качестве $\kappa^q(t)$ можно выбрать $\kappa^q(t) = K_{0q}$.

Для доказательства второй оценки рассмотрим вспомогательное уравнение

$$X(t) = K_{0q}^1 \exp \left\{ \int_0^t [\Lambda_q X(\tau)] d\tau \right\} \quad (3.23)$$

и заметим, что функция $X(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (3.23), удовлетворяет также задаче Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} = [\Lambda_q X(t)]X(t), \quad X(0) = K_{0q}^1. \quad (3.24)$$

При этом решение задачи Коши (3.24) имеет вид

$$X(t) = \frac{K_0^1}{1 - \Lambda_q K_{0q}^1 t} \quad (3.25)$$

и ограничено на интервале $[0, T]$, длина которого T подчиняется оценке

$$T < \min \left(\frac{1}{\Lambda_1 K_{01}^1}, \frac{1}{\Lambda_2 K_{02}^1} \right). \quad (3.26)$$

Наконец, из соотношений (3.25), (3.26) следует, что в качестве $\kappa_1^q(t)$ можно выбрать $\kappa_1^q(t) = K_{0q}^1 / (1 - \Lambda_q K_{0q}^1 t)$ для всех $t < T$. Лемма доказана.

Применяя полученные в леммах 3.1–3.3 оценки к системе последовательных приближений, покажем, что процессы $\hat{\xi}_n^q(t)$, $\hat{\mathbf{J}}_n^q(t)$ и функции $u_n^q(t)$, $\nabla u_n^q(t)$, удовлетворяющие (3.10)–(3.13), сходятся к решению системы (3.4)–(3.7).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия леммы 2.3. Тогда процессы $\hat{\xi}_n^q(t)$, $\hat{\mathbf{J}}_n^q(t)$ и функции $u_n^q(t)$, $\nabla u_n^q(t)$, удовлетворяющие (3.10)–(3.13), сходятся в соответствующих нормах к решению системы (3.4)–(3.7).

Доказательство. Обозначим $C = 2K_0^1(T + 1)$, $M_n^q = M_{u_n}^q$, $\beta_n^q = \beta_{u_n}^q$ и оценим разность

$$\begin{aligned} |u_{n+1}^q(t, x) - u_n^q(t, x)|^2 &= \mathbf{E} \left| u_0^q(\xi_n^q(t)) - u_0^q(\xi_{n-1}^q(t)) \right|^2 \\ &\leq K_0^1 \mathbf{E} \|\xi_n^q(t) - \xi_{n-1}^q(t)\|^2 \\ &\leq C \left[\int_0^t \mathbf{E} \left\| \beta_n^q(\hat{\xi}_n^q(\theta)) - \beta_{n-1}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(\theta)) \right\|^2 d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathbf{E} \left\| M_n^q(\hat{\xi}_n^q(\theta)) - M_{n-1}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(\theta)) \right\|^2 d\theta \right] \\ &\leq C \int_0^t \int_0^\theta K^1(\tau) \mathbf{E} \|\xi_n^q(\tau) - \xi_{n-1}^q(\tau)\|^2 d\tau d\theta \\ &\quad + C \mathbf{E} \int_0^t \left| u_n^q(\theta, \hat{\xi}_n^q(\theta)) - u_{n-1}^q(\theta, \hat{\xi}_n^q(\theta)) \right|^2 d\theta \\ &\leq \dots \leq C^n \int_0^t \dots \int_0^{t_n} \left[\mathbf{E} \|\hat{\xi}_1^q(\tau) - x\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \left| u_1^q(\tau, \hat{\xi}_1^q(\tau)) - u_0^q(\hat{\xi}_1^q(\tau)) \right|^2 \right] d\tau dt_n \dots dt_1 \\ &\leq \frac{C^n T^n}{n!} G, \end{aligned}$$

где константа G зависит только от $K_0 K_0^1$. Из полученной оценки следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |u_{n+1}^q(t, x) - u_n^q(t, x)| = 0$$

и аналогично можно показать, что для любых $n, m \rightarrow \infty$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_x |u_n^q(t, x) - u_m^q(t, x)| = 0.$$

В силу полноты пространства непрерывных функций существует предел

$$u^q(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

при каждом $t \in [0, T_1]$, $T_1 < T$ и, в силу леммы 3.3, предельная функция $u^q(t, x)$ обладает ограниченной производной по пространственной переменной. Наконец, из полученных оценок нетрудно вывести, что предельная функция $u(t) = (u^1(t), u^2(t))$ ограничена на интервале $[0, T_1]$ и справедливо соотношение

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T_1]} \sup_x |u_n^q(t, x) - u_m^q(t, x)| = 0.$$

Теорема доказана.

Вернемся к рассмотрению исходной задачи, отказавшись от условия $a_q = b_q = c_q = 0$. Пусть

$$\hat{\eta}_u^q(t) = \exp \left\{ \int_0^t [a_q - b_q u^1(\theta, \hat{\xi}^q(\theta)) - c_q u^2(\theta, \hat{\xi}^q(\theta))] d\theta \right\}.$$

Обозначим $\hat{\zeta}^q(t) = (\hat{\xi}^q(t), \hat{\eta}^q(t))$, $U^q(t, x) = (u^q(t, x), \nabla u^q(t, x))$, $V^q(t, x) = (v^q(t, x), \nabla v^q(t, x))$, $U^q(0, x) = (u_{0q}(x), \nabla u_{0q}(x))$ и пусть

$$U_V^q(t, x) = \mathbf{E} [U_{0q}(\hat{\zeta}_V^q(t))] = \left(\mathbf{E} [\eta_v^q(t) u_{0q}(\hat{\xi}_{v^q}^q(t))], \mathbf{E} [Z_V^q(\hat{\zeta}_V^q(t))] \right),$$

где $Z_V^q(\hat{\zeta}^q(t)) = \nabla [\hat{\eta}_v^q(t)] u_{0q}(\hat{\xi}_{v^q}^q(t)) + \hat{\eta}_v^q(t) \nabla u_{0q}(\hat{\xi}_{v^q}^q(t)) \hat{\mathbf{J}}_{v^q}^q(t)$.

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.1 и $u_{0q} \in H^1$ — ограниченные функции. Тогда для некоторой положительной константы T , $0 \leq t \leq T$, справедливы оценки

$$\sup_x |u_{v^q}^q(t, x)|^2 \leq K_{0q} e^{a_q t}, \quad (3.27)$$

$$\sup_x \|U_V^q(t, x)\|^2 \leq \|M_V(t)\| \leq \|A_V(t)\| \|M_0\|, \quad (3.28)$$

Доказательство. Первая оценка непосредственно вытекает из формулы (3.16) с учетом условий на u_{0q} и v^q . Для доказательства второй оценки рассмотрим

$$\begin{aligned} U_V^q(t, z) &= N^q(0, t)U_0^q(z) = \mathbf{E} \left[U_0^q(\hat{\zeta}^q(t)) \right] \\ &= \left(\mathbf{E} \left[\eta_v^q(t)u_{0q}(\hat{\xi}^q(t)), \mathbf{E} \left[Z_V(\hat{\zeta}^q(t)) \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\gamma_v^q(t) = \int_0^t [b_q \nabla v^1(\theta, \hat{\xi}(\theta)) + c_q \nabla v^2(\theta, \hat{\xi}(\theta))] d\theta \mathbf{J}_v^q(\theta),$$

и оценим

$$\begin{aligned} \sup_x \|U_V^q(t, x)\|^2 &= \mathbf{E} \left\| \begin{pmatrix} \eta^q(t) & 0 \\ \gamma^q(t)\eta^q(t) & \eta^q(t) \mathbf{J}^q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(\hat{\xi}^q(t)) \\ \nabla u_0(\hat{\xi}^q(t)) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &\leq \mathbf{E} \left[|\eta^q(t)|^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_v^q(t) & \mathbf{J}_v^q(t) \end{pmatrix} \right\|^2 \right] \|U_0\|_\infty^2 \\ &\leq e^{2a_q t} K_0^2 \mathbf{E} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_v^q(t) & \mathbf{J}_v^q(t) \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

Оценим математическое ожидание квадрата нормы Фробениуса матрицы $S^q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_v^q(t) & \mathbf{J}^q(t) \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{E} \|S^q(t)\|^2 = 1 + \mathbf{E} \|\gamma_v^q(t)\|^2 + \mathbf{E} \|\mathbf{J}_v^q(t)\|^2,$$

используя оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\gamma^q(t)\|^2 &\leq t \mathbf{E} \left[\int_0^t 2 \left[b_q \|\nabla v^1(\theta, \hat{\xi}(\theta))\|^2 + c_q \|\nabla v^2(\theta, \hat{\xi}(\theta))\| \right] d\theta \|\mathbf{J}^q(t)\|^2 \right] \\ &\leq t \int_0^t 2[b_q K_{v^1}^1(\theta) + c_q K_{v^2}^1(\theta)] d\theta \exp \left\{ \int_0^t \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{E} \|\mathbf{J}_{v^q}^q(t)\|^2 \leq \exp \left\{ \int_0^t \Lambda_q K_{v^q}^1(\tau) d\tau \right\}.$$

Суммируя полученные оценки, придем к неравенству

$$K_{U_V}^1(t) \leq K_{U_V^q}^1(0) \left[1 + \exp \left\{ \int_0^t G K_v^1(\tau) d\tau \right\} \right],$$

где G — константа, зависящая от параметров a_q, α_{qq} и $K_v^1(\tau) = K_{v^1}^1(\tau) + K_{v^2}^2(\tau)$. Рассмотрим функцию $X(t)$, $X(t) = 2K_V(0)[1 + \exp\{\int_0^t GX(\tau) d\tau\}]$ и заметим, что $X(t)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\frac{dX(t)}{dt} = GX(0)[X^2(t) - X(t)], \quad X(0) = 2K_V(0).$$

При этом, как нетрудно проверить, $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \frac{2K_V(0)}{2K_V(0) - 2K_V(0)e^{2K_V(0)Gt} + e^{2K_V(0)Gt}} \quad (3.29)$$

и является ограниченной функцией на интервале $[0, T]$, если $2K_V(0) < 1$. В противном случае $X(t)$ ограничена на интервале $[0, T_1]$ при условии

$$T_1 < \frac{1}{2GK_V(0)} \ln \frac{2K_V}{1 - 2K_V}. \quad (3.30)$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.4, применяя, оценки леммы 3.5 к системе последовательных приближений, заданных соотношениями (3.10), (3.11) и

$$u_n^q(t) = \mathbf{E} \left(\exp \left(\int_0^t m_{u_{n-1}}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(\theta)) d\theta \right) u_0^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) \right), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \nabla u_n^q(t) = & \mathbf{E} \left[\int_0^t \nabla m_{u_{n-1}^1, u_{n-1}^2}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) \hat{\mathbf{J}}_{n-1}^q(\theta) d\theta \right. \\ & \times \exp \left(\int_0^t m_{u_{n-1}^1, u_{n-1}^2}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) d\theta \right) u_0^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) \Big] \\ & + \mathbf{E} \left[\exp \left(\int_0^t m_{u_{n-1}^1, u_{n-1}^2}^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) d\theta \right) \nabla u_0^q(\hat{\xi}_{n-1}^q(t)) \hat{\mathbf{J}}_{n-1}^q(t) \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.4. Тогда процессы $\hat{\xi}_n^q(t)$, $\hat{\mathbf{J}}_n^q(t)$, удовлетворяющие (3.10), (3.11), и функции $u_n^q(t)$, $\nabla u_n^q(t)$, удовлетворяющие (3.31)–(3.32), сходятся в соответствующих нормах к решению системы (3.5), (3.6), (3.8), (3.9).

Как уже упоминалось выше, после того, как доказано существование решения стохастической системы (3.4)–(3.7), мы снова оказываемся в ситуации, когда нелинейность рассматриваемой задачи не имеет значения. Другими словами мы снова можем воспользоваться результатами, вытекающими из теоремы 2.1 работы [12].

Покажем, наконец, что построенные в этом пункте решения стохастической системы (3.4)–(3.7) приводят к построению обобщенного решения исходной задачи Коши (1.1), (1.2) в отсутствие кросс-диффузии.

Теорема 3.3. Пусть $u_0^q \in H^2(\mathbf{R}^d)$ — заданные ограниченные функции, $u^q(t) \in H^2(\mathbf{R}^d)$ — функции, удовлетворяющие стохастической системе (3.2)–(3.4), (3.7) и

$$\kappa^q(t) = \exp \left(\int_0^t m_u^q \circ \phi_{0,\theta} d\theta \right) u_0^q. \quad (3.34)$$

Тогда функции $u^q(t) = \mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{t,0}^q]$, $q = 1, 2$, удовлетворяют в обобщенном смысле задаче Коши

$$u_t^q = \mathcal{L}_u^q u^q + m_u^q u^q, \quad u^q(0) = u_0^q \quad (3.35)$$

при $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ и существуют положительные константы C^q , зависящие только от T и $\mathcal{L}^q$, для которых справедливы оценки

$$\|u^q(t)\|_1^2 \leq C^q \|u_0^q\|_1^2 \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Если $u_0 \in H^1$, то $\kappa^q(t)$ — непрерывный семимартингал. Поскольку $\kappa^q(t)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d\kappa^q(t)}{dt} = m_u^q \kappa^q(t), \quad \kappa^q(0) = u_0^q, \quad (3.36)$$

то из обобщенной формулы Ито следует, что

$$\begin{aligned} \kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q &= u_0^q + \int_0^t \frac{\partial \kappa^q(\theta)}{\partial \theta} \circ \psi_{\theta,t}^q d\theta + \int_0^t \nabla \kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q \cdot d\psi^q(\theta) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{L}_u^q(\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q) d\theta, \end{aligned} \quad (3.37)$$

или, с учетом (3.36),

$$\begin{aligned} \kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q &= u_0^q + \int_0^t \nabla(\kappa^q(t) \circ \psi_{\theta,t}^q) M_u^q(x) \cdot dw(\theta) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{L}_u^q(\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q) d\theta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы 2.2. Вычислим математическое ожидание обеих частей соотношения (3.38). Поскольку

$$\mathbf{E} \left\langle \int_0^t \nabla(\kappa^q(t) \circ \psi_{\theta,t}^q), M_u^q(x) dw(\theta), h \right\rangle = 0,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left\langle \int_0^t \mathcal{L}_u^q[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q] d\theta, h \right\rangle \right] &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \langle \kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q, \mathcal{M}_u^q h \rangle d\theta \right] \\ &= \int_0^t \left\langle \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], \left[\frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h + m_u^q h \right] \right\rangle d\theta \\ &= \int_0^t \langle \mathcal{L}_u^q \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], h \rangle d\theta, \end{aligned} \quad (3.39)$$

то получим равенство

$$\mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q] = u_0^q + \int_0^t \langle \mathcal{L}_u^q \mathbf{E}[\kappa^q(\theta) \circ \psi_{\theta,t}^q], h \rangle d\theta. \quad (3.40)$$

Вычисляя производную по переменной t от обеих частей соотношения (3.40), получим, что функции $u^q(t) = \mathbf{E}[\kappa^q(t) \circ \psi_{0,t}^q]$ удовлетворяют задаче Коши (3.35), поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \langle u^q(t), h \rangle = \langle u_0^q, h \rangle$ и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} u^q(t) = u_0^q$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как следует из результатов предыдущего пункта, функции $u^q(t)$, удовлетворяющие системе (3.4)–(3.7), — это дифференцируемые функции. Для того, чтобы показать, что построенное выше решение задачи (3.35) единственно, предположим обратное, т.е. что существует два регулярных обобщенных решения (u^1, u^2) и $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ этой задачи. Тогда их разность $R^q(t) = u^q(t) - \tilde{u}^q(t)$ удовлетворяет уравнению $\partial R^q(t)/\partial t = \mathcal{L}_u^q R^q(t)$ и условию $R^q(0) = 0$, откуда следует, что $R^q(t) = 0$. Для того, чтобы это показать, заметим, что для любого $t > 0$ и $h \in C_0^2 \cap H^2$ существует решение $h^q(s, y)$ параболического уравнения $h_s^q + \frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h + m_u^q h^q = 0$, удовлетворяющее условию $h^q(t) = h(y)$, и при этом $h^q(s)$ принадлежит $C^2(\mathbf{R}^d)$. Отсюда вытекает, что для любой функции $h \in C_0^2 \cap H^2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \langle R^q(t), h \rangle &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{d\theta} R^q(\theta), h(\theta) \right\rangle d\theta + \int_0^t \left\langle R^q(\theta), \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right\rangle d\theta \\ &= \int_0^t \langle \mathcal{L}_u^q R^q(\theta), h(\theta) \rangle d\theta \\ &\quad - \int_0^t \left\langle R^q(\theta), \left[\frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h + m_u^q h(\theta) \right] \right\rangle d\theta = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $R^q(t) = 0$.

4. Вероятностный подход к построению обобщенных решений задачи Коши для полностью недиагональных параболических систем. В этом пункте мы рассмотрим идеи, лежащие в основе вероятностного подхода к построению обобщенных решений задачи Коши для полностью недиагональных параболических систем. Как и выше, мы рассмотрим стохастические уравнения, вид которых диктуется соотношением (1.3). При этом если пара функций u и h принадлежит соболевскому пространству H^k , то $\langle u, h \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} u(x), h(x) dx$ будет обозначать соответствующее скалярное произведение.

Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), отказавшись от упрощающего предположения $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, и построим вероятностное представление ее обобщенного решения $u = (u^1, u^2)$. Заметим, что в этом случае для получения требуемого результата не удастся применить обобщенную формулу Ито к искомым функциям $u^q(s, x)$, что усложняет рассматриваемую задачу.

Для того, чтобы построить вероятностное представление обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) для системы с кросс-диффузией, предположим что существует неотрицательное регулярное обобщенное

решение этой задачи. Как и в предыдущих пунктах, рассмотрим базовый случайный процесс $\xi_{s,\kappa}^q(\theta)$, удовлетворяющий СДУ

$$d\xi_{s,\kappa}^q(\theta) = -M_u^q(\xi_{s,\kappa}^q(\theta)) dw(\theta), \quad \xi_{s,\kappa}^q(0) = \kappa, \quad (4.1)$$

где $M_u^q = \sqrt{\alpha_q + \alpha_{q1}u^1 + \alpha_{q2}u^2}$ и обозначим $J^q(t)$ якобиан преобразования $\phi_{0,t}: \kappa \rightarrow \phi_{0,t}(\kappa) = \xi_{0,\kappa}^q(t)$. Наряду с этим рассмотрим случайный процесс $\eta^q(\theta)$, удовлетворяющий линейному СДУ

$$d\eta^q(\theta) = \tilde{m}_u^q(\xi_{s,\kappa}^q(\theta))\eta^q(\theta) d\theta + C_u^q(\xi_{s,\kappa}^q(\theta))\eta^q(\theta) dw(\theta), \quad \eta^q(0) = 1, \quad (4.2)$$

коэффициенты $\tilde{m}_u^q$ и C_u^q которого будут выбраны ниже.

Рассмотрим случайный процесс

$$r_\kappa^q(t) = \eta^q(t)h(\xi_{0,\kappa}^q(t))J^q(t) \quad (4.3)$$

и заметим, что этот процесс порождает семейство ограниченных линейных отображений $K^q(t)$, действующих в пространстве $H^1(\mathbf{R}^d)$, заданное соотношением

$$\mathbf{E}[r_\kappa^q(t)] = K^q(t)h(\kappa), \quad (4.4)$$

и обладающее полугрупповым свойством, т.е. $K^q(t)K^q(\theta)h = K^q(t+\theta)h$.

В этом пункте мы отождествляем гильбертово пространство $H^k, k = 0, 1, 2$ с двойственным и под спариванием $\langle u, h \rangle$ подразумеваем скалярное произведение u и h в H^k .

Пусть $u^q \in \mathcal{W}^1$ — ограниченные положительные функции, удовлетворяющие системе (1.1), (1.2) в смысле интегральных тождеств (0.3). Тогда из общих результатов теории стохастических уравнений следует, что существуют процессы $\xi^q(t)$, удовлетворяющие СДУ (4.1), и процессы $\eta^q(t)$, удовлетворяющие СДУ (4.2) при соответствующем выборе коэффициентов. Поскольку, как будет показано ниже, при $q = 1, 2$ процессы $J^q(t)$ также удовлетворяют соответствующим линейным СДУ, то из единственности решений линейных СДУ и марковского свойства процесса $\xi^q(t)$ нетрудно вывести, что семейство $K^q(t)$ обладает полугрупповым свойством.

При $q = 1, 2$ нас будет интересовать семейство отображений $[K^q]^+(t)$, сопряженное к семейству $K^q(t)$, т.е. семейство

$$\langle [K^q]^+(t)u, h \rangle = \langle u, K^q(t)h \rangle \quad \forall u, h \in H^1, \quad (4.5)$$

и его вероятностное представление. Для того, чтобы построить вероятностное представление этого семейства наряду с процессами $\xi^q(t), \eta^q(t)$, удовлетворяющими (4.1), (4.2), введем в рассмотрение случайные процессы $\zeta^q(t)$ вида

$$\zeta^q(t) = \exp \left\{ \int_0^t n_u^q(\phi_{0,\theta}^q) d\theta + \int_0^t C_u^q(\phi_{0,\theta}^q) dw(\theta) \right\} u_0^q \quad (4.6)$$

и

$$\zeta^q(t) \circ \psi_{0,t} = \exp \left\{ \int_0^t n_u^q(\psi_{\theta,t}^q) d\theta + \int_0^t C_u^q(\psi_{\theta,t}^q) dw(\theta) \right\} u_0^q \circ \psi_{0,t}, \quad (4.7)$$

где $n_u^q = \tilde{m}_u^q - \frac{1}{2} \|C_u^q\|^2$.

Пусть $u_0^q \in H^k$, $k \geq 1$ тогда, как следует из теории стохастических потоков, процесс $\zeta^q(t)$ — это процесс в пространстве H^k и его композиция с потоком $\psi_{0,t}^q$ также представляет собой случайный процесс в H^k .

Из теоремы 2.1 работы [11] следует, что существуют константы $C_{q,k}$, для которых справедливы следующие оценки

$$\mathbf{E} \|\zeta^q(t) \circ \psi_{0,t}^q\|_k^2 \leq C_{q,k} \|u_0^q\|_k^2,$$

если $u_0^q \in H^k$ — ограниченные функции.

Как вытекает из этих оценок, величина

$$\langle \Lambda_{0,t}^q, h \rangle = \mathbf{E} [\langle \zeta^q(t) \circ \psi_{0,t}^q, h \rangle]$$

корректно определена для любых $h \in H^1$ и определяет линейный непрерывный функционал на двойственном пространстве. В дальнейшем мы будем обозначать $\Lambda^q(t) = \mathbf{E} [\zeta^q(t) \circ \psi_{0,t}^q]$.

Выберем коэффициенты $\tilde{m}_u^q, C_u^q$ в уравнении (4.2) так, чтобы производящий оператор $\mathcal{M}^q$ семейства $K^q(t)$ имел вид

$$\mathcal{M}^q h = \frac{1}{2} M_u^q \Delta h + m_u^q h, \quad (4.8)$$

и покажем, что при таком выборе коэффициентов $\tilde{m}_u^q, C_u^q$ регулярное обобщенное решение $u = (u^1, u^2)$ задачи Коши для полной системы (1.1), (1.2) допускает стохастическое представление вида

$$u^q(t) = \mathbf{E} [\zeta^q(t) \circ \psi_{0,t}^q], \quad (4.9)$$

где процесс $\zeta^q(t)$ задан соотношением (4.6), а $\psi_{0,t}^q$ — стохастический поток, обратный по отношению к потоку $\phi_{0,t}^q$, порожденному решением СДУ (4.1).

Иначе говоря, покажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $u^1, u^2 \in \mathcal{W}^1$ — обобщенное решение системы (1.1), (1.2) и коэффициенты $\tilde{m}_u^q, C_u^q$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{m}_u^q &= m_u^q - \|\nabla M_u^q\|^2 = m_u^q - \frac{\|\alpha_{q1} \nabla u^1 + \alpha_{q2} \nabla u^2\|^2}{4[\alpha_q + \alpha_{q1} u^1 + \alpha_{q2} u^2]}, \\ C_u^q &= -\nabla M_u^q = -\frac{[\alpha_{q1} \nabla u^1 + \alpha_{q2} \nabla u^2]}{2\sqrt{[\alpha_q + \alpha_{q1} u^1 + \alpha_{q2} u^2]}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тогда функции $u^q(t)$ допускают вероятностное представление вида (4.9), где случайные процессы $\zeta^q(t)$ заданы соотношениями (4.6), а $\psi_{0,t}^q$ — обратные потоки по отношению к потокам $\phi_{0,t}^q$, порожденным решениями $\xi^q(t)$ СДУ (4.1).

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько отдельных утверждений.

Пусть u_0^q — заданный элемент из H^1 . Тогда корректно определен случайный процесс $\langle u_0 \circ \psi_{0,t}, h \rangle$ с ограниченными вторыми моментами. Пусть процесс $\zeta^q(t)$ задан соотношением (4.6). Тогда пара процессов $(\psi_{0,t}^q, \zeta^q(t))$ образует двухкомпонентный марковский процесс. При этом $\langle U_{0,t}^q, h \rangle \equiv \mathbf{E}[\langle \zeta^q(t) u_0^q \circ \psi_{0,t}^q, h \rangle]$ — это непрерывный линейный функционал на H^1 , поэтому его можно рассматривать как элемент сопряженного пространства. Этот элемент называют *обобщенным математическим ожиданием* величины $\gamma_{0,t}^q = \zeta^q(t) u_0^q \circ \psi_{0,t}^q$, т.е.

$$[K_t^q]^+ u_0^q = \mathbf{E}[\gamma_{0,t}^q]. \quad (4.11)$$

Заметим, что $[K_t^q]^+$ — это линейное отображение, действующее в пространстве H^1 и обладающее полугрупповым свойством, т.е. $[K_t^q]^+ [K_\theta^q]^+ = [K_{t+\theta}^q]^+$ для любых $t, \theta > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle [K_t^q]^+ [K_\theta^q]^+ u_0^q, h \rangle &= \mathbf{E}[\langle [K_t^q]^+ u_0, [\eta^q(t) h \circ \phi_{0,t}^q] J_{0,t}^q \rangle] \\ &= \mathbf{E}[u_0^q, \eta^q(t+\theta) g \circ \phi_{t,t+\theta} J_{t,t+\theta}^q |_{g=\eta^q(t) h \circ \phi_{0,t}^q} J_{0,t}^q] \\ &= \mathbf{E}[\langle u_0, \eta^q(t+\theta) h \circ \phi_{0,t}^q \circ \phi_{t,t+\theta}^q \rangle [J_{0,t}^q J_{0,t+\theta}^q]] \\ &= \mathbf{E}[\langle K_{0,t+\theta}^q u_0^q, h \rangle]. \end{aligned}$$

Функции $u^q(t)$ корректно определены соотношениями (4.7). Покажем, что они удовлетворяют соотношению (0.3) для любой функции $h \in H^1$, т.е. являются обобщенными решениями рассматриваемой системы.

Вычислим стохастический дифференциал процесса $r^q(\theta)$, заданного соотношением

$$r^q(\theta) \equiv r_{0,\kappa}^q(\theta) = \eta^q(\theta) h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) J^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)).$$

Напомним, что $J^q(\theta) = J^q(\xi_{s,\kappa}^q(\theta))$ — это якобиан преобразования $\kappa \rightarrow \phi_{0,\theta}^q(\kappa)$, порожденного процессом $\xi^q(\theta)$, удовлетворяющим СДУ (4.1), т.е. $J^q(\theta) = \det \nabla \phi_{0,\theta}^q(\kappa)$. При вычислении стохастического дифференциала процесса $r^q(\theta)$ нам понадобится явное выражение для стохастического дифференциала якобиана $J^q(\theta)$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathbf{J}^q(t)$ — якобиева матрица преобразования $\phi_{0,t}^q$, порожденного решением $\xi^q(t)$ СДУ (4.1). Тогда якобиан $J^q(t) = \det \mathbf{J}^q(t)$ удовлетворяет СДУ

$$dJ^q(\theta) = J^q(\theta) \operatorname{Tr}(\widehat{\mathbf{J}}^q(\theta) d\mathbf{J}^q(\theta)), \quad J^q(0) = 1. \quad (4.12)$$

Доказательство. Пусть $G(\theta)$ — неслучайная матрица, тогда ее детерминант $\det G$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\theta} \det G(\theta) = \det G(\theta) \operatorname{Tr} \left[G^{-1}(\theta) \frac{d}{d\theta} G(\theta) \right].$$

При выводе этого уравнения важную роль играет тот факт, что детерминант $\det G$ является полилинейной функцией строк матрицы G , т.е. $\det G(t) = l(g_1(t), \dots, g_d(t))$, где l — линейная функция аргумента $g_k(t), k = 1, \dots, d$, при фиксированных остальных аргументах и, следовательно,

$$\frac{d}{d\theta} \det G(\theta) = \sum_{k=1}^d l \left(g_1(\theta), \dots, \frac{d}{d\theta} g_k(\theta), \dots, g_d(\theta) \right).$$

Если же $G(\theta)$ — обратимая стохастическая матрица, имеющая стохастический дифференциал $dG(\theta)$, то, в силу полилинейности функции $\det$, нетрудно проверить, что последнее соотношение приобретает вид

$$d[\det G(\theta)] = \det G(\theta) \operatorname{Tr} [G^{-1}(\theta) dG(\theta)]. \quad (4.13)$$

(Напомним, что для линейных отображений формула Ито не содержит поправочных слагаемых.)

Поскольку в рассматриваемых условиях матрица $\mathbf{J}^q(\theta) = \nabla \phi_{0,\theta}^q$ обратима и ее стохастический дифференциал $d\mathbf{J}^q$ имеет вид (2.14), то отсюда следует, что $J^q(\theta)$ удовлетворяет (4.13). Лемма доказана.

Пусть

$$\mathcal{M}_u^q h = \frac{1}{2} [M_u^q]^2 \Delta h + m_u^q h \quad (4.14)$$

— оператор сопряженный в H^1 к оператору $\mathcal{L}_u^q$ вида (1.5). Воспользуемся классической формулой Ито для вычисления стохастического дифференциала процесса $r^q(\theta)$.

Лемма 4.2. Пусть коэффициенты в линейном СДУ заданы соотношениями (4.10). Тогда справедливы соотношения

$$dr_0^q(\theta, \kappa) = [\mathcal{M}_u^q h](\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \eta^q(\theta) J^q(\theta) d\theta + \eta^q(\theta) J^q(\theta) N_u^q(\theta) dw(\theta), \quad (4.15)$$

где оператор $\mathcal{M}_u^q$ задан соотношением (4.14), а $N_u^q(\theta)$ — квадратично интегрируемый процесс, и

$$\mathbf{E} [r_0^q(t, \kappa)] = h(\kappa) + \mathbf{E} \left[\int_0^t [\mathcal{M}_u^q h](\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \eta^q(\theta) J^q(\theta) d\theta \right]. \quad (4.16)$$

Доказательство. Применив формулу Ито, получим

$$\begin{aligned} dr^q(\theta) &= d[\eta^q(\theta)h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))J^q(\theta)] \\ &= d[\eta^q(\theta)]h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))J^q(\theta) + \eta^q(\theta)d[h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))]J^q(\theta) \\ &\quad + h^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))d[J^q(\theta)] + d[\eta^q(\theta)]d[h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))]J^q(\theta) \\ &\quad + \eta^q(\theta)d[h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))]d[J^q(\theta)] + d[\eta^q(\theta)]h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))d[J^q(\theta)]. \end{aligned}$$

С учетом явного вида стохастических дифференциалов $d\eta^q(\theta)$, $dh(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))$ и $dJ^q(\theta)$ нетрудно показать, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} dr^q(\theta) &= [\mathcal{L}_0^q(u)]^*h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) + \tilde{m}_u^q(\xi_{0,\kappa}^q(t))h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \\ &\quad + [C_u^q M_u^q](\xi_{0,\kappa}^q(\theta))\nabla h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))J^q(\theta)\eta^q(\theta) d\theta \\ &\quad - [C_u^q \cdot \nabla M_u^q](\xi_{0,\kappa}^q(\theta))h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \\ &\quad + [\nabla M_u^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))]M_u^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))\nabla h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))J^q(\theta)\eta^q(\theta) d\theta \\ &\quad + J^q(\theta)\eta^q(\theta)N_u^q(\theta)dw(\theta), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $N_u^q(\theta) = M_u^q\nabla h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) + [C_u^q + \nabla M_u^q]h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta))$. Анализируя (4.17), можно заметить, что для любой вещественной функции $h \in C_c^3(R^n)$ и $0 \leq s \leq t \leq T$, процессы $r_0^q(\theta)$ имеют стохастические дифференциалы вида (4.15). Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до t и вычисляя математическое ожидание, получим равенство (4.16). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Как и в предыдущих пунктах, для заданной функции $v \in H^k$ случайный процесс $V^q(t) = v \circ \psi_{0,t}^q$ определен с помощью соотношения

$$\langle v \circ \psi_{0,t}^q, h \rangle = \langle v, h \circ \phi_{0,t}^q J^q(t) \rangle \quad (4.18)$$

будет рассматриваться как случайный процесс в H^k .

Рассмотрим случайный процесс $\zeta^q(t) \in H^{-1}$, заданный с помощью соотношения

$$\langle \zeta^q(t) \circ \psi_{0,t}^q, h \rangle = \langle u_0^q, \eta^q(t)h \circ \phi_{0,t}^q J^q(t) \rangle = \langle u_0^q, r_0^q(t) \rangle. \quad (4.19)$$

Пусть $u^q(t) \in H^1$ — обобщенное регулярное решение системы (1.1), (1.2). Тогда, как было показано выше, процессы $\eta^q(t)$ и $\xi^q(t)$ удовлетворяющие СДУ (4.1), (4.2), существуют и определены однозначно. При этом корректность (4.19) гарантируется оценками, приведенными в начале этого пункта. Заметим, что

$$\mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \int_0^t u_0^q(\kappa) dr^q(\theta) d\kappa \right] = \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) r^q(t) d\kappa \right] - \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) h(\kappa) d\kappa, \quad (4.20)$$

и при этом из соотношения (4.15) вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \int_0^t u_0^q(\kappa) dr^q(\theta) d\kappa \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) d \left[\eta^q(\theta) h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) J^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \right] d\kappa \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) [\mathcal{M}_u^q] h(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) \eta^q(\theta) J^q(\xi_{0,\kappa}^q(\theta)) d\kappa d\theta \right]. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Введем замену переменных $\xi_{0,\kappa}^q(\theta) = x$ и, используя стохастическую теорему Фубини, перепишем (4.21) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \int_0^t u_0^q(\kappa) dr^q(\theta) d\kappa \right] &= \mathbf{E} \left[\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [\hat{\eta}^q(\theta) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta))] [\mathcal{M}_u^q] h(x) dx d\theta \right] \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} \left[\hat{\eta}^q(\theta) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \right] \mathcal{M}_u^q h(x) dx d\theta \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}_u^q \mathbf{E} \left[\hat{\eta}^q(\theta) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \right] h(x) dx d\theta, \quad (4.22) \end{aligned}$$

а правую часть равенства (4.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) r^q(t) d\kappa \right] - \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(\kappa) r^q(0, \kappa) d\kappa \\ &= \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \hat{\eta}^q(t) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(t)) h(x) dx \right] - \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(x) h(x) dx. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Сопоставляя соотношения (4.20)–(4.23), получим равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E} \left[\hat{\eta}^q(t) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(t)) \right] h(x) dx \right] \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} u_0^q(x) h(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}_u^q \left(\mathbf{E} \left[\hat{\eta}^q(\theta) u_0^q(\hat{\xi}_{0,x}^q(\theta)) \right] \right) h(x) dx d\theta. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное соотношение (4.24) по t и, принимая во внимание тот факт, что это равенство справедливо при любом $h \in H_0^2$, получим, что функции $u^q(t) = \mathbf{E}[\zeta^q(t) \circ \psi^q(t)]$ удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.2) в смысле теории обобщенных функций.

Справедливость начального условия очевидна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amann H. Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems. — Diff. Int. Eqs., 1990, v. 3, p. 13–75.

2. *Mimura M., Kawasaki K.* Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations. — *J. Math. Biol.*, 1980, v. 9, p. 49–64.
3. *Kim J.* Smooth solutions to a quasi-linear system of diffusion equations for a certain population model. — *Nonlin. Anal.*, 1984, v. 8, p. 1121–1144.
4. *Jüngel A.* Diffusive and nondiffusive population models. In: G. Naldi, L. Pareschi, and G. Toscani (eds.). *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*. Birkhäuser, Basel, (2010), p. 397–425.
5. *Desvillettes L., Lepoutre T., Moussa A.* Entropy, Duality, and Cross Diffusion. — *SIAM J. Math. Analysis*, 2014, v. 46, № 1, p. 820–853.
6. *Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E.* Spatial segregation of interacting species. — *J. Theor. Biol.*, 1979, v. 79, p. 83–99.
7. *Belopolskaya Ya.* Markov processes associated with fully nondiagonal systems of parabolic equations. — *Markov Process. Related Fields*, 2014, v. 20, № 3, p. 452–478.
8. *Belopolskaya Ya.* Probabilistic counterparts for strongly coupled parabolic systems. In: *Springer Proc. Math. Stat. Topics in Statistical Simulation*, 2014, v. 114, p. 33–42.
9. *Белопольская Я. И.* Вероятностная модель системы Лотка–Вольтерра с кросс-диффузией. — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2014, v. 431, p. 9–36.
10. *Kunita H.* *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
11. *Kunita H.* Stochastic Flows Acting on Schwartz Distributions. — *J. Theor. Probab.*, 1994, v. 7, № 2, p. 247–278.
12. *Kunita H.* Generalized solutions of stochastic partial differential equations. — *J. Theor. Probab.*, 1994, v. 7, № 2, p. 279–308.
13. *Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л.* Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений помощью марковских процессов. — *Изв. ВУЗ Математика*, 1978, v. 12, с. 6–17.
14. *Belopolskaya Ya., Dalecky Yu.* *Stochastic equations and differential geometry*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1990.
15. *Belopolskaya Ya., Woźczynski W.* Generalized solutions of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. — *Acta Appl. Math.*, 2007, v. 96, № 1–3, p. 55–69.
16. *Belopolskaya Ya., Woźczynski W.* Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. — *Stochast. Dynam.*, 2012, v. 11, № 1, p. 1–31.
17. *Galiano G., Selgas V.* On a cross-diffusion segregation problem arising from a model of interacting particles. — *Nonlinear Anal.*, 2014, v. 18, p. 34–49.
18. *Fontbona J., Meleard S.* Non local Lotka–Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium. — *J. Math. Biology*, 2015, v. 70, № 4, p. 829–854.
19. *Protter P.* *Stochastic Integration and Differential Equations*. Berlin: Springer, 2010.

Поступила в редакцию
23.IV.2015