Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Рыбаков, Об асимптотической оптимальности байесовского решающего правила в задаче множественной классификации гипотез, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 768–773

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:36:17

В заключение хочется выразить искреннюю признательность В. И. Питербаргу и Ю. Н. Тюрину за помощь и поддержку в написании этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piterbarg V. I., Tyurin Y. N.* Testing for homogeneity of two multivariate samples: a Gaussian field on a sphere. — *Math. Methods Statist.*, 1993, v. 2, № 2, p. 147–164.
2. *Piterbarg V. I., Tyurin Y. N.* A Multidimensional Rank Correlation: A Gaussian Field on a Torus. — Technical Report № 482, Center for stochastic processes, 1996.
3. *Десро́й Л., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности L_1 -подход. М.: Мир, 1988, 407 с.
4. *Hall P.* Cross-validation in density estimation. — *Biometrika*, 1982, v. 69, p. 383–390.
5. *Rudemo M.* Empirical choice of histograms and kernel density estimators. — *Scand. J. Statist.*, 1982, v. 9, № 2, p. 65–78.
6. *Bowman A. W.* A comparative study of some kernel-based nonparametric density estimators. — Manchester-Sheffield School of Probability and Statistics, Research Report № 84/AWB/1, 1982.
7. *Stone C. J.* An asymptotically optimal window selection rule for kernel density estimates. — *Ann. Statist.*, 1984, v. 12, p. 1285–1297.

Поступила в редакцию
2.III.2000

© 2000 г.

РЫБАКОВ А. С.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ БАЙЕСОВСКОГО РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА В ЗАДАЧЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ГИПОТЕЗ

В статье рассматривается задача построения k -элементного решающего множества для совокупности из m гипотез о виде полиномиального распределения. В статье Н. П. Салихова [3] были получены оценки сверху и снизу для асимптотики максимума логарифмов вероятностей ошибок i -го рода, т.е. вероятностей того, что построенное оптимальным образом k -элементное решающее множество индексов не содержит индекс i при условии, что i — номер истинной гипотезы. В настоящей работе устанавливается совпадение этих оценок и тем самым придается некоторая завершенность результату Н. П. Салихова. При этом неявно предполагается, что априорное распределение на множестве m гипотез — равномерное, и попутно устанавливается асимптотическая оптимальность байесовского метода построения решающего множества.

Ключевые слова и фразы: множественная классификация гипотез, максимум вероятностей ошибок i -го рода, байесовское решающее множество.

1. Введение. Пусть $r \geq 2$, $m \geq 2$, $1 \leq k < m$; r, m, k фиксированы. Через $\mathbf{x}$ мы ниже будем обозначать вектор $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$.

Пусть

$$\Omega = \{\mathbf{x}: x_j \geq 0 \text{ для всех } j; \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\},$$

$$\Omega_+ = \{\mathbf{x}: x_j > 0 \text{ для всех } j\}, \quad \Lambda = \left\{ \mathbf{x}: \sum x_j = 1 \right\}$$

* ФАПСи, ул. Самотечная, 9, Москва, Россия.

(если индекс суммирования не указан, суммирование производится по $j = 1, \dots, r$). В работе Н. П. Салихова [3] рассматривалась следующая статистическая задача.

Пусть заданы $m \geq 2$ попарно различных вероятностных распределений $\mathbf{p}_i \in \Omega_+ \cap \Lambda$. Одно из распределений, $\mathbf{p}_t$, — истинное (априори неизвестно, какое). Для оценки числа t проводится серия из n независимых испытаний, в результате которой наблюдается значение случайного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \quad (\xi_i \text{ — число выпадений } i\text{-го исхода}),$$

имеющего полиномиальное распределение с параметрами $(n; \mathbf{p}_i)$.

Фиксируем k , $1 \leq k < m$. Пусть F — произвольное отображение, ставящее в соответствие всевозможным значениям $\mathbf{x}$ вектора ξ k -элементные подмножества $F(\mathbf{x}) \subseteq \{1, \dots, m\}$. Случайное множество $F(\xi)$ назовем k -элементным решающим множеством для числа t (см. [1, гл. 3, § 5]).

С множеством $F(\xi)$ связан вектор ошибок $(\alpha_{k,i}(n|F): i = 1, \dots, m)$; $\alpha_{k,i}(n|F)$ — ошибка i -го рода, т.е. вероятность того, что $i \notin F(\xi)$ при условии $t = i$.

Пусть $\alpha_k(n|F) = \max\{\alpha_{k,i}(n|F): i = 1, \dots, m\}$. Требуется найти «хорошую» оценку снизу для $\alpha_k(n|F)$ при больших n и указать «оптимальное» решающее множество, для которого такая оценка достигается.

Заметим, что эта задача является естественным обобщением классической задачи об r -гранной игральной кости, см. [1, гл. 6, § 4].

Пусть

$$\bar{b}_k(F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{-1} \ln \alpha_k(n|F) \right); \quad \underline{b}_k(F) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{-1} \ln \alpha_k(n|F) \right);$$

$B(\xi)$ — решающее множество, построенное методом Байеса при равных априорных вероятностях гипотез $\{t = i\}$.

В работе [3] было показано, что для некоторых $\underline{b}_k > 0$, $\bar{b}_k < \infty$, не зависящих от F и вычисляемых в явном виде с помощью обобщенных расстояний Чернова, справедливы неравенства $\bar{b}_k(F) \leq \bar{b}_k$ (F — любое), $\underline{b}_k(B) \geq \underline{b}_k$. (Наши обозначения, вообще говоря, не совпадают с обозначениями работы [3]. Паре $(\underline{b}_k, \bar{b}_k)$ можно поставить в соответствие пару $(\bar{\rho}_k, \rho_k)$ из [3]; при этом будут справедливы соотношения $\underline{b}_k \leq \bar{\rho}_k \leq \underline{b}_k(B) \leq \rho_k = \bar{b}_k$). Если $\underline{b}_k = \bar{b}_k$ (это так, например, при $k = 1$), то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \ln \alpha_k(n|B) \right) = \underline{b}_k(B) = \bar{b}_k(B) = \underline{b}_k = \bar{b}_k$$

и множество $B(\xi)$ оптимально в указанном выше смысле.

Вопрос о равенстве $\underline{b}_k \stackrel{?}{=} \bar{b}_k$ за исключением ряда частных случаев оставался нерешенным. Доказательство этого равенства и является целью нашей работы.

2. Подготовительная часть. Пусть $\mathbf{p}_i = (p_{i,j}: j = 1, \dots, r)$. По условию все эти распределения попарно различны. Пусть $H(\mathbf{x}) = \sum x_j \ln x_j$ (соглашение: $x \ln x|_{x=0} = 0$); $L_i(\mathbf{x}) = \sum x_j \ln p_{i,j}$; $H_i(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - L_i(\mathbf{x})$. Величина $H_i(\mathbf{x})$ называется расстоянием Кульбака–Лейблера между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}_i$. Ниже мы будем использовать следующий фундаментальный факт [2, гл. 2, § 21]:

$$H_i(\mathbf{x}) > 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Omega \cap \Lambda, \mathbf{x} \neq \mathbf{p}_i. \quad (\text{КЛ})$$

Следуя работе [3], введем ряд объектов, задающих явный вид чисел $\underline{b}_k$ и $\bar{b}_k$ ($\#A$ — число элементов множества A):

а) $\mathcal{I}_t = \{I \subseteq \{1, \dots, m\}: \#I = k; t \notin I\}$;

б) $\Omega(I|t) = \{\mathbf{x} \in \Omega: L_i(\mathbf{x}) \geq L_t(\mathbf{x}) \text{ для всех } i \in I\}$, $\Omega_+(I|t) = \{\mathbf{x} \in \Omega: L_i(\mathbf{x}) > L_t(\mathbf{x}) \text{ для всех } i \in I\}$ (условие: $I \in \mathcal{I}_t$); заметим, что $L_i(\mathbf{p}_t) - L_t(\mathbf{p}_t) = -H_i(\mathbf{p}_t)$, так что $\mathbf{p}_t \notin \Omega(I|t)$ по свойству (КЛ);

в) $\langle t \rangle = \{I: \Omega(I|t) \neq \emptyset\}$, $\langle t \rangle_+ = \{I: \Omega_+(I|t) \neq \emptyset\}$;

г) $\mu(I|t) = \min\{H_i(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \Omega(I|t) \cap \Lambda\}$ (условие: $I \in \langle t \rangle$); множество $\Omega(I|t) \cap \Lambda$ компактно и не содержит $\mathbf{p}_t$, отсюда $0 < \mu(I|t) < \infty$ по свойству (КЛ);

и $\underline{b}_{k,t} = \min\{\mu(I|t): I \in \langle t \rangle\}$ (условие: $\langle t \rangle \neq \emptyset$); $\bar{b}_{k,t} = \min\{\mu(I|t): I \in \langle t \rangle_+\}$ (условие: $\langle t \rangle_+ \neq \emptyset$); согласно работе [3], справедливы неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \ln \alpha_{k,t}(n|B) \right) \leq \bar{b}_{k,t} \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \ln \alpha_{k,t}(n|B) \right) \geq \underline{b}_{k,t}, \quad (1)$$

т.е. числа $\bar{b}_{k,t}$ и $\underline{b}_{k,t}$ определяют соответственно верхнюю и нижнюю границы для множества предельных точек логарифмов байесовских индивидуальных ошибок t -го рода, взятых с коэффициентом $-1/n$.

Числа $\underline{b}_k$ и $\bar{b}_k$ имеют следующий вид: $\underline{b}_k = \min\{\underline{b}_{k,t}: \langle t \rangle \neq \emptyset\}$, $\bar{b}_k = \min\{\bar{b}_{k,t}: \langle t \rangle_+ \neq \emptyset\}$. Используя индукцию, нетрудно показать (см. также [3]), что $\#\{t: \langle t \rangle_+ \neq \emptyset\} \geq m - k \geq 1$, поэтому числа $\underline{b}_k$ и $\bar{b}_k$ определены корректно.

Прежде чем приступить к доказательству равенства $\underline{b}_k = \bar{b}_k$, заметим, что если бы во всех случаях было $\langle t \rangle = \langle t \rangle_+$, то интересующий нас вопрос решался бы тривиально. (При $k = 1$ справедливость этого равенства вытекает из свойства (КЛ). При $k > 1$ оно установлено в [3] для ряда частных случаев и сформулировано в виде гипотезы в замечании 7.) Следующий пример показывает, что это не так.

Пусть $r = 3$, $m = 3$, $k = 2$, $t = 1$, $\mathbf{p}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{4-2\sqrt{2}}{4})$, $\mathbf{p}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4})$, $\mathbf{p}_3 = (\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Тогда, как легко проверить, $\langle t \rangle = \mathcal{S}_t$, а $\langle t \rangle_+ = \emptyset$.

В п. 3 мы приведем даже более сильный пример, когда $\langle t \rangle_+ \neq \emptyset$, но «индивидуальные границы» $\underline{b}_{k,t}$ и $\bar{b}_{k,t}$ различны.

В следующей теореме содержится корректная формулировка принципа, из которого вытекает доказываемое равенство.

Теорема 1. Пусть $I \in \langle t \rangle$. Тогда существуют s и J , удовлетворяющие условиям $J \in \langle s \rangle_+$ и $\Omega(I|t) \subseteq \Omega(J|s) \cap \{L_t = L_s\}$.

Ниже $\{L_i = L_j\} = \{\mathbf{x} \in \Omega: L_i(\mathbf{x}) = L_j(\mathbf{x})\}$. Аналогично определяются множества $\{L_i > L_j\}$ и $\{L_i \geq L_j\}$.

Доказательство этой теоремы мы дадим в п. 4.

Следствие. Справедливо равенство $\underline{b}_k = \bar{b}_k$.

Доказательство. Если $\langle t \rangle_+ \neq \emptyset$, то $\langle t \rangle \neq \emptyset$ и $\underline{b}_{k,t} \leq \bar{b}_{k,t}$. Отсюда $\underline{b}_k \leq \bar{b}_k$. Покажем, что $\underline{b}_k \geq \bar{b}_k$. Пусть $I \in \langle t \rangle$ и $\underline{b}_k = \mu(I|t)$. Выберем для пары (t, I) пару (s, J) , существование которой утверждается в теореме 1. На множестве $\{L_t = L_s\}$ функции H_t и H_s тождественны, откуда $\mu(I|t) \geq \mu(J|s)$. Значит, $\underline{b}_k = \underline{b}_{k,t} = \mu(I|t) \geq \mu(J|s) \geq \bar{b}_{k,s} \geq \bar{b}_k$, что и требовалось.

Заметим, что это следствие вытекает и из более слабой формы теоремы 1, формулировка и доказательство которой, принадлежащие А.М. Зубкову, приводятся в заключении.

3. Пример. Приведем пример, когда $\langle t \rangle_+ \neq \emptyset$, но $\underline{b}_{k,t} \neq \bar{b}_{k,t}$.

Лемма 1. Пусть $0 < u < \frac{1}{2}$, $A > 0$, $v_0 = \frac{1}{2}(A+1)^{-1} < u$. Тогда существуют v и λ , удовлетворяющие условиям $0 < v < u$, $\lambda > 0$,

$$(x_1 + x_2) \ln \frac{v}{u} + x_3 \ln \frac{1-2v}{1-2u} \equiv \lambda(x_3 - Ax_1 - Ax_2).$$

Доказательство. Достаточно найти v , удовлетворяющее условиям $0 < v < u$, $A \ln((1-2v)/(1-2u)) = \ln u/v$.

Пусть $f(v) = A \ln(1-2v) + \ln v$. Тогда нужно найти v , удовлетворяющее условиям $0 < v < u$, $f(v) = f(u)$. Нетрудно видеть, что v_0 — точка максимума f и $\lim_{v \rightarrow 0+} f(v) = -\infty$. Отсюда следует существование нужного v .

Пусть $a = \ln(4 - 2\sqrt{2})/\ln \sqrt{2} = 0.456\dots$; ε — достаточно малое положительное число, выбор которого будет определяться, исходя из налагаемых ниже условий. Можно проверить, что $\frac{1}{2}(1/a+1)^{-1}/2 < \frac{\sqrt{2}}{4}$. Пусть $a_\varepsilon = a + \varepsilon$, $\frac{1}{2}(1/a_\varepsilon+1)^{-1} < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

По лемме 1 существуют числа c_ϵ и λ_ϵ , удовлетворяющие условиям $0 < c_\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\lambda_\epsilon > 0$,

$$(x_1 + x_2) \ln \frac{c_\epsilon}{\sqrt{2}/4} + x_3 \ln \frac{1 - 2c_\epsilon}{1 - 2\sqrt{2}/4} \equiv \lambda_\epsilon \left(x_3 - \frac{1}{a_\epsilon} x_1 - \frac{1}{a_\epsilon} x_2 \right).$$

Пусть $m = 4$, r, k, t, p_1, p_2, p_3 — те же, что и в контрпримере п. 2, $p_4 = (c_\epsilon, c_\epsilon, 1 - 2c_\epsilon)$; $B(x; \varrho)$ — открытый шар радиуса ϱ с центром x ; символ O ниже берется по базе $\epsilon \rightarrow 0$. Тогда нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} L_2(x) - L_1(x) &= \ln \sqrt{2} \cdot (x_2 - x_1 - a x_3), \\ L_3(x) - L_1(x) &= \ln \sqrt{2} \cdot (x_1 - x_2 - a x_3), \\ L_4(x) - L_1(x) &= \lambda_\epsilon \left(x_3 - \frac{1}{a_\epsilon} x_1 - \frac{1}{a_\epsilon} x_2 \right), \end{aligned}$$

$$\Omega(2, 3 | 1) \cap \Lambda = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}, \quad \Omega_+(2, 3 | 1) = \emptyset,$$

$$\Omega(2, 4 | 1) \cap \Lambda \subseteq B \left(\left(0, \frac{a}{a+1}, \frac{1}{a+1} \right); \varrho \right), \quad \varrho = O(\epsilon), \quad \Omega_+(2, 4 | 1) \neq \emptyset,$$

$$\Omega(3, 4 | 1) \cap \Lambda \subseteq B \left(\left(\frac{a}{a+1}, 0, \frac{1}{a+1} \right); \varrho \right), \quad \varrho = O(\epsilon), \quad \Omega_+(3, 4 | 1) \neq \emptyset,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\} = \mathcal{J}_1, \quad \langle 1 \rangle_+ = \{(2, 4), (3, 4)\}, \\ \mu(2, 3 | 1) &= \ln \sqrt{2} = 0.34 \dots, \quad \mu(i, 4 | 1) = \mu + O(\epsilon) \quad (i = 2, 3), \\ \mu &= \frac{a}{a+1} \ln \frac{a/(a+1)}{\sqrt{2}/4} + \frac{1}{a+1} \ln \frac{1/(a+1)}{(4 - 2\sqrt{2})/4} = 0.54 \dots \end{aligned}$$

и $b_{2,1} = \mu(2, 3 | 1) < \mu(2, 4 | 1) = \bar{b}_{2,1}$, что и требовалось.

Заметим еще, что более точной, чем $b_{k,t}$, нижней границей в формуле (1) может служить величина, которая в [3] обозначалась через $\bar{\rho}_{i,k}$. (Определение этой величины мы не приводим). Нетрудно проверить, что наш пример универсален в том смысле, что $\bar{\rho}_{1,2} = b_{2,1}$, следовательно, «индивидуальные» границы формулы (19) работы [3] (в отличие от «коллективных» границ формулы (27)) могут не совпадать.

4. Доказательство теоремы 1. Теперь перейдем к доказательству теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что $I = \{1, 2, \dots, k\}$, $t = k + 1$. (Иначе перенумеруем систему $\{L_i\}_{i \leq m}$.) Так как $I \in \langle t \rangle$, то $\Omega(I | t) \neq \emptyset$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Omega_+(I | t) = \emptyset$. (Иначе возьмем $s = t$, $J = I$.)

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. Пусть $h \leq k$ и $\{L_h \geq L_{h+1}\} \cap \bigcap_{i < h} \{L_i > L_{h+1}\} \neq \emptyset$. Тогда $\bigcap_{i \leq h} \{L_i > L_{h+1}\} \neq \emptyset$.

Доказательство. По свойству (КЛ) $p_h \in \{L_h > L_{h+1}\}$. Пусть

$$y \in \{L_h \geq L_{h+1}\} \bigcap \bigcap_{i < h} \{L_i > L_{h+1}\}.$$

Тогда по линейности при достаточно большом $T > 0$ $p_h + Ty \in \bigcap_{i \leq h} \{L_i > L_{h+1}\}$.

Лемма 3. Пусть $h \leq k$, $E = \bigcap_{i \leq h} \{L_i \geq L_{h+1}\} \neq \emptyset$ и $\bigcap_{i \leq h} \{L_i > L_{h+1}\} = \emptyset$. Тогда существует число $i_1 \leq h$, удовлетворяющее условию $E \subseteq \{L_{i_1} = L_{h+1}\}$.

Доказательство. Пусть $N_0 = \{1, \dots, h\}$,

$$e_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_i(x) > L_{h+1}(x), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \sigma = \max_{x \in E} \left(\sum_{i \leq h} e_i(x) \right).$$

По условию $\sigma < h$. Если $\sigma = 0$, то $E \subseteq \{L_1 = L_{h+1}\}$ и лемма доказана. Пусть $\sigma > 0$. Тогда существуют вектор $\mathbf{x} \in E$ и множество $N \subseteq N_0$, удовлетворяющие условиям

$$L_i(\mathbf{x}) > L_{h+1}(\mathbf{x}) \quad (i \in N), \quad \#N = \sigma.$$

Так как $\sigma < h$, то найдется $i_1 \in N_0 \setminus N$. Покажем, что число i_1 — требуемое. Допустим противное: $L_{i_1}(\mathbf{y}) > L_{h+1}(\mathbf{y})$ для некоторого $\mathbf{y} \in E$. Тогда для $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ получим $\mathbf{z} \in E$, $L_i(\mathbf{z}) > L_{h+1}(\mathbf{z})$ ($i \in \{i_1\} \cup N_0$). Противоречие с определением числа σ .

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Определение пары (s, J) . Сначала определим число $\sigma < t$ и множества

$$E^{(i)}, \quad E_+^{(i)} \quad (i = t, t-1, \dots, \sigma). \quad (2)$$

Пусть $E^{(t)} = \Omega(I | t) = \bigcap_{i < t} \{L_i \geq L_t\}$, $E_+^{(t)} = \Omega_+(I | t) = \bigcap_{i < t} \{L_i > L_t\}$. По предположению $E^{(t)} \neq \emptyset = E_+^{(t)}$. Применяя лемму 3, найдем индекс $i_t \in I$, для которого $E^{(t)} \subseteq \{L_{i_t} = L_t\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $i_t = t-1$. (Иначе перенумеруем систему $\{L_i\}_{i < t}$.) Пусть

$$E^{(t-1)} = \bigcap_{i < t-1} \{L_i \geq L_{t-1}\}, \quad E_+^{(t-1)} = \bigcap_{i < t-1} \{L_i > L_{t-1}\}.$$

Заметим, что $E^{(t)} \subseteq E^{(t-1)}$, откуда $E^{(t-1)} \neq \emptyset$. Если $E_+^{(t-1)} \neq \emptyset$, то полагаем $\sigma = t-1$, и определение закончено. Пусть $E_+^{(t-1)} = \emptyset$. Тогда по лемме 3 существует индекс $i_{t-1} \in \{1, \dots, t-1\}$, для которого $E^{(t-1)} \subseteq \{L_{i_{t-1}} = L_{t-1}\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $i_{t-1} = t-2$. (Иначе перенумеруем систему $\{L_i\}_{i < t-1}$.)

Продолжая аналогично, мы придем к системе множеств (2), причем без ограничения общности будут выполнены условия

- 1) $E^{(h)} = \bigcap_{i < h} \{L_i \geq L_h\}$, $E_+^{(h)} = \bigcap_{i < h} \{L_i > L_h\}$ ($h = \sigma, \dots, t$);
- 2) $E^{(h)} \subseteq \{L_{h-1} = L_h\}$, $E_+^{(h)} = \emptyset$ ($h = \sigma+1, \dots, t$).

По свойству (КЛ) при $i \neq j$ $\{L_i > L_j\} \neq \emptyset$, поэтому минимальный индекс σ , для которого могут быть определены множества $E^{(i)}$ и $E_+^{(i)}$, будет не меньше 2, и при этом $E_+^{(\sigma)} \neq \emptyset$.

Теперь возьмем $s = \sigma$ и $J = \{1, \dots, t\} \setminus \{s\}$.

Шаг 2. $\Omega(I | t) \subseteq \Omega(J | s) \cap \{L_t = L_s\}$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\Omega(I | t) \subseteq \{L_t = L_s\}$. Из определения множеств (2) находим $E^{(t)} \subseteq \bigcap_{i=\sigma+1}^t \{L_{i-1} = L_i\} \subseteq \{L_t = L_s\}$, что и требовалось.

Шаг 3. $J \in \langle s \rangle_+$.

Доказательство. Пусть $F_h = \bigcap_{i \leq h, i \neq s} \{L_i > L_s\}$ ($h = s, \dots, t$). Покажем, что $F_{h-1} = F_h$ ($h = s+1, \dots, t$). Допустим противное: существует $\mathbf{x} \in F_{h-1} \setminus F_h$. Тогда $\mathbf{x} \in \{L_s \geq L_h\} \cap \bigcap_{i < h, i \neq s} \{L_i > L_h\}$. По лемме 2 $E_+^{(h)} = \bigcap_{i < h} \{L_i > L_h\} \neq \emptyset$, что противоречит определению множества $E_+^{(h)}$ (для $h > s$).

Из доказанного следует, что $\Omega_+(J | s) = F_t = F_s = E_+^{(s)} \neq \emptyset$, что и требовалось.

Теорема доказана.

5. Заключение. При чтении рукописи А. М. Зубков предложил более простое доказательство равенства $\underline{b}_k = \bar{b}_k$ за счет следующего более слабого аналога теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $I \in \langle t \rangle$ и $\mathbf{x} \in \Omega(I | t)$. Тогда при любом $\delta > 0$ существуют s , J и $\mathbf{y}$, удовлетворяющие условиям $\mathbf{x} \in \{L_t = L_s\}$, $J \in \langle s \rangle_+$ и $\mathbf{y} \in \Omega_+(J | s) \cap B(\mathbf{x}; \delta)$.

То, что эта теорема вытекает из теоремы 1, очевидно. (При $J \in \langle s \rangle_+$ замыкание множества $\Omega_+(J | s)$ совпадает с $\Omega(J | s)$ — см. [3, утверждение в), с. 297].) Приведем набросок ее доказательства.

Пусть заданы $t, I, \mathbf{x}$ и δ . Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{x} \notin \Omega_+(I|t)$, следовательно, множество $I^* = \{i \in I: L_i(\mathbf{x}) = L_i(\mathbf{x})\}$ не пусто.

В точке $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ выполняются неравенства $L_i(\mathbf{z}) > L_i(\mathbf{x})$ ($i \in I \setminus I^*$). Уменьшая, если необходимо, число δ , можно добиться того, чтобы эти неравенства выполнялись в шаре $B(\mathbf{x}; \delta)$.

Так как линейные формы L_j попарно различны, то, привлекая соображения размерности, нетрудно показать, что существует точка $\mathbf{y} \in \Omega \cap B(\mathbf{x}; \delta)$, удовлетворяющая условию $L_i(\mathbf{y}) \neq L_j(\mathbf{y})$ ($i, j \in I^* \cup \{t\}, i \neq j$). Выберем индекс s , на котором достигается минимум $L_i(\mathbf{y})$ при $i \in I^* \cup \{t\}$. Ясно, что тогда $\mathbf{y} \in \Omega_+(J|s)$ для $J = I \cup \{t\} \setminus \{s\}$, что и требовалось.

Для того чтобы показать, что $\bar{b}_k = \underline{b}_k$, достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ $\bar{b}_k \leq \underline{b}_k + \varepsilon$.

Пусть задано число ε и $\underline{b}_k = H_t(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in \Omega(I|t) \cap \Lambda$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $|L_i(\mathbf{x}) - L_i(\mathbf{y})| < \varepsilon$ при всех i , если $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2\delta$ (полагаем $|\mathbf{x}| = \sum |x_j|$), и построим для набора $(t, I, \mathbf{x}, \delta)$ набор $(s, J, \mathbf{y})$, существование которого утверждается в теореме 2.

Пусть $\mathbf{y}^*$ — точка, коллинеарная $\mathbf{y}$ и лежащая в $\Omega \cap \Lambda$. Тогда $|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{y}^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, следовательно, $\mathbf{y}^* \in \Omega_+(J|s) \cap B(\mathbf{x}; 2\delta)$.

Из наших построений теперь вытекает, что $\underline{b}_k = H_t(\mathbf{x}) = H_s(\mathbf{x})$, $\bar{b}_k \leq H_s(\mathbf{y}^*)$ и $|H_s(\mathbf{x}) - H_s(\mathbf{y}^*)| < \varepsilon$, что и требовалось.

Автор выражает благодарность Н. П. Салихову за постановку задачи и А. М. Зубкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: ИЛ, 1958, 374 с.
2. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984, 472 с.
3. Сализов Н. П. Об одном обобщении расстояния Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 294–314.

Поступила в редакцию
30.VIII.1999

© 2000 г.

РЯБИНИН А. А.*

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СО СЛУЧАЙНОЙ РАССТАНОВКОЙ ЗНАКОВ

Рассматривается случайный ряд $S = \sum_{k=1}^{\infty} \pm a_k$, $a_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, в котором расстановка знаков подчинена марковской зависимости с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p(+1,+1) & p(-1,+1) \\ p(+1,-1) & p(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для характеристической функции $f(z)$ суммы S получена формула

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(a_k z) + i(1-2\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{\infty} \cos(a_k z) \sin(a_{j+1} z),$$

где $\psi_j(z) = \mathbf{E}(t_j e^{izS_j})$ и $S_j = \sum_{k=1}^j \pm a_k$, $z \in \mathbf{C}^1$.

* Нижегородский государственный университет, механико-математический факультет, просп. Гагарина, 23, 603600 Нижний Новгород, Россия; e-mail: ryabinin@mm.unn.ac.ru