Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Романова, Численный анализ критериев Питербарга–Тюрина для проверки гипотез независимости и однородности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 762–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:58:24

3. *Schonberg M.* Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. I. — *Nuovo Cimento*, 1952, v. 9, № 12, p. 1139–1182.
4. *Маслов В. П., Чеботарев А. М.* Уравнение типа Колмогорова–Феллера в факторизованном вероятностном пространстве. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, т. 44, в. 2, с. 373–383.
5. *Маслов В. П.* Об одном методе осреднения для квантовой задачи многих тел. — *Функц. анализ и его приложения*, 1999, т. 33, в. 4, с. 50–64.
6. *Маслов В. П.* Обобщение метода вторичного квантования на случай специальных тензорных произведений пространств Фока и квантование свободной энергии. — *Функц. анализ и его приложения*, 2000, т. 34, в. 4, с. 35–48.
7. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
8. *Маслов В. П.* Коммутативная теория вероятностей, отвечающая парастатистикам. — *Матем. заметки*, 1998, т. 64, № 5, с. 791–793.
9. *Чеботарев А. М.* Вероятностные пространства Маслова, связанные с Бозе-статистиками. — *Матем. заметки*, 1999, т. 65, № 5, с. 746–759.

Поступила в редакцию
17.X.2000

© 2000 г.

РОМАНОВА Т. А.*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ПИТЕРБАРГА–ТЮРИНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НЕЗАВИСИМОСТИ И ОДНОРОДНОСТИ

Проверка методами статистического моделирования аппроксимаций для статистических процедур проверки гипотез однородности и независимости.

Ключевые слова и фразы: статистики Уилкоксона и Манна–Уитни, ранговая корреляция, гауссовские поля.

1. Введение. Задачи проверки однородности двух выборок и независимости двух признаков относятся к основным проблемам математической статистики. Для одномерного случая эти проблемы решены как для гауссовских, так и для произвольных распределений. В многомерном случае известны решения этих задач в гауссовской постановке, но нет свободного от распределения решения, хотя оно имело бы важное практическое применение. В работах [1], [2] В. И. Питербарг и Ю. Н. Тюрин ввели статистические процедуры, основанные на ранжировании всевозможных линейных комбинаций наблюдаемых признаков. Методы, предложенные в [1], [2], все же зависят от распределения исходных наблюдений, но эта зависимость ограничивается присутствием мультипликативной константы в асимптотической формуле для хвостов вероятностных распределений тестовых статистик. Эта константа может быть оценена по выборке. Целью настоящей заметки является оценка методами статистического моделирования аппроксимаций полученных В. И. Питербаргом и Ю. Н. Тюриным для введенных ими статистических процедур проверки гипотез однородности и независимости. Для мультипликативной константы K предложена состоятельная оценка и дан ее численный анализ. Основной результат состоит в том, что предложенные аппроксимации дают хорошее приближение даже на умеренных уровнях значимости (начиная с 10%) с объемом выборки, начиная с 50.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: romanova-tanya@mail.ru

2. Проверка гипотезы однородности. Пусть $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$ — две независимые выборки из неизвестных абсолютно непрерывных распределений A и B в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$ (элементы $\mathbf{R}^d$ представлены вектор-столбцами). Обозначим H гипотезу однородности этих случайных векторов, т.е. $H: A = B$. Рассмотрим скалярные величины $\lambda^T X_1, \dots, \lambda^T X_m$ и $\lambda^T Y_1, \dots, \lambda^T Y_n$, $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Для любых фиксированных $\lambda \neq 0$, гипотеза H включает в себя гипотезу $H^{(\lambda)}$ однородности этих одномерных выборок. Пусть $W_{m,n}(\lambda)$ — статистика Манна-Уитни для проверки гипотезы $H^{(\lambda)}$:

$$W_{m,n}(\lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s[\lambda^T (X_i - Y_j)],$$

где $s[x]$ — знаковая функция,

$$s[x] = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $W_{m,n}(\lambda) = -W_{m,n}(-\lambda)$ и $W_{m,n}(k\lambda) = W_{m,n}(\lambda)$, $k > 0$, в качестве тестовой статистики для гипотезы H возьмем

$$\max_{|\lambda|=1} W_{m,n}(\lambda). \quad (1)$$

Статистика (1) не меняется при переходе от наблюдений X_i и Y_j к их линейным функциям $X_i = RX_i + r$, $Y_j = RY_j + r$ для $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, где R — неслучайная невырожденная матрица, r — неслучайный вектор. Легко проверить, что при выполнении гипотезы H

$$\mathbf{E}W_{m,n}(\lambda) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}W_{m,n}(\lambda)W_{m,n}(\mu) &= mn \mathbf{E} \operatorname{sgn} \lambda^T (X_1 - X_2) \operatorname{sgn} \mu^T (X_1 - X_2) \\ &\quad + mn(m+n-2) \mathbf{E} \operatorname{sgn} \lambda^T (X_1 - X_3) \operatorname{sgn} \mu^T (X_2 - X_3), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}W_{m,n}^2(\lambda) = \tau_{m,n}^2 := \frac{1}{3} mn(m+n+1).$$

Рассмотрим

$$Z_{m,n}(\lambda) = \tau_{m,n}^{-1} W_{m,n}(\lambda) \quad (2)$$

как случайное поле на единичной сфере $|\lambda| = 1$. В [1] доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$ — две независимые d -мерные выборки из общего распределения, имеющего непрерывную относительно меры Лебега плотность $p(x)$. Предположим, что для некоторых констант $C > 0$ и $\gamma > d$

$$p(x) \leq \frac{C}{1 + |x|^\gamma} \quad \forall x \in \mathbf{R}^d. \quad (3)$$

Пусть $Z(\lambda)$ — гауссовское случайное поле, постоянное вдоль любой полупрямой $\{t\lambda, t > 0\}$ ($\lambda \in \mathbf{R}^d$, $\lambda \neq 0$), с

$$\mathbf{E}Z(\lambda) = 0,$$

$$r(\lambda, \mu) = \mathbf{E}Z(\lambda)Z(\mu) = 3 \mathbf{E} \operatorname{sgn} \lambda^T (X_1 - X_3) \operatorname{sgn} \mu^T (X_2 - X_3).$$

Тогда $\sup_\lambda Z_{m,n}(\lambda) \rightarrow \sup_\lambda Z(\lambda)$ по распределению при $m, n \rightarrow \infty$.

Для данной плотности $p(\cdot)$ и для любого $\lambda \neq 0$ определена матрица

$$B_\lambda = 12 \int dx \int_{\lambda^T y=0} dy \int_{\lambda^T z=0} dz p(x-y) p(x-z) p(x). \quad (4)$$

Обозначим $\delta(B_\lambda)$ сумму главных миноров B_λ порядка $d-1$. Затем определим константу $K = \int_{S^{d-1}} \delta^{1/2}(B_\lambda) S(d\lambda)$, где интегрирование осуществляется по единичной сфере S^{d-1} в $\mathbf{R}^d$ и $S(d\lambda)$ — элемент поверхности сферы.

Теорема 2. Для поля $Z(\lambda)$, определенного в теореме 1,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_\lambda Z(\lambda) > x\right\} = K \frac{x^{d-2}}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{-x^2/2} (1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

3. Проверка гипотезы независимости. Пусть X и Y — p - и q -мерные случайные вектора и $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ — независимые реализации (X, Y) . Гипотеза H (H : случайные вектора X и Y независимы) включает в себя гипотезы $H_{\alpha, \beta}$ независимости одномерных случайных величин $\alpha^\top X$ и $\beta^\top Y$, где $\alpha \in \mathbb{R}^p$ и $\beta \in \mathbb{R}^q$ — произвольные неслучайные ненулевые векторы. Согласно принципам С. Роя, гипотезу H следует отвергнуть, если по крайней мере одна из гипотез $H_{\alpha, \beta}$ отвергается. Для тестирования гипотезы $H_{\alpha, \beta}$ используем статистику

$$T_n(\alpha, \beta) := \sigma_n^{-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} s[(\alpha^\top X_i - \alpha^\top X_j)(\beta^\top Y_i - \beta^\top Y_j)], \quad (6)$$

где $s[x]$ — знаковая функция, и $\sigma_n^2 = \frac{2}{9} n(n-1)(2n+5)$. Заметим, что статистика $T_n(\alpha, \beta)$ постоянна вдоль любого двумерного направления, т.е. для любых α, β и для любых $t > 0$

$$T_n(t\alpha, \beta) = T_n(\alpha, t\beta) = T_n(\alpha, \beta).$$

Кроме того, $T_n(-\alpha, \beta) = T_n(\alpha, -\beta) = -T_n(\alpha, \beta)$, и, следовательно, за тестовую статистику для гипотезы H можно принять

$$\sup_{\alpha, \beta} |T_n(\alpha, \beta)| = \sup_{|\alpha|=|\beta|=1} T_n(\alpha, \beta).$$

Теорема 3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$ — две p - и q -мерные независимые выборки из распределений, имеющих непрерывные по мере Лебега плотности p_x и p_y в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Предположим, что для этих плотностей выполнено условие (3). Пусть $Z(\alpha, \beta)$ является гауссовским полем таким, что

$$\mathbf{E} Z(\alpha, \beta) = 0, \quad r(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \mathbf{E} Z(\alpha, \beta) Z(\alpha', \beta') = r_x(\alpha, \alpha') r_y(\beta, \beta'),$$

где $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{p+q}$, $(\alpha, \beta) \neq 0$ и

$$r_x(\alpha, \alpha') = 3\mathbf{E} s[\alpha^\top (X_1 - X_3) \alpha'^\top (X_2 - X_3)],$$

$$r_y(\beta, \beta') = 3\mathbf{E} s[\beta^\top (Y_1 - Y_3) \beta'^\top (Y_2 - Y_3)].$$

Тогда $T_n(\alpha, \beta) \Rightarrow Z(\alpha, \beta)$ слабо при $n \rightarrow \infty$ по равномерной метрике и

$$\sup_{|\alpha|=|\beta|=1} T_n(\alpha, \beta) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=|\beta|=1} Z(\alpha, \beta)$$

при $n \rightarrow \infty$ по распределению.

Обозначим постоянные K из п. 2, относящиеся к распределениям, имеющим плотности p_x и p_y , через K_x и K_y соответственно.

Теорема 4. Для поля, определенного в теореме 3,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{|\alpha|=|\beta|=1} Z(\alpha, \beta) > z\right\} = \frac{K_x K_y}{2(\sqrt{2\pi})^{p+q-1}} z^{p+q-3} e^{-z^2/2} (1 + o(1)) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Доказательства этих двух теорем приведены в [2].

4. Состоятельная оценка мультипликативной константы.

4.1. Теоретические результаты. Асимптотики (5) и (7) распределения статистик зависят от распределения лишь через постоянный множитель K (для случая однородности) и множитель $K_x K_y$ (для случая независимости). Приведем состоятельную оценку для константы K в случае выполнения гипотезы (оценка для констант K_x и K_y получается таким же образом). Рассмотрим функцию

$$F_i(\lambda, x) = \int_{\lambda^\top y=0} y_i p(x-y) dy,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^d$ — ненулевой вектор. Тогда элемент $b_\lambda(i, j)$ матрицы B_λ (см. (4)) равен

$$b_\lambda(i, j) = \int F_i(\lambda, x) F_j(\lambda, x) p(x) dx.$$

нет —
подать
вам
ми-м

При оценивании $F_i(\lambda, x)$ для каждого значения λ заменим плотность $p(x)$ ее ядерной оценкой

$$p_n^h(x) = \frac{1}{nh^d} \sum_{l=1}^n \text{Ker} \left(\frac{\xi_l - x}{h} \right), \quad (8)$$

где ξ_l — d -мерная выборка, содержащая независимые компоненты, из распределения, имеющего плотность $p(x)$, константа $h > 0$, $\text{Ker}(v)$ — ядро (см. [3]). Пусть $\text{Ker}(v) = |\lambda_1|/(2\pi)^{(d-1)/2} I\{|\lambda, v| < \frac{1}{2}\} \exp\{-(\sum_{k=2}^d v_k^2)/2\}$, где λ_1 — наибольшая по модулю компонента вектора λ , $I\{\dots\}$ обозначает индикатор множества. Тогда мы получим следующую оценку для $F_i(\lambda, x)$:

$$F_i^h(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{|\lambda_1|}{nh} \sum_{l=1}^n I\left\{|\lambda, \xi_l - x| < \frac{h}{2}\right\} \left((x_1 - \xi_{l1}) - \frac{(\lambda, x - \xi_l)}{|\lambda_1|} \right), & \text{если } i = 1, \\ \frac{|\lambda_1|}{nh} \sum_{l=1}^n I\left\{|\lambda, \xi_l - x| < \frac{h}{2}\right\} (x_i - \xi_{li}), & \text{если } i \neq 1. \end{cases}$$

Пусть $\xi_w = (\xi_{w1}, \dots, \xi_{wd})^T$, $w = 1, \dots, n$, и B_λ^n обозначает $(d \times d)$ -матрицу с элементами $b_\lambda^n(i, j) = n^{-1} \sum_{w=1}^n F_i^h(\lambda, \xi_w) F_j^h(\lambda, \xi_w)$, где $i, j = 1, \dots, d$.

Теорема 5. Пусть для плотности $p(x)$ выполнено условие (3). Тогда $K^n = \int_{S^{d-1}} \delta^{1/2}(B_\lambda^n) S(d\lambda)$ — состоятельная оценка K при условии $h = h_n$, так что $h_n \rightarrow 0$, $nh_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

5. Численный анализ оценки мультипликативной константы. Построенную асимптотику можно использовать для построения приближенных критериев для H (с малым уровнем значимости). При практическом использовании асимптотик (5) и (7) постоянные K и $K_x K_y$ мы заменяем их оценками по выборкам. Мы выбираем h из условия минимума величины $\int (p_n^h(x) - p(x))^2 dx$, где p_n^h — ядерная оценка (8). Для этого минимизируем критерий $\int p_{nh}^2(x) dx - 2M_{nh}$, где M_{nh} — выборочная оценка для $\int (p_n^h(x) p(x)) dx$, такая, что

$$M_{nh} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ni}^h(X_i), \quad \text{где } p_{ni}^h(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} h^{-1} \text{Ker} \left(\frac{x - X_j}{h} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Стоун в [7] заметил, что

$$M_{nh} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \text{Ker}(X_i - X_j),$$

$$\int p_{nh}^2(x) dx = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} (\text{Ker} * \text{Ker})_h(X_i - X_j),$$

где $(\text{Ker} * \text{Ker})(x) = \int \text{Ker}(x - y) \text{Ker}(y) dy$ — свертка. Если мы находим h таким образом, то получаем оценки для K даже по выборкам небольшого объема.

Результаты численного оценивания постоянной K приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Гауссовский случай

Выборочное мат. ожидание и дисперсия в зависимости от n		
$M(K)$	$D(K)$	n
6.60	0.032	100
6.61	0.016	200
6.61	0.020	300
6.62	0.012	400

Здесь $M(K)$ и $D(K)$ обозначают выборочное математическое ожидание и выборочную дисперсию оценки K , n — объем выборки. В табл. 1 приведены результаты для двумерных гауссовских выборок. В табл. 2 содержатся результаты для двумерных векторов, компоненты которых распределены по Стьюденту с 3-я степенями свободы.

Таблица 2. Случай распределения Стьюдента

Выборочное мат. ожидание и дисперсия в зависимости от n		
$M(K)$	$D(K)$	n
6.80	0.607	100
6.81	0.114	200
6.81	0.276	300
4.82	0.062	400

Для сравнения: постоянную K для гауссовского распределения можно вычислить аналитически. Например, $K \approx 6,60$ для $d = 2$.

Полученные оценки для K мы используем для практической проверки гипотез независимости и однородности.

6. Численный анализ асимптотик. Чтобы проверить, как работает на практике предложенный В. И. Питербаргом и Ю. Н. Тюриным асимптотический критерий проверки гипотезы однородности для двумерного случая, мы действуем следующим образом:

1. Моделируем методом Монте-Карло случайные выборки X и Y согласно заданной функции распределения.

2. Для оценки $\sup_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda)$ выберем s точек на окружности так, что $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 = \cos(2\pi i/s)$, $\lambda_2 = \sin(2\pi i/s)$ при $i = 1, \dots, s$.

3. Вычислим статистику $Z_{m,n}(\lambda)$ по формуле (2).

4. Повторяя предыдущие действия, находим эмпирическую функцию распределения $P\{\widehat{\sup}_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda) > x\}$, где $\widehat{\sup}_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda)$ — оценка для $\sup_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda)$.

5. Находим оценку константы K и строим асимптотическую функцию (5).

6. Находим отношение асимптотической функции к эмпирической функции.

Для проверки гипотезы независимости поступаем аналогично.

Рис. 1. Гипотеза независимости, случай двумерных гауссовских векторов: сплошной линией изображена эмпирическая функция $P\{\sup_{|\alpha|=|\beta|=1} T_n(\alpha, \beta) > z\}$, пунктирной линией — асимптотическая функция $P\{\sup_{|\alpha|=|\beta|=1} Z(\alpha, \beta) > z\}$ и штрих-пунктирной линией — отношение этих функций.

На рис. 1 изображена проверка гипотезы независимости, случай двумерных гауссовских векторов. Здесь $P\{\sup_{|\alpha|=|\beta|=1} T_n(\alpha, \beta) > z\}$ (см. (6)) как функция z оценивается эмпирически методом Монте-Карло (число точек на окружности $|\alpha| = 1$

и $|\beta| = 1$, используемое для оценивания $\sup_{|\alpha|=|\beta|=1}$, равно 20 (использовалось и большее число точек, но результат от этого практически не зависел), число реализаций равно 15 000, объёмы выборки X_i и выборки Y_j равны 50, т.е. $n = 50$, $\sigma^2 = 2n(n-1)(2n+5)/9 \approx 57\,167$.

Рис. 2 демонстрирует проверку гипотез однородности, случай двумерных гауссовских векторов. Здесь $P\{\sup_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda) > x\}$ (см. (2)), как функция x , оценивается эмпирически методом Монте-Карло (число точек на окружности $|\lambda| = 1$, используемое для оценивания $\sup_{|\lambda|=1}$, равно 20, число реализаций равно 20 000, объёмы выборки X_i и выборки Y_j равны 50, т.е. $m = n = 50$, $\tau^2 = mn(m+n+1)/3 \approx 84\,167$).

Проводились расчеты для векторов с экспоненциальным распределением, с распределением Стьюдента с 3-я степенями свободы. И в этих случаях асимптотика также хорошо приближает эмпирическую функцию, как и в гауссовском случае.

Рис. 2. Гипотеза однородности, случай двумерных гауссовских векторов: сплошной линией изображена эмпирическая функция $P\{\sup_{|\lambda|=1} Z_{m,n}(\lambda) > x\}$, пунктирной линией — асимптотическая функция $P\{\sup_{|\lambda|=1} Z(\lambda) > x\}$ и штрихпунктирной — отношение этих функций.

Таблица 3. Случай распределения Стьюдента

Асимптотическая и эмпирическая функции и их отношение			
x	$P\{\sup_{ \lambda =1} Z(\lambda) > x\}$	$P\{\sup_{ \lambda =1} Z_{m,n}(\lambda) > x\}$	отношение
0.00	1.07	1.00	1.07
0.40	0.98	0.97	1.01
0.80	0.77	0.79	0.98
1.20	0.52	0.54	0.96
1.60	0.30	0.31	0.95
2.00	0.14	0.15	0.97
2.40	0.06	0.06	0.99
2.80	0.02	0.02	1.02

В табл. 3 содержатся численные результаты проверки гипотезы однородности для случая распределения Стьюдента с 3-я степенями свободы.

В заключение хочется выразить искреннюю признательность В. И. Питербаргу и Ю. Н. Тюрину за помощь и поддержку в написании этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piterbarg V. I., Tyurin Y. N.* Testing for homogeneity of two multivariate samples: a Gaussian field on a sphere. — *Math. Methods Statist.*, 1993, v. 2, № 2, p. 147–164.
2. *Piterbarg V. I., Tyurin Y. N.* A Multidimensional Rank Correlation: A Gaussian Field on a Torus. — Technical Report № 482, Center for stochastic processes, 1996.
3. *Десро́й Л., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности L_1 -подход. М.: Мир, 1988, 407 с.
4. *Hall P.* Cross-validation in density estimation. — *Biometrika*, 1982, v. 69, p. 383–390.
5. *Rudemo M.* Empirical choice of histograms and kernel density estimators. — *Scand. J. Statist.*, 1982, v. 9, № 2, p. 65–78.
6. *Bowman A. W.* A comparative study of some kernel-based nonparametric density estimators. — Manchester-Sheffield School of Probability and Statistics, Research Report № 84/AWB/1, 1982.
7. *Stone C. J.* An asymptotically optimal window selection rule for kernel density estimates. — *Ann. Statist.*, 1984, v. 12, p. 1285–1297.

Поступила в редакцию
2.III.2000

© 2000 г.

РЫБАКОВ А. С.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ БАЙЕСОВСКОГО РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА В ЗАДАЧЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ГИПОТЕЗ

В статье рассматривается задача построения k -элементного решающего множества для совокупности из m гипотез о виде полиномиального распределения. В статье Н. П. Салихова [3] были получены оценки сверху и снизу для асимптотики максимума логарифмов вероятностей ошибок i -го рода, т.е. вероятностей того, что построенное оптимальным образом k -элементное решающее множество индексов не содержит индекс i при условии, что i — номер истинной гипотезы. В настоящей работе устанавливается совпадение этих оценок и тем самым придается некоторая завершенность результату Н. П. Салихова. При этом неявно предполагается, что априорное распределение на множестве m гипотез — равномерное, и попутно устанавливается асимптотическая оптимальность байесовского метода построения решающего множества.

Ключевые слова и фразы: множественная классификация гипотез, максимум вероятностей ошибок i -го рода, байесовское решающее множество.

1. Введение. Пусть $r \geq 2$, $m \geq 2$, $1 \leq k < m$; r, m, k фиксированы. Через $\mathbf{x}$ мы ниже будем обозначать вектор $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$.

Пусть

$$\Omega = \{\mathbf{x}: x_j \geq 0 \text{ для всех } j; \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\},$$

$$\Omega_+ = \{\mathbf{x}: x_j > 0 \text{ для всех } j\}, \quad \Lambda = \left\{ \mathbf{x}: \sum x_j = 1 \right\}$$

* ФАПСи, ул. Самотечная, 9, Москва, Россия.