Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. П. Савелов, Экстремальные характеристики критериев выбора гипотез с заданными попарными расстояниями по вариации, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 3, 439–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:18:11

© 2016 г.

САВЕЛОВ М. П.*

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА
ГИПОТЕЗ С ЗАДАНЫМИ ПОПАРНЫМИ РАССТОЯНИЯМИ ПО
ВАРИАЦИИ**

Изучаются экстремальные значения характеристик нерандомизированных статистических критериев выбора одной из n гипотез, когда известны только попарные расстояния по вариации между ними. Показано, что нахождение экстремальных значений функции общего вида от вероятностей ошибок сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования. В случае $n = 3$ и функции, равной сумме трех вероятностей ошибок, найдены точные формулы для ее экстремальных значений.

Ключевые слова и фразы: различение многих гипотез, нерандомизированные критерии, расстояние по вариации, экстремальные наборы распределений.

1. Введение. Одной из важных статистических задач является задача о различении нескольких (скажем, n) простых гипотез. Если $n = 2$, то ее решение (для широкого класса случаев) может быть получено с помощью леммы Неймана–Пирсона. Рассмотрим ситуацию, когда $n = 3$. Для любой фиксированной тройки вероятностных мер $\vec{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ можно найти оптимальный в том или ином смысле критерий и определить его «качество» (например, понимая под качеством вероятность ошибки в худшем случае) как функцию от тройки мер. В связи с этим естественным образом возникает вопрос: в каких пределах меняется качество критерия, если тройки вероятностных мер принадлежат некоторому множеству D . Формализуем вышесказанное.

Пусть M — множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ) . Для любых трех вероятностных мер μ_1, μ_2, μ_3 на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения трех гипотез H_i : наблюдение ξ имеет распределение μ_i ($i = 1, 2, 3$). Каждому нерандомизированному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ пространства Ω ($C_i: \bigsqcup_{i=1}^3 C_i = \Omega$, если наблюдение $\xi \in C_i$, то принимается гипотеза H_i , $i = 1, 2, 3$) и вероятности $\mu_j(C_k)$ принятия

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
e-mail: savelovmp@gmail.com

гипотезы H_k в случае, когда верна гипотеза H_j , $j, k \in \{1, 2, 3\}$. Совокупность всех разбиений Ω на три непересекающихся измеримых подмножества обозначим $\mathcal{C}(\Omega)$. Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим тройку (μ_1, μ_2, μ_3) , через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), \dots, \mu_3(C_3))$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbf{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^3)$. Фиксируем такие числа r_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$, что $0 \leq r_{ij} \leq 1$, $1 \leq i < j \leq 3$, $r_{12} + r_{13} \geq r_{23}$, $r_{12} + r_{23} \geq r_{13}$ и $r_{13} + r_{23} \geq r_{12}$. Рассмотрим семейство всевозможных троек вероятностных мер на Σ , между которыми заданы попарные расстояния по вариации следующим образом: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leq i < j \leq 3$, где

$$\rho(\mu_i, \mu_j) := \sup_{A \in \Sigma} |\mu_i(A) - \mu_j(A)|.$$

Будем называть такие тройки мер $\vec{r}$ -согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Естественным образом возникает вопрос о получении удобных выражений для чисел $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Цель данной работы состоит в том, чтобы их найти. Отметим, что величины $\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ сразу получаются из величин $\bar{R}$ и $\underline{R}$ за счет замены f на $-f$.

Теперь мы можем сформулировать основные теоремы. Во-первых, мы рассмотрим конкретную функцию качества критерия, которая имеет вид $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$. Выбор ее связан с тем, что, как показано в приведенной ниже лемме 4, оптимальным с точки зрения этой функции f будет критерий, который тесно связан с оценкой максимального правдоподобия. Установлена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств и пусть $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$. Тогда для величин $\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$ и $\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{R}^+ &= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}), \\ \underline{R}^+ &= \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23})). \end{aligned}$$

Более того, будет показано (см. теорему 5), что утверждение теоремы 1 не изменится и в случае, если экстремум берется по множеству рандомизированных критериев.

Также будет доказано, что в общем случае можно провести «понижение размерности», т.е. свести исходную задачу о нахождении чисел $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к поиску экстремума функции на выпуклых замкнутых многогранниках $N_{18} \subset [0, 1]^{54}$ и $N_6 \subset [0, 1]^{18}$, определенных формулами (3)–(5) и (7)–(9) соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции $f: [0, 1]^9 \rightarrow \mathbf{R}$ выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma}^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^3\right), \\ \underline{R} &= \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_{\sigma}^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right),\end{aligned}$$

где S_3 — множество перестановок третьего порядка.

Другими словами, задача о нахождении $\bar{R}$ сводится к задаче о нахождении супремума по подмножеству $\mathbf{R}^{54}$, а задачу о нахождении $\underline{R}$ удастся свести к задаче о нахождении минимакса в $\mathbf{R}^{18}$. Для непрерывных кусочно-линейных функций f обе полученные формулы сводят задачу о нахождении $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к задачам линейного программирования.

Ниже мы определим множества $Q_6, G_6 \subset \mathbf{R}^6$ и докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Для любого $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Q_6 \cup G_6$ положим $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6)$. Тогда

$$\bar{R} = \sup_{\vec{z} \in Q_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6), \quad \underline{R} = \inf_{\vec{z} \in G_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

Отметим, что в теореме 2 множества, по которым берется экстремум (т.е. N_6 и N_{18}), устроены в некотором смысле проще, чем множества G_6 и Q_6 из теоремы 3, однако последние, в отличие от первых, лежат в пространстве меньшей размерности.

Далее, будет доказана теорема 4, которая является простым обобщением теоремы 2 на случай произвольного конечного числа (n) мер.

Также будет доказано, что при любом $n \geq 2$ существуют непрерывные функции f качества критерия, для которых решение экстремальной задачи для $\underline{R}$ (в случае с n мерами) в классе мер без атомов (более узком) качественно отличается от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается (и $\Omega \neq \emptyset$).

Наконец, заметим, что леммы 1 и 2, сформулированные ниже, доказывают, что если в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств, то экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}$ и $\bar{R}$ достигается на множестве дискретных мер.

2. Обсуждение. Одним из классических результатов в обсуждаемой тематике является лемма Фано (см. [6]), позволяющая оценить вероятности ошибок в терминах расстояния Кульбака–Лейблера. Усиление этого результата (также в терминах расстояния Кульбака–Лейблера) есть в статье [3]. Оценка вероятностей ошибок через более общие f -дивергентные расстояния приведена в статье [2], результаты которой позволяют усилить результаты статьи [3], а также получить следующие оценки вероятностей ошибок в терминах расстояний по вариации.

Пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathbb{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ — статистическая модель, причем $\Theta = \{1, 2, \dots, n\}$ и пространство D решений совпадает с множеством Θ , функция потерь $L(\theta, d) = \mathbb{I}_{\theta \neq d}$, функция $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ задает рандомизированный критерий ($\phi_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$ измеримы для каждого $1 \leq i \leq n$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$) следующим образом: $\phi_i(\omega)$ — это вероятность принять решение под номером i , если происходит ω . Множество таких критериев обозначим Φ . Далее, $a_M := \sup_{\phi \in \Phi} \min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$ (число $1 - a_M$ равно вероятности ошибки «в худшем случае»). Положим $\bar{a} := \sup_{\phi \in \Phi} (1/n) \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$. С помощью теоремы 1 из статьи [2] легко получить следующую оценку:

$$a_M \leq \bar{a} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \min_j \sum_{i=1}^n \rho(P_i, P_j) \right),$$

которая совпадает с величиной $\bar{R}^+$ в случае $n = 3$. Мы докажем, что в условиях, когда $n = 3$ и известны только расстояния по вариации между мерами, эта оценка является неуплучшаемой, причем доказательство позволит одновременно получить нижнюю оценку для $\bar{a}$.

Заметим, что в случае, когда $n = 2$ и критерии рандомизированные, величина $\bar{a}$ выражается через расстояние по вариации (см. [1, с. 461, 462]) следующим образом: $\bar{a} = (1 + \rho(P_1, P_2))/2$.

Ряд результатов, связывающих вероятность ошибки и характеристики соответствующих распределений (например, энтропию), представлен в работах [9], [10], [11]. Схожие вопросы рассмотрены также в статье [4], основная теорема которой состоит в следующем. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — безатомные вероятностные меры на измеримом пространстве $(S, \mathcal{B})$, Π_S — множество измеримых разбиений S ,

$$M(\mu_1, \dots, \mu_n) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^n \in \Pi_S \right\},$$

$$v(\mu_1, \dots, \mu_n) := \sup \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^n \in \Pi_S \right\},$$

тогда $(n - M + 1)^{-1} \leq v \leq Mn^{-1}$.

Задача, решаемая в настоящей работе, отличается от вышеперечисленных тем, что, ограничившись только множеством Φ^* нерандомизи-

рованных критериев, мы найдем величины $\underline{R}$ и $\overline{R}$, которые дают неуплучшаемые оценки для величины $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ в условиях, когда даны только расстояния по вариации r_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$. Тогда неуплучшаемые оценки для величины $a_M^* := \sup_{\phi \in \Phi^*} \min_{1 \leq i \leq 3} \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$ получаются как частный случай теоремы 2. В самом деле,

$$a_M^* = \sup_{\phi \in \Phi^*} \min_{1 \leq i \leq 3} \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \min_{1 \leq i \leq 3} (\mu_i(C_i)).$$

Поэтому неуплучшаемые оценки величины a_M^* через тройку попарных расстояний $\rho(\mu_i, \mu_j)$ являются частным случаем выражений $\underline{R}$ и $\overline{R}$ при $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_i \mu_i(C_i)$. Далее, рассмотрим $\bar{a}^* = (1/3) \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$. Очевидно, что $3\bar{a}^* = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_i (\mu_i(C_i))$, поэтому число $\overline{R}^+$ будет неуплучшаемой верхней оценкой величины $3\bar{a}^*$ в случае, когда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_i \mu_i(C_i)$, при этом (см. теорему 1) $\overline{R}^+ = 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13})$. Более того, $\bar{a} = \bar{a}^*$ (см. доказательство теоремы 5), и (в силу теоремы 5) величина $\overline{R}^+$ является также неуплучшаемой верхней оценкой величины $\bar{a}$. Аналогично величина $\underline{R}^+$ является неуплучшаемой нижней оценкой величин $3\bar{a}$ и $3\bar{a}^*$. Другими словами, из результатов статьи [2], примененной к случаю, когда заданы 3 меры, следуют верхние оценки величин $\bar{a}$ и a_M в терминах расстояний по вариации между мерами, а из результатов настоящей статьи следуют неуплучшаемые двусторонние оценки величин $\bar{a}$, $\bar{a}^*$ и a_M^* .

Отметим, наконец, что рассматриваемая тематика отчасти связана с проблемой деления торта (cake-cutting problem), см., например, [4]. В самом деле, задача о делении торта (Ω) на куски (измеримые множества C_i) между несколькими людьми (каждому человеку соответствует вероятностная мера μ_i , $1 \leq i \leq n$) может быть формализована, в частности, одним из следующих способов ([5, с. 62]). Можно назвать деление «честным», если, например, выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\mu_i(C_i) \geq 1/n$ для каждого i , $1 \leq i \leq n$ (обычное честное деление),
- 2) $\mu_i(C_i) \geq \mu_i(C_j)$ для всех пар $1 \leq i, j \leq n$ («отсутствие зависти»).

Кроме того, естественно считать, что деление тем лучше, чем больше величина $\sum_{i=1}^n \mu_i(C_i)$ («суммарная удовлетворенность»). В рамках этих трех подходов естественно полагать, что деление тем лучше, чем больше значения следующих функций:

- 1) $h_1(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_i \mu_i(C_i)$,
- 2) $h_2(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{i \neq j} (\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j))$,
- 3) $h_3(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_i \mu_i(C_i)$.

Далее, естественным образом возникает задача о нахождении числовых характеристик оптимальных разбиений, т.е. задача о нахождении $\inf_{\vec{\mu} \in A} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} h_l(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\sup_{\vec{\mu} \in A} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} h_l(\vec{\mu}(\vec{C}))$, $1 \leq l \leq 3$ (отметим, что функции h_l непрерывны и кусочно-линейны), где A — некое

множество наборов из n мер на Ω . В случае, когда $A = D(\vec{r})$ (т.е. совпадает с множеством $\vec{r}$ -согласованных мер) и в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n \cdot n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств, решение данной задачи может быть получено с помощью теоремы 4.

Автор благодарит своего научного руководителя А. М. Зубкова за постановку задачи и постоянное внимание, а также А. А. Гущина за полезные советы и указания, позволившие усилить некоторые результаты.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ) . Будем называть множество E отрицательным относительно некоторой знакопеременной меры Φ , если $\Phi(E \cap F) \leq 0$ для любого $F \in \Sigma$; аналогично будем называть множество E положительным относительно Φ , если $\Phi(E \cap F) \geq 0$ для любого $F \in \Sigma$. В силу теоремы Хана о разложении (для знакопеременной меры $\mu_1 - \mu_2$) найдется такое измеримое множество R_1 , что оно положительно относительно $\mu_1 - \mu_2$, а его дополнение $\Omega \setminus R_1$ отрицательно. Другими словами, для любого $F \in \Sigma$ выполнены следующие неравенства: $\mu_1(R_1 \cap F) \geq \mu_2(R_1 \cap F)$ и $\mu_2((\Omega \setminus R_1) \cap F) \geq \mu_1((\Omega \setminus R_1) \cap F)$. Аналогично (в силу теоремы Хана о разложении) найдутся такие множества R_2 и R_3 , что $\mu_2(R_2 \cap F) \geq \mu_3(R_2 \cap F)$, $\mu_3((\Omega \setminus R_2) \cap F) \geq \mu_2((\Omega \setminus R_2) \cap F)$, $\mu_1(R_3 \cap F) \geq \mu_3(R_3 \cap F)$ и, наконец, $\mu_3((\Omega \setminus R_3) \cap F) \geq \mu_1((\Omega \setminus R_3) \cap F)$. Положим по определению

$$\begin{aligned} B_{123} &:= R_1 R_2 R_3, & B_{132} &:= R_1 \bar{R}_2 R_3, \\ B_{312} &:= R_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3, & B_{213} &:= \bar{R}_1 R_2 R_3, \\ B_{231} &:= \bar{R}_1 R_2 \bar{R}_3, & B_{321} &:= \bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3, \\ (R_1 R_2 \bar{R}_3 = \emptyset, & \bar{R}_1 \bar{R}_2 R_3 = \emptyset), \end{aligned}$$

где последние равенства можно считать выполненными без ограничения общности (в самом деле, если множество $R_1 R_2 \bar{R}_3$ или $\bar{R}_1 \bar{R}_2 R_3$ не является пустым, то его можно «присоединить» к R_1). Пусть $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ — множество перестановок (индексов множеств B_{ijk}). Несложно видеть, что набор множеств B_σ , $\sigma \in S_3$, является разбиением пространства Ω , и если $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3$, то $\mu_{\sigma_1}(F \cap B_\sigma) \geq \mu_{\sigma_2}(F \cap B_\sigma) \geq \mu_{\sigma_3}(F \cap B_\sigma)$ при всех $F \in \Sigma$. Таким образом, для каждой тройки мер определены множества $B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega)$, задающие разбиение пространства Ω , на котором эти меры заданы. Далее, нам потребуется новое обозначение. Пусть $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \in S_3$, тогда σ_i ($1 \leq i \leq 3$) — это числа от 1 до 3. Рассмотрим подстановку, которая переводит единицу в σ_1 , двойку в σ_2 , а тройку в σ_3 . Тогда обратная ей переводит число i в число, которое мы будем обозначать σ_i^{-1} .

Заметим, что расстояния по вариации между мерами μ_1, μ_2, μ_3 определяются значениями $\mu_i(B_\sigma)$, так как

$$\begin{aligned} 2r_{ij} &= \sum_{\sigma \in S_3} |\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)| \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma))(-1)^{I\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned}$$

Каждое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ пространства Ω , вообще говоря, разбивает каждое множество B_σ на три подмножества $B_\sigma^j = B_\sigma \cap C_j$, $1 \leq j \leq 3$, и набор аргументов $\vec{\mu}(\vec{C})$ функции f полностью определяется 54 значениями $\mu_i(B_\sigma^j)$: $\mu_i(C_j) = \sum_{\sigma \in S_3} \mu_i(B_\sigma^j)$. Поэтому задача поиска экстремальных значений $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ сводится к задаче поиска экстремума на подмножестве $\mathbf{R}^{54}$, определяемом условиями на то, что меры μ_1, μ_2, μ_3 — вероятностные с заданными расстояниями по вариации (и неравенствами, входящими в определения множеств B_σ).

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\bar{R}$. Рассмотрим пространство $\Omega_{18} = \{\omega_\sigma^m, \sigma \in S_3, 1 \leq m \leq 3\}$, состоящее из 18 элементов, и σ -алгебру $2^{\Omega_{18}}$ на нем. Через Z_{18} обозначим семейство $\vec{r}$ -согласованных троек мер μ_1, μ_2, μ_3 на Ω_{18} , т.е. $Z_{18} = \{ \{\mu_i\}_{i=1}^3 : \rho(\mu_s, \mu_l) = r_{sl}, 1 \leq s < l \leq 3 \}$. Рассмотрим (по аналогии с введением множеств B_{ijk}) те тройки мер из Z_{18} , для которых при любых $1 \leq m \leq 3$ и $\sigma \in S_3$ выполнены следующие условия:

$$\mu_{\sigma_1}(\omega_\sigma^m) \geq \mu_{\sigma_2}(\omega_\sigma^m) \geq \mu_{\sigma_3}(\omega_\sigma^m). \quad (1)$$

Множество таких троек мер обозначим Λ_{18} . Далее, рассмотрим разбиение $\vec{C}^0 := \{C_1^0, C_2^0, C_3^0\}$, где $C_m^0 = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \omega_\sigma^m$. Напомним, что по определению $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Верна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств K_σ^i , $\sigma \in S_3$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда для любой функции $f: [0, 1]^9 \rightarrow \mathbf{R}$ выполняется следующее равенство:

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)). \quad (2)$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\bar{R} \geq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)).$$

Так как $K_\sigma^i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq 3$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы $v_{i,\sigma}$, что $v_{i,\sigma} \in K_\sigma^i$, $1 \leq i \leq 3$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{18} построим соответствующую тройку

$\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом: $\mu_i^*(A) = \sum_{(m,\sigma): v_{m,\sigma} \in A} \mu_i(\omega_\sigma^m)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$ и $\vec{\mu}^* \in D(\vec{r})$. Другими словами, для любой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{18} найдется такая $\vec{r}$ -согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω , что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит, $\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{\mu} \in Z_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, несложно видеть, что

$$\sup_{\vec{\mu} \in Z_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{\mu} \in Z_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) \geq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$$

в силу того, что $\Lambda_{18} \subset Z_{18}$. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{\mu} \in Z_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\bar{R}$. Таким образом, $\bar{R} \geq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$, и нам осталось доказать, что $\bar{R} \leq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. В самом деле, рассмотрим любую тройку $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$ мер на Ω и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω . Построим тройку $\vec{\mu}^*$ мер на пространстве Ω_{18} следующим образом: $\mu_i^*(\omega_\sigma^m) := \mu_i(B_\sigma \cap C_m)$, где множества $B_\sigma = B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega)$ строятся на основании разложения Хана так, как это сделано выше. Напомним, что по определению $C_m^0 := \bigsqcup_\sigma \omega_\sigma^m$, значит, $\mu_i(C_m) = \sum_{\sigma \in S_3} \mu_i(B_\sigma \cap C_m) = \sum_{\sigma \in S_3} \mu_i^*(\omega_\sigma^m) = \mu_i^*(C_m^0)$, поэтому $\vec{\mu}(\vec{C}) = \vec{\mu}^*(\vec{C}^0)$, откуда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Кроме того, из $\vec{r}$ -согласованности тройки мер $\vec{\mu}$ следует (в силу непосредственной проверки) $\vec{r}$ -согласованность тройки $\vec{\mu}^*$. Убедимся, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{18}$, проверив, что для этой тройки мер выполняется соотношение (1). В силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mu_{\sigma_1}(B_\sigma \cap C_m) &\geq \mu_{\sigma_2}(B_\sigma \cap C_m) \geq \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \cap C_m), \\ 1 &\leq m \leq 3, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3, \end{aligned}$$

значит $\mu_{\sigma_1}^*(\omega_\sigma^m) \geq \mu_{\sigma_2}^*(\omega_\sigma^m) \geq \mu_{\sigma_3}^*(\omega_\sigma^m)$ при всех $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3, 1 \leq m \leq 3$. Итак, мы получили, что для каждой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω и любого разбиения $\vec{C}$ пространства Ω найдется такая тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω_{18} , что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{18}, f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Отсюда сразу следует, что

$$\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит, очевидно, величина $\bar{R}$. Таким образом, $\bar{R} \leq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. Лемма 1 полностью доказана.

Заметим, что лемма 1 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\bar{R}$: можно считать, что $\Omega = \Omega_{18}, \Sigma = 2^{\Omega_{18}}$ и тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3)

принадлежит множеству Λ_{18} . К тому же, лемма 1 позволяет избавиться от инфимума по разбиениям.

Теперь докажем первую формулу (для величины $\bar{R}$) из теоремы 2, т.е. сведем задачу о нахождении $\bar{R}$ к поиску условного экстремума в $\mathbf{R}^{54}$ (предполагая, что условие теоремы 2 выполнено). Для этого фиксируем произвольную тройку мер $\{\mu_l\}_{l=1}^3$ из Λ_{18} и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω_{18} . По тройке мер построим множества $B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega_{18})$. Введем обозначение $D_\sigma^m = C_m \cap B_\sigma$, $x_\sigma^{(l),m} = \mu_l(D_\sigma^m)$. Тогда на множествах D_{ijk}^m выполнены неравенства $\mu_i(D_{ijk}^m) \geq \mu_j(D_{ijk}^m) \geq \mu_k(D_{ijk}^m)$. (Кроме того, несложно видеть, что на множествах D_{ijk}^m , $1 \leq m \leq 3$, принимается m -я гипотеза.) Отсюда получаем соотношения между числами $x_{ijk}^{(l),m}$ (для всех $1 \leq m \leq 3, \sigma \in S_3$):

$$x_\sigma^{(\sigma_1),m} \geq x_\sigma^{(\sigma_2),m} \geq x_\sigma^{(\sigma_3),m}. \quad (3)$$

Далее, для любых $\sigma \in S_3$, $F \in 2^{\Omega_{18}}$ выполнены неравенства $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma \cap F) \geq \mu_{\sigma_2}(B_\sigma \cap F) \geq \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \cap F)$ и в силу $\vec{r}$ -согласованности

$$\begin{aligned} 2r_{ij} &= \sum_{\sigma \in S_3} |\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)| \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)) \cdot (-1)^{I\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned}$$

Обозначим $x_\sigma^{(l)} := \sum_{m=1}^3 x_\sigma^{(l),m}$. Тогда $x_\sigma^{(l)} = \sum_{m=1}^3 \mu_l(C_m \cap B_\sigma) = \mu_l(B_\sigma)$. Таким образом, расписывая условие $\vec{r}$ -согласованности, получаем

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} (x_\sigma^{(i)} - x_\sigma^{(j)}) (-1)^{I\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Кроме того, так как μ_i являются вероятностными мерами, то

$$\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(l)} = 1, \quad 0 \leq x_\sigma^{(l)} \leq 1, \quad 1 \leq l \leq 3, \quad \sigma \in S_3.$$

Значит,

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} \left(\sum_m x_\sigma^{(i),m} - \sum_m x_\sigma^{(j),m} \right) (-1)^{I\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad (4)$$

$$\sum_{\sigma \in S_3} \sum_m x_\sigma^{(l),m} = 1, \quad 0 \leq x_\sigma^{(l),m} \leq 1, \quad 1 \leq l \leq 3, \quad 1 \leq m \leq 3, \quad \sigma \in S_3. \quad (5)$$

Пусть $\mathbb{T}$ — множество троек произвольных отображений $T_i, T_i: \Omega_{18} \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq 3$. Пусть $\phi_{18}: \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]^{54}$ и $\phi_{18}(T_1, T_2, T_3) = \vec{x}$, где

$\vec{x} = (x_{123}^{(1),1}, x_{123}^{(1),2}, x_{123}^{(1),3}, x_{123}^{(2),1}, \dots, x_{321}^{(3),1}, x_{321}^{(3),2}, x_{321}^{(3),3})$ и $x_{ijk}^{(l),m} = T_l(\omega_{ijk}^m)$. Несложно видеть, что такое отображение является биективным (как отображение из $\mathbb{T}$ в $[0, 1]^{54}$). Далее, обозначим через $N_{18} \subset [0, 1]^{54}$ множество векторов $\vec{x}$, удовлетворяющих условиям (3)–(5). Заметим, что отображение ϕ_{18} устанавливает биекцию между множеством Λ_{18} и множеством N_{18} , так как условия принадлежности тройки мер множеству Λ_{18} равносильны условиям (3)–(5) принадлежности вектора $\vec{x}$ множеству N_{18} . Далее, множество $N_{18} \subset [0, 1]^{54}$ представимо в виде конечного пересечения (замкнутых) полупространств и гиперплоскостей, пересечение замкнутых множеств замкнуто, пересечение выпуклых множеств выпукло, поэтому N_{18} — замкнутый выпуклый многогранник. В силу леммы 1, биективности отображения ϕ_{18} и в силу того, что $\mu_j(C_k^0) = \sum_{\sigma} \mu_j(C_k^0 \cap B_{\sigma}) = \sum_{\sigma} x_{\sigma}^{(j),k}$, выполнены следующие равенства:

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\{\mu_j(C_k^0)\}_{j,k=1}^3) = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma}^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^3\right).$$

Таким образом, формула для величины $\bar{R}$ из теоремы 2 доказана, и задача о нахождении величины $\bar{R}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0, 1]^{54}$.

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\underline{R}$. Рассмотрим пространство $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ и σ -алгебру 2^{S_3} на нем. Через Z_6 обозначим семейство $\vec{r}$ -согласованных троек мер μ_1, μ_2, μ_3 на S_3 , т.е. $Z_6 = \{(\mu_i)_{i=1}^3: \rho(\mu_s, \mu_l) = r_{sl}, 1 \leq s < l \leq 3\}$. Рассмотрим (по аналогии с введением множеств B_{ijk}) те тройки мер из Z_6 , для которых при любом $\sigma \in S_3$ выполнены следующие соотношения:

$$\mu_{\sigma_1}(\sigma) \geq \mu_{\sigma_2}(\sigma) \geq \mu_{\sigma_3}(\sigma). \quad (6)$$

Множество таких троек мер обозначим Λ_6 . Напомним, что по определению $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Верна следующая лемма.

Лемма 2. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержатся по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств K_{σ} , $\sigma \in S_3$. Тогда для любой функции $f: [0, 1]^9 \rightarrow \mathbf{R}$ выполняется следующее равенство:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\underline{R} \leq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Так как $K_{\sigma} \neq \emptyset$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы v_{σ} , что $v_{\sigma} \in K_{\sigma}$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 построим

соответствующую тройку $\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом: $\mu_i^*(A) = \sum_{\sigma: v_\sigma \in A} \mu_i(\sigma)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$ и $\vec{\mu}^* \in D(\vec{r})$. Другими словами, для любой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 найдется такая $\vec{r}$ -согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω , что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит, $\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leq \inf_{\vec{\mu} \in Z_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, $\inf_{\vec{\mu} \in Z_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$, так как $\Lambda_6 \subset Z_6$. Таким образом,

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\underline{R}$.

Покажем теперь, что $\underline{R} \geq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. В самом деле, пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ) . Для этой тройки мер определим множества B_σ так же, как это было сделано выше (с помощью теоремы Хана о разложении). Далее, рассмотрим такие множества C_m , что $\bigsqcup_{m=1}^3 C_m = \Omega$ и каждое C_m является объединением нескольких множеств B_σ (или же является пустым). Класс таких разбиений пространства Ω обозначим Γ . Очевидно, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{C} \in \Gamma} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, рассмотрим меры μ_k^* ($1 \leq k \leq 3$) на S_3 , определенные так: $\mu_k^*(\sigma) = \mu_k(B_\sigma)$. Несложно видеть, что определенные таким образом μ_k^* , $1 \leq k \leq 3$, будут $\vec{r}$ -согласованными (так как $\{\mu_i\}_{i=1}^3$ являются $\vec{r}$ -согласованными, а условия на r_{ij} дают ограничения не более, чем на соотношения между мерами на множествах B_{ijk}). Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что $\sup_{\vec{C} \in \Gamma} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Отсюда следует, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Далее, покажем, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, проверив выполнение условия (6) для тройки мер $\vec{\mu}^*$. В самом деле, в силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства: $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma) \geq \mu_{\sigma_2}(B_\sigma) \geq \mu_{\sigma_3}(B_\sigma)$, поэтому $\mu_{\sigma_1}^*(\sigma) \geq \mu_{\sigma_2}^*(\sigma) \geq \mu_{\sigma_3}^*(\sigma)$. Значит, $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$. Таким образом, для любой $\vec{r}$ -согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω найдется такая $\vec{r}$ -согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер (из Λ_6) на S_3 , что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\underline{R}$. Таким образом, $\underline{R} \geq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Значит, $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Так как S_3 конечно, то $\sup$ и $\max$ по $\mathcal{C}(S_3)$ совпадают, что завершает доказательство леммы 2.

Заметим, что лемма 2 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\underline{R}$: можно считать, что $\Omega = S_3$, $\Sigma = 2^{S_3}$ и что тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3) принадлежит множеству Λ_6 .

Теперь докажем формулу для величины $\underline{R}$ из теоремы 2, т.е. сведем задачу о поиске $\underline{R}$ к поиску экстремума в $\mathbf{R}^{18}$ (предполагая, что условия теоремы 2 выполнены). Рассмотрим множество $\mathbb{T}$ троек произвольных отображений T_i , $T_i: S_3 \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq 3$. Пусть $\phi_6: \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]^{18}$ и $\phi_6(T_1, T_2, T_3) = \vec{x}$, где $\vec{x} = (x_{123}^{(1)}, x_{132}^{(1)}, x_{213}^{(1)}, x_{231}^{(1)}, x_{312}^{(1)}, x_{321}^{(1)}, x_{123}^{(2)}, x_{132}^{(2)}, x_{213}^{(2)}, x_{231}^{(2)}, x_{312}^{(2)}, x_{321}^{(2)}, x_{123}^{(3)}, x_{132}^{(3)}, x_{213}^{(3)}, x_{231}^{(3)}, x_{312}^{(3)}, x_{321}^{(3)})$, где, в свою очередь, $x_{ijk}^{(l)} = T_l(\omega_{ijk})$. Несложно видеть, что такое отображение является биекцией между $\mathbb{T}$ и $[0, 1]^{18}$.

Найдем образ множества Λ_6 при отображении ϕ_6 . Для этого фиксируем тройку мер $\{\mu_i\}_{i=1}^3 \in \Lambda_6$. Тогда $x_\sigma^{(i)} = \mu_i(\sigma)$, где $1 \leq i \leq 3$, $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \in S_3$. Далее, расписывая r_{ij} по определению, получаем

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} (x_\sigma^{(i)} - x_\sigma^{(j)}) (-1)^{I\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (7)$$

Несложно видеть, что так как $\vec{\mu} \in \Lambda_6$, то

$$x_\sigma^{(\sigma_1)} \geq x_\sigma^{(\sigma_2)} \geq x_\sigma^{(\sigma_3)}. \quad (8)$$

Кроме того, в силу того, что μ_i , $1 \leq i \leq 3$, являются вероятностными мерами, выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(l)} = 1 \quad (0 \leq x_\sigma^{(l)} \leq 1, \quad 1 \leq l \leq 3, \quad \sigma \in S_3). \quad (9)$$

Обозначим через $N_6 \subset [0, 1]^{18}$ множество таких векторов $\vec{x} = (x_{123}^{(1)}, x_{132}^{(1)}, x_{213}^{(1)}, x_{231}^{(1)}, x_{312}^{(1)}, x_{321}^{(1)}, x_{123}^{(2)}, x_{132}^{(2)}, x_{213}^{(2)}, x_{231}^{(2)}, x_{312}^{(2)}, x_{321}^{(2)}, x_{123}^{(3)}, x_{132}^{(3)}, x_{213}^{(3)}, x_{231}^{(3)}, x_{312}^{(3)}, x_{321}^{(3)})$, для которых выполнены условия (7)–(9). Далее, множество N_6 представимо в виде конечного пересечения (замкнутых) полупространств и гиперплоскостей, пересечение замкнутых множеств замкнуто, пересечение выпуклых множеств выпукло, поэтому N_6 — замкнутый выпуклый многогранник. Заметим, что отображение ϕ_6 устанавливает биекцию между Λ_6 и множеством N_6 , так как условие принадлежности тройки мер множеству Λ_6 равносильно условиям (7)–(9) принадлежности вектора $\vec{x}$ множеству N_6 . В силу леммы 2 выполнено следующее равенство:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Напомним, что через $\mathcal{C}(S_3)$ мы обозначили множество всевозможных разбиений S_3 на 3 непересекающихся множества, т.е. разбиений вида

$\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$, где $\bigsqcup_{k=1}^3 C_k = S_3$. Так как ϕ_6 — биекция и так как $\mu_l(\sigma) = x_\sigma^{(l)}$, $1 \leq l \leq 3$, $\sigma \in S_3$, получаем

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^3) \\ &= \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right). \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 2 доказана, а задача о нахождении величины $\underline{R}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0, 1]^{18}$.

4. Доказательство теоремы 3. Перейдем к получению формулы для величины $\bar{R}$ из теоремы 3. В силу теоремы 2 выполнено следующее соотношение: $\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f(\{\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(j),k}\}_{j,k=1}^3)$. Рассмотрим линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^{54} \rightarrow \mathbf{R}^9$, при котором каждому вектору $\vec{x} \in \mathbf{R}^{54}$ сопоставляется вектор $\vec{y} = (y_1, \dots, y_9)$ так, что $y_1 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(1),1}$, $y_2 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(1),2}, \dots, y_9 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(3),3}$. Так как N_{18} — выпуклый замкнутый многогранник в $\mathbf{R}^{54}$, то его образ P при данном отображении тоже является выпуклым замкнутым многогранником. Тогда

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^3\right) = \sup_{\vec{y} \in P} f(y_1, \dots, y_9).$$

Кроме того, если $\vec{x} \in N_{18}$, то $\sum_{j=1}^3 \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(i),j} = 1$, $i = 1, 2, 3$, поэтому если $\vec{y} \in P$, то $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $y_4 + y_5 + y_6 = 1$ и $y_7 + y_8 + y_9 = 1$. Пусть $Q_6 \subset \mathbf{R}^6$ — проекция P на подпространство пространства $\mathbf{R}^9$, порожденное координатами под номерами 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Тогда Q_6 — выпуклый замкнутый многогранник. При любом $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Q_6$ положим $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6)$, тогда $\bar{R} = \sup_{\vec{z} \in Q_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$. Отметим, что множество Q_6 (как и множество P) строится независимо от функции f (другими словами, множество Q_6 одинаково для всех функций f). Итак, формула для $\bar{R}$ из теоремы 3 доказана.

Перейдем к доказательству формулы для $\underline{R}$ из теоремы 3. В силу теоремы 2 имеем $\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\}_{j,k=1}^3)$. Обозначим через $V_1 \subset N_6$ такое (возможно, пустое) множество, что при всех $\vec{x} \in V_1$ выполнено соотношение $\max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\}_{j,k=1}^3) = f(\{\sum_{\sigma \in C_k^*} x_\sigma^{(j)}\}_{j,k=1}^3)$, где $C_1^* = \{(123), (231), (312)\}$, $C_2^* = \{(132), (321)\}$, $C_3^* = \{(213)\}$. Рассмотрим (вырожденное) линейное отображение $\beta_1: \mathbf{R}^{18} \rightarrow \mathbf{R}^9$, при котором каждому вектору $\vec{x} \in N_6$ сопоставляется вектор

$\vec{y} \in \mathbf{R}^9$ так, что

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{123}^1 + x_{231}^1 + x_{312}^1, & y_2 &= x_{132}^1 + x_{321}^1, & y_3 &= x_{213}^1, \\ y_4 &= x_{123}^2 + x_{231}^2 + x_{312}^2, & y_5 &= x_{132}^2 + x_{321}^2, & y_6 &= x_{213}^2, \\ y_7 &= x_{123}^3 + x_{231}^3 + x_{312}^3, & y_8 &= x_{132}^3 + x_{321}^3, & y_9 &= x_{213}^3. \end{aligned}$$

Обозначим через $U_1 \subset \mathbf{R}^9$ образ V_1 при отображении β_1 . Рассматривая всевозможные разбиения S_3 на 3 подмножества (число таких разбиений обозначим через T) получаем набор $\{V_i\}_{i=1}^T$ таких множеств, что $V_i \subset N_6$ при $1 \leq i \leq T$, $\bigcup_{i=1}^T V_i = N_6$ и для каждого V_i , $1 \leq i \leq T$, определено соответствующее (вырожденное) линейное преобразование β_i . Образ V_i при отображении β_i обозначим через U_i . Пусть $F := \bigcup_{i=1}^T U_i$. Тогда $F \subset \mathbf{R}^9$ и

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_{\sigma}^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) \\ &= \inf_{\vec{x} \in \bigcup_{i=1}^T V_i} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_{\sigma}^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) \\ &= \min_{1 \leq i \leq T} \inf_{\vec{x} \in V_i} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_{\sigma}^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) \\ &= \min_{1 \leq i \leq T} \inf_{\vec{y} \in U_i} f(y_1, y_2, \dots, y_9) \\ &= \inf_{\vec{y} \in \bigcup_{i=1}^T U_i} f(y_1, y_2, \dots, y_9) \\ &= \inf_{\vec{y} \in F} f(y_1, y_2, \dots, y_9). \end{aligned}$$

Отметим, что (как и ранее) если $\vec{y} \in F$, то $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $y_4 + y_5 + y_6 = 1$ и $y_7 + y_8 + y_9 = 1$. Далее, пусть $G_6 \subset \mathbf{R}^6$ — проекция F на подпространство пространства $\mathbf{R}^9$, порожденное координатами под номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8. При любом $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in G_6$ положим (как и ранее) $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6)$, тогда $\underline{R} = \inf_{\vec{z} \in G_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в отличие от множества Q_6 множество G_6 зависит от функции f , и в этом смысле формула, сводящая задачу о нахождении $\underline{R}$ к поиску экстремума на G_6 , менее удобна, чем соответствующая формула для $\bar{R}$ из теоремы 3. Более того, в отличие от множества P_6 , которое является замкнутым выпуклым многогранником, множество G_6 , вообще говоря, устроено значительно сложнее.

Отметим также, что формулы для величины $\underline{R}$ в теоремах 2 и 3 останутся в силе, если в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств.

5. Доказательство теоремы 1. Теперь получим формулу для величины $\underline{R}$, которая потребуется для доказательства теоремы 1, т.е. для нахождения величин $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$. Верна следующая лемма.

Лемма 3. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции f , определенной на множестве $[0, 1]^9$, выполнены следующие равенства:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \overline{R} = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\underline{R} \leq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$$

(в силу тех же соображений, с помощью которых в лемме 2 устанавливается неравенство $\underline{R} \leq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$). Далее, без ограничения общности можно считать, что $S_3 \subset \Omega_{18}$, поэтому $\Lambda_6 \subset \Lambda_{18}$. В силу леммы 2 и конечности S_3 получаем, что

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \\ &\geq \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geq \underline{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Аналогично с помощью леммы 1 получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) \leq \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \\ &\leq \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \overline{R}, \end{aligned}$$

поэтому $\overline{R} = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$, что завершает доказательство леммы 3.

Далее, упомянем результат, который не будет использоваться в дальнейшем, хотя и представляет определенный интерес.

З а м е ч а н и е 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция f непрерывна. Тогда для любого числа a такого, что $a \in [\underline{R}, \overline{R}]$, существует такая тройка мер $\vec{\mu} \in \Lambda_{18}$, что $\max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = a$.

Далее, для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Пусть Ω не более, чем счетно, $\Sigma = 2^\Omega$, пусть $\bigsqcup_{i=1}^3 C_i^{\text{opt}} = \Omega$ и на множестве C_i^{opt} мера μ_i не меньше других мер, т.е.

для любого $\omega \in C_i^{\text{opt}}$ выполняется соотношение $\mu_i(\omega) \geq \max_j \mu_j(\omega)$. Тогда

$$\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{\text{opt}}).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого разбиения C_i , $1 \leq i \leq 3$, $\sqcup C_i = \Omega$, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) \leq \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{\text{opt}})$. Положим $D_{ij} := C_i^{\text{opt}} \cap C_j$, $x_{ij}^k := \mu_k(D_{ij})$. Тогда

$$\sum_{j=1}^3 \mu_j(C_j) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_j(D_{ij}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x_{ij}^j \leq \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^i,$$

так как из определения C_i^{opt} следует, что $x_{ij}^i \geq x_{ij}^j$. Далее,

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_i(D_{ij}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^i,$$

поэтому $\sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) \leq \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{\text{opt}})$, что завершает доказательство леммы 4.

Доказательство. Докажем, что для любых C_j , $1 \leq j \leq 3$, таких, что $\sqcup C_j = \Omega$ следует, что $\sum_{j=1}^3 \mu_j(C_j) \leq \sum_{j=1}^3 \mu_j(C_j^{00})$. Введем $D_{ij} = C_i^{\text{opt}} \cap C_j$, $\mu_k(D_{ij}) = x_{ij}^k$. Тогда $\sum_{j=1}^3 \mu_j(C_j) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_j(D_{ij}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x_{ij}^j \leq \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x_{ij}^i$ так как из определения C_i^{opt} следует, что $x_{ij}^i \geq x_{ij}^j$. Но $\sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_i(D_{ij}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^i$, что завершает доказательство леммы 4.

Теперь докажем теорему 1, получив удобные формулы для величин

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{\tau})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i), \quad \overline{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{\tau})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i).$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. В силу леммы 3 в этом случае

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i), \quad \overline{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i).$$

Заметим, что множества $C_i^* = \sqcup_{m=1}^3 (\omega_{ijk}^m \sqcup \omega_{ikj}^m)$ (для $(ijk) \in S_3$) подходят в качестве C_i^{opt} для любой тройки мер $\vec{\mu} \in \Lambda_{18}$ (в силу определения Λ_{18}). Например, для ω_{123}^m , $1 \leq m \leq 3$, имеем $\mu_1(\omega_{123}^m) \geq \mu_2(\omega_{123}^m) \geq \mu_3(\omega_{123}^m)$.

Поэтому в силу леммы 4

$$\begin{aligned} \underline{R}^+ &= \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^*), \\ \overline{R}^+ &= \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^*). \end{aligned}$$

В силу биективности отображения ϕ_{18} , используя обозначения для векторов из N_{18} , получаем

$$\begin{aligned}\underline{R}^+ &= \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^*) = \inf_{\vec{x} \in N_{18}} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 (x_{ijk}^{(i),m} + x_{ikj}^{(i),m}) \right), \\ \overline{R}^+ &= \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^*) = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 (x_{ijk}^{(i),m} + x_{ikj}^{(i),m}) \right)\end{aligned}$$

для $(ijk) \in S_3$. Пусть $x_\sigma^{(i)} := \sum_m x_\sigma^{(i),m}$. Несложно проверить, что в новых обозначениях задача о нахождении $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$ переписывается следующим образом:

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{x} \in N_6} \sum_{i=1}^3 (x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)}), \quad \overline{R}^+ = \sup_{\vec{x} \in N_6} \sum_{i=1}^3 (x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)}).$$

Напомним, что множество N_6 задается системой из соотношений (7), (9), а также шестью парами неравенств:

$$x_\sigma^{(\sigma_1)} \geq x_\sigma^{(\sigma_2)} \geq x_\sigma^{(\sigma_3)}, \quad \sigma \in S_3.$$

Введем новые переменные $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$ следующим образом: $x_\sigma^{(\sigma_1)} = x_\sigma^{(\sigma_2)} + \delta_\sigma(\vec{x})$, $x_\sigma^{(\sigma_2)} = x_\sigma^{(\sigma_3)} + \varepsilon_\sigma(\vec{x})$, $x_\sigma^{(\sigma_3)} = t_\sigma(\vec{x})$, $\sigma \in S_3$, причем в дальнейшем вместо $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$ будем писать ε_{ijk} , δ_{ijk} , t_{ijk} соответственно. В новых переменных множество N_6 описывается условиями

$$2r_{12} = \delta_{123} + \varepsilon_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{312} + \delta_{213} + \varepsilon_{231} + \delta_{231} + \varepsilon_{321}, \quad (10)$$

$$2r_{13} = \varepsilon_{123} + \delta_{123} + \delta_{132} + \varepsilon_{213} + \delta_{312} + \varepsilon_{321} + \delta_{321} + \varepsilon_{231}, \quad (11)$$

$$2r_{23} = \varepsilon_{213} + \delta_{213} + \delta_{231} + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{312} + \delta_{312} + \delta_{321} + \varepsilon_{132}, \quad (12)$$

$$1 = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{123} + \delta_{123} + \varepsilon_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{213} + \varepsilon_{312}, \quad (13)$$

$$1 = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{213} + \delta_{213} + \varepsilon_{231} + \delta_{231} + \varepsilon_{321}, \quad (14)$$

$$1 = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{132} + \varepsilon_{231} + \varepsilon_{312} + \delta_{312} + \varepsilon_{321} + \delta_{321}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ijk} \geq 0, \quad \delta_{ijk} \geq 0, \quad t_{ijk} \geq 0. \quad (16)$$

При этом $\underline{R}^+ = \min_{N_6} (\sum_{\sigma \in S_3} (t_\sigma + \varepsilon_\sigma + \delta_\sigma))$. Положим $t = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma$, $\varepsilon = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma$, $\delta = \sum_{\sigma} \delta_\sigma$. Сложив (10)–(12), а также (13)–(15), получим $2\varepsilon + 2\delta = 2(r_{12} + r_{13} + r_{23})$ и $3t + 2\varepsilon + \delta = 3$ соответственно. Значит, $\underline{R}^+ = \min_{N_6} (t + \varepsilon + \delta)$. Учитывая (16), получаем, что

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{3} (r_{12} + r_{13} + r_{23}) &= \frac{1}{3} (3 + r_{12} + r_{13} + r_{23}) \\ &= \frac{1}{3} (3t + 2\varepsilon + \delta + \varepsilon + \delta) \leq t + \varepsilon + \delta.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} t + \varepsilon + \delta &\leq \frac{1}{3} (3t + 2\varepsilon + \delta + 2(\varepsilon + \delta)) = \frac{1}{3} (3 + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23})) \\ &= 1 + \frac{2}{3} (r_{12} + r_{13} + r_{23}). \end{aligned}$$

Далее, несложно видеть, что $\overline{R}^+ = \max_{N_6}(t + \varepsilon + \delta)$. Таким образом, нами доказано следующее предложение.

Предложение 1. При выполнении условий теоремы 1 верны следующие неравенства:

$$1 + \frac{1}{3} (r_{12} + r_{13} + r_{23}) \leq \underline{R}^+ \leq \overline{R}^+ \leq 1 + \frac{2}{3} (r_{12} + r_{13} + r_{23}).$$

Далее, положим $\delta_i = \delta_{ikl} + \delta_{ilk}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{kli} + \varepsilon_{lki}$, $(ikl) \in S_3$. Получаем, что теперь задача сводится к следующей: множество $K \subset \mathbf{R}^7$, состоящее из наборов чисел $(t, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, задано следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (\delta_k + \varepsilon_k) + (\delta_l + \varepsilon_l) &= 2r_{kl}, \quad k < l, \\ 1 &= t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l, \quad (ikl) \in S_3, \quad k < l, \\ 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \delta_i \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

Нужно найти $\underline{R}^+ = \min_K(t + \sum_{i=1}^3(\delta_i + \varepsilon_i))$ и $\overline{R}^+ = \max_K(t + \sum_{i=1}^3(\delta_i + \varepsilon_i))$. Но $r_{12} + r_{13} + r_{23} = (\delta_i + \varepsilon_i) + (\delta_k + \varepsilon_k) + (\delta_l + \varepsilon_l) = 2r_{kl} + (\delta_i + \varepsilon_i)$. Значит, множество $K \subset \mathbf{R}^7$ задается условиями

$$\delta_i + \varepsilon_i = r_{12} + r_{13} + r_{23} - 2r_{kl} =: r_i, \quad (ikl) \in S_3, \quad k < l, \quad (17)$$

$$1 = t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l, \quad (ikl) \in S_3, \quad k < l, \quad (18)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \delta_i \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

При этом в (17) $r_i = r_{12} + r_{13} + r_{23} - 2r_{kl} \geq 0$ по неравенству треугольника. Однако $\varepsilon + \delta = r_{12} + r_{13} + r_{23}$, поэтому $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \min_K t$ и, аналогично, $\overline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_K t$.

Упростим задачу, выразив все через ε_i , $1 \leq i \leq 3$. Из (18) следует, что $1 + \varepsilon_i = 1 + t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon_i$, поэтому $\varepsilon_i - \delta_i$ не зависит от i , т.е. $\delta_1 - \varepsilon_1 = \delta_i - \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq 3$. Но $\delta_i + \varepsilon_i = r_i$, поэтому $\delta_i = \delta_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_i = (r_1 - \varepsilon_1) - \varepsilon_1 + \varepsilon_i$, значит, $\delta_i = r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1$. Поэтому $r_i = \delta_i + \varepsilon_i = (r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1) + \varepsilon_i$, откуда $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + (r_i - r_1)/2$. Далее, учтем, что $\varepsilon_i \in [0, 1]$ и что $\delta_i = r_i - \varepsilon_i \in [0, 1]$. Тогда $0 \leq \varepsilon_i \leq \min(r_i, 1)$ и $\delta_i \leq 1$. При этом $t = 1 - \delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 1 - (r_1 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ (и в силу равенства $t = 1 - \delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ получаем, что t будет не больше единицы при неотрицательных δ_i и ε_i). Получаем, что теперь необходимо решить

следующую задачу: $0 \leq \varepsilon_i \leq \min(r_i, 1)$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1 &\leq 1, & 1 \leq i \leq 3, \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2}, & 1 \leq i \leq 3, \\ t &= 1 - r_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \rightarrow \text{extr.} \end{aligned}$$

Выразим все через переменную ε_1 и сведем задачу к такой:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 - r_i}{2} &\leq \varepsilon_1 \leq \frac{r_1 + r_i}{2}, & \varepsilon_1 &\geq \frac{r_1 + r_i}{2} - 1, & \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2} &\leq 1, & 1 \leq i \leq 3, \\ t &= 1 - r_1 + \varepsilon_1 - \left(\varepsilon_1 + \frac{r_2 - r_1}{2} + \varepsilon_1 + \frac{r_3 - r_1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \varepsilon_1 \rightarrow \text{extr}, & t &\geq 0. \end{aligned}$$

Подведем итог: для того, чтобы выполнялось условие $\vec{x} \in N_6$, необходимо, чтобы построенное по данному $\vec{x}$ число ε_1 удовлетворяло следующим условиям:

$$\begin{aligned} \max_i \max \left(\frac{r_1 - r_i}{2}, \frac{r_1 + r_i}{2} - 1 \right) &\leq \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 &\leq \min_i \min \left(\frac{r_1 + r_i}{2}, 1 + \frac{r_1 - r_i}{2}, 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

И в рамках данных ограничений на ε_1 требуется найти экстремум выражения $1 - (r_2 + r_3)/2 - \varepsilon_1 \rightarrow \text{extr}$. Более того, несложно видеть (так как t и все δ_j выражаются через ε_i , а все ε_i выражаются через ε_1), что если ε_1 , удовлетворяющее таким условиям, найдется, то по нему можно будет построить вектор из N_6 .

Начиная с этого момента, без ограничения общности будем считать, что $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ (это возможно, так как функционал f инвариантен относительно перестановок мер). Другими словами, будем считать, что изначально меры были перенумерованы так, чтобы выполнялось соотношение $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Тогда (19) равносильно тому, что $\max((r_1 - r_3)/2, r_1 - 1) \leq \varepsilon_1 \leq \min(\frac{1}{2}(r_1 + r_3), 1, 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3))$. Однако $\frac{1}{2}(r_1 + r_3) = r_{13} \leq 1$, поэтому $2 - r_3 \geq r_1$, откуда $r_1 - r_3 \geq 2r_1 - 2$. Значит, $\frac{1}{2}(r_1 - r_3) \geq r_1 - 1$. Кроме того, $r_{13} = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) \leq 1$, поэтому (19) равносильно тому, что $\varepsilon_1 \in [\frac{1}{2}(r_1 - r_3), \min(\frac{1}{2}(r_1 + r_3), 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3))]$. Отметим, что данное множество непусто, так как $\frac{1}{2}(r_1 - r_3) \leq 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$ в силу того, что $r_{12} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \leq 1$. Ранее мы получили, что $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \min_K t$ и $\overline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_K t$, при этом $t = 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3) - \varepsilon_1$, значит, $\overline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3) - \frac{1}{2}(r_1 - r_3)$ и, аналогично, $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3) - \min(\frac{1}{2}(r_1 + r_3), 1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3))$.

Поэтому (так как $-\min_Z x = \max_Z(-x)$)

$$\begin{aligned}\underline{R}^+ &= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} + \max\left(-\frac{r_1 + r_3}{2}, \frac{r_2 + r_3}{2} - 1\right) \\ &= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} + \max(-r_{13}, r_{23} - 1) \\ &= \max(1 + r_{12}, r_{12} + r_{13} + r_{23}).\end{aligned}$$

Далее, так как $r_1 \geq r_2 \geq r_3$, то $r_{12} + r_{13} - r_{23} \geq r_{12} + r_{23} - r_{13} \geq r_{13} + r_{23} - r_{12}$, поэтому $r_{12} \geq r_{13} \geq r_{23}$. Окончательно имеем $\underline{R}^+ = \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23}))$. Наконец,

$$\begin{aligned}\overline{R}^+ &= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \frac{r_1 - r_3}{2} \\ &= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} - \frac{(r_{12} + r_{13} - r_{23}) - (r_{13} + r_{23} - r_{12})}{2} \\ &= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} - (r_{12} - r_{23}) \\ &= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}).\end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $\underline{R}^+ = \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23}))$ и $\overline{R}^+ = 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13})$, предполагая, что меры перенумерованы так, чтобы выполнялось соотношение $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Однако очевидно, что если вернуть мерам исходный порядок, то полученные формулы для $\underline{R}^+$ и для $\overline{R}^+$ не изменятся. Таким образом, доказано, что если $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$, $\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$, $\overline{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}\underline{R}^+ &= \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23})), \\ \overline{R}^+ &= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}).\end{aligned}$$

Таким образом, теорема 1, сформулированная во введении, доказана.

Пример 1. При $r_{ij} = r$ выражения для $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$ принимают совсем простой вид: $\underline{R}^+ = \max(1 + r, 3r)$, $\overline{R}^+ = 1 + 2r$.

Замечание 2. Теорема 1 была доказана с помощью леммы 3, которая опирается на лемму 1. Таким образом, доказательство теоремы 1 опирается на результаты, верные для произвольной функции f . Несложно показать, что условия теоремы 1 можно ослабить и требовать наличие лишь 6 непересекающихся множеств в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) . Для этого нужно доказывать теорему 1 не с помощью ссылки на общий случай, а «напрямую» (однако в этом случае доказательство уже не будет применимо к произвольной f). В самом деле, лемма 4 легко обобщается на случай произвольного Ω , вследствие чего

рассуждения, аналогичные лемме 2, позволяют свести задачу о нахождении $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$ к задаче о поиске экстремума по множеству Λ_6 , которая решена выше.

З а м е ч а н и е 3. Предъявим набор мер, на которых достигается экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$. Нам потребуется новое обозначение. Перенумеруем три числа r_{12}, r_{13}, r_{23} в порядке неубывания: $r^{(1)} \leq r^{(2)} \leq r^{(3)}$, $\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\}$. Далее, рассмотрим тройку $\vec{\mu}^*$ мер на $(S_3, 2^{S_3})$, заданную с помощью таблицы 1. В силу непосредственной проверки можно убедиться, что тройка $\vec{\mu}^*$ является $\vec{r}$ -согласованной (при этом $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$). Далее, если $\varepsilon_1 = r^{(3)} - r^{(1)}$, то $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \overline{R}^+$. Если же $\varepsilon_1 = \min(r^{(2)}, 1 - r^{(1)})$, то $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \underline{R}^+$. Отметим, что в силу леммы 4 в обоих случаях $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i^*)$ (множества C_i^* , $1 \leq i \leq 3$, определены в таблице 1).

Таблица 1. Меры, на которых достигается экстремум.

	σ	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*
C_1^*	(123)	$1 - r^{(1)} - \varepsilon_1$	$1 - r^{(1)} - \varepsilon_1$	$1 - r^{(1)} - \varepsilon_1$
	(132)	$r^{(3)} + r^{(2)} - r^{(1)} - \varepsilon_1$	0	0
C_2^*	(213)	$r^{(1)} - r^{(3)} + \varepsilon_1$	$r^{(1)} - r^{(3)} + \varepsilon_1$	0
	(231)	0	$r^{(3)} - \varepsilon_1$	0
C_3^*	(312)	$r^{(1)} - r^{(2)} + \varepsilon_1$	0	$r^{(1)} - r^{(2)} + \varepsilon_1$
	(321)	0	ε_1	$r^{(2)}$

Таким образом, мы предъявили набор мер, на которых достигается экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}^+$ и $\overline{R}^+$.

6. Случай, когда количество мер больше трех. Несложно видеть, что результаты лемм 1 и 2 переносятся (с естественными изменениями) и на случай произвольного количества мер. А именно: пусть M — множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ) . Для любых n вероятностных мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения $n \geq 3$ простых гипотез H_i : наблюдение ξ имеет распределение μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Каждому нерандомизированному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ пространства Ω ($C_i: \bigsqcup_{i=1}^n C_i = \Omega$, если наблюдение $\xi \in C_i$, то принимается гипотеза H_i , $i = 1, 2, \dots, n$) и вероятности $\mu_j(C_k)$ принятия гипотезы H_k в случае, когда верна гипотеза H_j , $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Совокупность всех разбиений Ω на n непересекающихся измеримых подмножества обозначим $\mathcal{C}(\Omega)$. Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим набор $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим

$(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), \dots, \mu_n(C_n)) \in \mathbf{R}^{n^2}$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbf{R}$; иногда будет использоваться обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^n)$. Фиксируем такие числа $r_{ij} = r_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, что $0 \leq r_{ij} \leq 1$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $r_{ij} + r_{jl} \geq r_{il}$, $1 \leq i, j, l \leq n$, $i \neq j \neq l \neq i$. Рассмотрим семейство всевозможных наборов из n вероятностных мер на Σ , между которыми заданы попарные расстояния по вариации: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leq i < j \leq n$. Будем называть такие наборы мер $\vec{r}$ -согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Получим удобные выражения для чисел $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$.

Для этого, как и ранее, построим множества $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ с помощью теоремы Хана. Заметим, что число множеств вида $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ равно $n!$. Далее, введем множество S_n перестановок индексов множеств $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ совершенно аналогично введению множества S_3 . Множество $\Lambda_{n!}$ строится так же, как и множество Λ_6 , и с помощью отображения $\phi_{n!}$ конструируется множество $N_{n!}$. Далее, множество $\Lambda_{n \cdot n!}$ строится по аналогии с множеством Λ_{18} . С помощью отображения $\phi_{n \cdot n!}$ конструируется множество $N_{n \cdot n!}$. Тогда, повторяя рассуждения лемм 1 и 2 с естественными изменениями, получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n \cdot n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции $f: [0, 1]^{n^2} \rightarrow \mathbf{R}$ выполнены следующие равенства:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_{n!}} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_n)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_{\sigma}^{(j)}\right\}_{j,k=1}^n\right), \quad \bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{n \cdot n!}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma}^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^n\right).$$

Заметим, что для доказательства обобщения леммы 1 нам потребуется предположение о том, что в Σ есть по меньшей мере $n \cdot n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств, а для доказательства обобщения леммы 2 достаточно и наличия $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств в Σ .

Далее, теорема 3 (аналогично теореме 2) может быть легко обобщена (с естественными изменениями) на случай произвольного количества мер.

Теперь покажем, что решение экстремальной задачи в классе мер без атомов может качественно отличаться от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается (и $\Omega \neq \emptyset$), притом даже в тех случаях, когда функция f качества критерия непрерывна. Для этого рассмотрим величину

$$\underline{L} := \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} h_2(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \min_{i \neq j} (\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j))$$

(см. раздел «Обсуждение»). Заметим, что функция $h_2: [0, 1]^{n^2} \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна. Далее, известен (см. [5, с. 67]) следующий факт: каким бы ни был набор из n непрерывных мер, всегда найдется такое разбиение $\vec{C}^*$, для которого выполняется соотношение $\mu_i(C_i^*) - \mu_i(C_j^*) \geq 0$ при всех $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, т.е. $h_2(\vec{\mu}(\vec{C}^*)) \geq 0$. Отсюда следует, что для любого набора чисел $\{r_{ij}\}$, $1 \leq i < j \leq n$, выполняется соотношение $\underline{L} \geq 0$ (в классе мер без атомов).

Теперь рассмотрим случай, когда $\Omega \neq \emptyset$ (т.е. когда в σ -алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере одно непустое множество) и $n \geq 2$. Так как $\Omega \neq \emptyset$, то существует $\omega_0 \in \Omega$. Пусть $r_{ij} = 0$ для всех $1 \leq i < j \leq N$. Рассмотрим набор из n мер на Ω , заданных следующим условием: $\mu_i(A) = 1$ при $1 \leq i \leq n$ и при любых таких $A \in \Sigma$, что $\omega_0 \in A$. Несложно видеть, что каким бы ни было разбиение $\vec{C}$, элемент ω_0 попадет ровно в одно из множеств $C_1, C_2, \dots, C_n$. Отсюда следует, что в данном случае $\underline{L} = -1$. Таким образом, существуют непрерывные функции f качества критерия, для которых решение экстремальной задачи для $\underline{R}$ (в случае с n мерами) в классе мер без атомов (более узком) качественно отличается от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается (и $\Omega \neq \emptyset$).

7. Результаты для случая с рандомизацией. Пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathbb{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ — статистическая модель, причем $\Theta = \{1, 2, 3\}$ и пространство D решений совпадает с множеством Θ , функция потерь $L(\theta, d) = \mathbb{I}_{\theta \neq d}$, функция $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ задает рандомизированный критерий ($\phi_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$ измеримы для каждого $1 \leq i \leq 3$ и $\sum_{i=1}^3 \phi_i = 1$) следующим образом: $\phi_i(\omega)$ — это вероятность принять решение под номером i , если происходит ω . Множество таких критериев обозначим Φ , а множество нерандомизированных критериев обозначим Φ^* . В «рандомизированном» случае байесовский риск p , соответствующий равномерному распределению на Θ , равен $\inf_{\phi \in \Phi} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i}(1 - \phi_i)$. Удобнее рассматривать величину $\bar{a} := 1 - p = \sup_{\phi \in \Phi} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$. Далее, пусть $\bar{a}^* = \sup_{\phi \in \Phi^*} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$. Ниже мы покажем, что $\bar{a} = \bar{a}^*$, откуда следует, что наилучшаемой оценкой величины $\bar{a}$ является $\bar{R}^+$ (в силу того, что наилучшаемой оценкой для величины $\bar{a}^*$ является $\bar{R}^+$). Верна следующая теорема.

Теорема 5. *Выполнены следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i &= \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \bar{R}^+, \\ \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i &= \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \underline{R}^+. \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем тройку мер $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$ и $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \Phi$. Пусть $\mu := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mu_i$ и $\mathfrak{z}_i := d\mu_i/d\mu$. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}} \phi_i d\mu_i = \int_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^3 \phi_i \mathfrak{z}_i d\mu \leq \int_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^3 \phi_i \left(\max_j \mathfrak{z}_j \right) d\mu = \int_{\mathbf{R}} 1 \left(\max_j \mathfrak{z}_j \right) d\mu. \quad (20)$$

Если $\phi_i \mathfrak{z}_i = \phi_i (\max_j \mathfrak{z}_j)$, т.е. $\phi_i (\mathfrak{z}_i - \max_j \mathfrak{z}_j) = 0$, то в предыдущей формуле достигается равенство. Пусть

$$C_1 := \{ \max_j \mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_1 \}, \quad C_2 := \{ \max_j \mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_2 \} \cap (\Omega \setminus C_1), \\ C_3 := (\Omega \setminus C_1) \setminus C_2, \quad \hat{\phi}_i(\omega) := I_{C_i}(\omega).$$

Несложно показать, что $\hat{\phi}_i (\mathfrak{z}_i - \max_j \mathfrak{z}_j) = 0$. Таким образом, при $\phi_i = \hat{\phi}_i$ неравенство (20) переходит в равенство (причем функции $\hat{\phi}_i$ принимают только значения 0 и 1). Следовательно, $\hat{\phi} := (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3) \in \Phi^* \subset \Phi$ и $\sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}} \phi_i d\mu_i = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_i d\mu_i$. Поэтому $\sup_{\phi \in \Phi} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \sup_{\phi \in \Phi^*} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$ (т.е. $\bar{a} = \bar{a}^*$). Значит,

$$\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i, \\ \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i.$$

Осталось заметить, что

$$\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \bar{R}^+, \\ \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \underline{R}^+$$

по определению множества Φ^* . Значит,

$$\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \bar{R}^+, \\ \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\phi \in \Phi^*} \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_{P_i} \phi_i = \underline{R}^+,$$

что и требовалось. Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 5 очевидным образом обобщается на случай произвольного конечного числа мер.

З а м е ч а н и е 5. Теорема 5 доказывает, что в случае, когда под функцией качества критерия понимается сумма вероятностей ошибок, рандомизация не позволяет улучшить оптимальный нерандомизированный критерий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность, т. 1. М.: МНЦМО, 2004, 575 с.
2. *Гуциш А. А.* О лемме Фано и аналогичных неравенствах для минимаксного риска. — Теорія імовір. та матем. статист., 2002, № 67, с. 26–37.
3. *Birge L.* A new look at an old result: Fano's lemma. — Prepublication n^o 632 du Labotatoire de Probabilites & Modeles Aleatoires, Univesites de Paris 6 & 7, January 2001.
4. *Elton J., Hill T. P., Kertz R.* Optimal-partitioning inequalities for nonatomic probability measures. — Trans. Amer. Math. Soc., 1986, v. 296, № 2, p. 703–725.
5. *Robertson J., Webb W.* Cake-cutting Algorithms. Be Fair, if You Can. Natick: Massachusetts, 1998.
6. *Fano R. M.* Class notes for transmission of information, Course 6.574. Cambridge, MA: MIT, 1952.
7. *Thompson W.* Fair allocation rules. — University of Rochester, working paper No. 539, December 2007.
8. *Hill T. P.* Partitioning inequalities in probability and statistics. — Stochastic Inequalities, 1993, v. 22, p. 116–132.
9. *Ben-Bassat M.* f -Entropies, probability of error, and feature selection. — Inform. Contr., 1978, v. 39, p. 227–242.
10. *Golic J.* On the relationship between the information measures and the Bayes probability of error. — J. IEEE Transac. Inform. Theory, 1987, v. 33, № 5, p. 681–693.
11. *Golic J.* On the Relationship Between the Separability Measures and the Bayes Probability of Error. — J. IEEE Transac. Inform. Theory, 1987, v. 33, № 5, p. 694–701.

Поступила в редакцию
27.X.2015