Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Экспоненциалы и R -возвратные случайные блуждания на группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 3, 580–588

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5075>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:58:53

© 2016 г.

ШУР М. Г.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЫ И R -ВОЗВРАТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА ГРУППАХ

На локально компактной группе E со счетной базой рассматривается правое случайное блуждание X , обладающее при некотором $r > 0$ единственной (с точностью до положительного множителя) r -инвариантной мерой. Если последняя подчиняется некоторым слабым ограничениям, то случайному блужданию X можно естественным образом поставить в соответствие единственный непрерывный экспоненциал на E . Отсюда выводится, что на группе E можно реализовать какое-нибудь R -возвратное (по Твиди) случайное блуждание только в том случае, когда эта группа возвратна и, более того, когда на ней существует случайное блуждание, возвратное по Харрису.

Ключевые слова и фразы: r -инвариантная мера; R -возвратное блуждание на группе; случайное блуждание, возвратное по Харрису; экспоненциал.

1. Введение. В работе речь идет о правых случайных блужданиях на локально компактных группах со счетной базой. Указанные свойства групп безоговорочно считаются присущими всем рассматриваемым далее группам, а групповая операция в любой из них интерпретируется как умножение [7]. Терминология, относящаяся к случайным блужданиям или неприводимым цепям Маркова в основном заимствуется из книг [8] или [4] соответственно.

Переходим к основному изложению. Хорошо известно, какое значительное внимание не столь давно уделялось описанию возвратных групп, т.е. групп, на каждой из которых можно реализовать хотя бы одно возвратное случайное блуждание, причем наибольшее продвижение в этом направлении было достигнуто в рамках абелевых групп и связанных групп Ли (см. [8, гл. 3], [2]). Выяснилось, в частности, что возвратные группы обладают некоторыми специальными свойствами (например, являются унимодулярными [3]).

В предлагаемой работе выделено достаточно большое семейство случайных блужданий, которые, не будучи обязательно возвратными, допускают реализацию только на возвратных группах (см. теорему 2 в п. 4). Это семейство состоит из всевозможных несингулярных правых случайных блужданий, являющихся R -возвратными в смысле Твиди (Tweedie R .) или, что то же, π -неприводимыми R -возвратными цепями Маркова [4], [5], где π — мера Хаара на соответствующей группе, а $R \geq 1$ — параметр сходимости соответствующей цепи Маркова. Разумеется, такое блуждание ρ -возвратно, в смысле, обычном для теории случайных блужданий (ср. [6, гл. 2]; здесь ρ — спектральный радиус блуждания). В качестве примера R -возвратного блуждания можно взять любое блуждание Бернулли по решетке целых чисел, порождаемое испытаниями Бернулли по решетке целых чисел, порождаемое испытаниями Бернулли с вероятностью успеха p , отличной от 0 и 1.

Упомянутой теореме 2 предшествует теорема 1 об условиях существования единственного непрерывного экспоненциала, связанного (см. далее (1)) с некоторым случайным блужданием. В связи с этим напомним, что борелевская функция $\varphi > 0$, заданная на некоторой группе E , называется экспоненциалом на E , если $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых $x, y \in E$, и что такие функции играют заметную роль в теории случайных блужданий [6]. Теорема 2 отражает простой факт: если некоторое случайное блуждание несингулярно и R -возвратно по Твиди, то случайное блуждание

* Московский государственный институт электроники и математики Научно-исследовательского университета «Высшая школа экономики», 109028 Москва, Россия.

на той же группе, отвечающее закону $R\vartheta$, где ϑ — закон первого блуждания, а φ — некоторый экспоненциал, является возвратным по Харрису.

Теоремы 1 и 2, доказанные в пп. 2 и 4 соответственно, служат главными результатами работы. Остальные утверждения, собранные в основном в п. 3, дополняют п. 1, а также содержат подготовительный материал к 4.

В одной из следующих публикаций автор планирует применить обсуждаемую здесь теорию для развития результатов работы [9] и, в частности, для получения новых предельных теорем для отношений.

Теперь остановимся на основных обозначениях. Всюду рассматривается некоторая группа E оговоренного ранее типа вместе с совокупностью $\mathcal{E}$ ее борелевских подмножеств. На $\mathcal{E}$ фиксируется некоторая правая мера Хаара π , с которой связывается левая мера Хаара π_1 такая, что $\pi_1(A) = \pi(A^{-1})$ для $A \in \mathcal{E}$, где $A^{-1} = \{x \in E: x^{-1} \in A\}$. Запись «п.в.» в зависимости от контекста означает либо « π -почти всюду», либо « π -почти все».

На группе E задается правое случайное блуждание $X = (X_n; n \geq 0)$ с законом ϑ [8], на которое при необходимости будут налагаться те или иные ограничения. Закону ϑ , где $\hat{\vartheta}(A) = \vartheta(A^{-1})$, $A \in \mathcal{E}$, ставится в соответствие случайное блуждание $\hat{X}$, двойственное для X , а под P и $\hat{P}$ подразумеваются переходные операторы, отвечающие X и $\hat{X}$ соответственно [8]. Таким образом,

$$Pf(x) = \int f(xy) \vartheta(dy) \quad \text{и} \quad \hat{P}f(x) = \int f(xy) \hat{\vartheta}(dy)$$

для всех $x \in E$, где f пробегает семейство всех ограниченных снизу борелевских функций $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$.

Наконец, если ν — некоторая мера на $\mathcal{E}$, а f — неотрицательная борелевская функция на E , то меры νP и $\mu = f\nu$ определим обычным образом:

$$\nu P(A) = \int p(x, A) \nu(dx) \quad \text{и} \quad \mu(A) = \int_A f d\nu, \quad A \in \mathcal{E}.$$

2. Экспоненциалы и случайные блуждания. Пусть $r \in (0, \infty)$. Борелевская функция $f: E \rightarrow [0, \infty]$ или мера ν , определенная на $\mathcal{E}$, называются r -инвариантными для случайного блуждания X , если $\int f d\pi > 0$, $f \not\equiv \infty$ и $f = rPf$ или если $\nu(E) > 0$ и $\nu = r\nu P$ соответственно [4] (многие авторы трактуют аналогичные понятия по-иному; ср., например, определения инвариантной или, что то же, гармонической функции в [1], [4], [7]).

Заданный на группе E экспоненциал φ является r -инвариантной функцией для X тогда и только тогда, когда

$$r = \left[\int \varphi d\vartheta \right]^{-1}, \quad (1)$$

поскольку

$$P\varphi(x) = \int \varphi(x)\varphi(y) \vartheta(dy) = \varphi(x) \int \varphi d\vartheta.$$

Такое же утверждение справедливо и в случае $\hat{X}$, но в этом случае вместо равенства (1) следует использовать его аналог с мерой $\hat{\vartheta}$ вместо ϑ , который удобно назвать двойственным вариантом (1).

Теорема 1. Пусть при некотором $r > 0$ случайное блуждание X обладает единственной (с точностью до положительного множителя) r -инвариантной мерой π_0 , абсолютно непрерывной относительно меры π и принимающей конечные значения на компактах, лежащих в E . Тогда существует единственный непрерывный экспоненциал φ на E , удовлетворяющий условию (1), а функция $\psi = \varphi^{-1}$ является единственным непрерывным экспоненциалом на E , подчиняющимся двойственному варианту (1). Экспоненциалы φ и ψ r -инвариантны для X и $\hat{X}$ соответственно, причем мера π_0 совпадает с $\psi\pi$ с точностью до положительного множителя.

Доказательство. По условию теоремы $\pi_0 = h_1\pi$ с некоторой борелевской функцией $h_1 \geq 0$, локально суммируемой (т.е. суммируемой на любом компакте в E) по π . Пусть функция $v \geq 0$ ($v \not\equiv 0$) непрерывна на E и имеет компактный носитель. Тогда функция

$$h(x) = \int v(y)h_1(yx)\pi(dy) = \int v(yx^{-1})h_1(y)\pi(dy), \quad x \in E,$$

принимает конечные значения и не может обращаться в 0 на всем E . Кроме того, ввиду последнего равенства она непрерывна на E .

Проверим, что для меры $\mu = h\pi$ и каждой борелевской функции $f \geq 0$ справедливо равенство

$$\int f d\mu = r \int Pf d\mu.$$

Действительно, если Δ — модулярная функция группы E , то в соответствии с [7, теорема 15.15] при любом $y \in E$ находим

$$\begin{aligned} \int f(x)h_1(yx)\pi(dx) &= \Delta(y) \int f(y^{-1}x)h_1(x)\pi(dx) = \Delta(y) \int f(y^{-1}x)\pi_0(dx) \\ &= r\Delta(y) \int f(y^{-1}x)\pi_0 P(dx) = r\Delta(y) \int Pf(y^{-1}x)\pi_0(dx) \\ &= r \int Pf(x)h_1(yx)\pi(dx), \end{aligned}$$

где в третьем равенстве учтена r -инвариантность π_0 , а в последнем использованы первые три, но записанные с Pf вместо f . К тому же

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f(x) \left[\int v(y)h_1(yx)\pi(dy) \right] \pi(dx) = \int v(y) \left[\int f(x)h_1(yx)\pi(dx) \right] \pi(dy) \\ &= r \int v(y) \left[\int Pf(x)h_1(yx)\pi(dx) \right] \pi(dy) \end{aligned} \quad (3)$$

в соответствии с предыдущей выкладкой. Первые два равенства в (3) применительно к Pf в роли f показывают, что правая часть (2) равна последнему выражению в (3). Поэтому (3) ведет к равенству (2), свидетельствующему об r -инвариантности меры μ .

Убедимся в справедливости равенства

$$h(yx) = a(x)h(y) \quad (4)$$

при любых $x, y \in E$, отложив ненадолго определение величины $a(y) > 0$. С этой целью выберем точку $y \in E$ и функцию f прежнего типа и запишем (2) с $f(y^{-1}x)$ вместо $f(x)$. В результате без труда обнаружим, что

$$\int f(x)h(yx)\pi(dx) = r \int Pf(x)h(yx)\pi(dx)$$

для обширного семейства функций f и что, следовательно, мера μ_y является r -инвариантной для X , где $\mu_y(dx) = h(yx)\pi(dx)$. Поэтому с точностью до некоторых множителей мера μ_y совпадает с π_0 и μ , так что μ_y равна $a(y)\mu$ с соответствующим множителем $a(y) > 0$. Другими словами, при любом фиксированном $y \in E$ равенство (4) осуществляется при п.в. $x \in E$, а так как функция h непрерывна, то (4) должно действовать при любых $x, y \in E$.

При $x = e$, где e — единичный элемент группы E , из (4) заключаем, что $h(y) = a(y)h(e)$, $y \in E$, и, таким образом, $h(e) \neq 0$ и $a(y) = h(y)/h(e)$. Ввиду этого, заменяя при необходимости функцию v , использованную при определении h , функцией αv с некоторым $\alpha > 0$, мы можем далее считать, что $h(e) = 1$ и $a(y) \equiv h(y)$ на E , а в таком случае (4) означает, что h является непрерывным экспоненциалом на E .

Функция $\varphi = h^{-1}$ также является непрерывным экспоненциалом, к тому же удовлетворяющим условию (1). В самом деле, привлекая случайное блуждание $\widehat{X}$, двойственное для X , можно переписать (2) в следующем виде:

$$\int f h d\pi = r \int f \widehat{P} h d\pi, \quad (5)$$

где f пробегает прежнее семейство функций. Отсюда видно, что $h = r\widehat{P}h$ п.в., так что при п.в. $x \in E$ имеем

$$\begin{aligned} h(x) &= r\widehat{P}h(x) = r \int h(xy) \vartheta(dy) = rh(x) \int \frac{\widehat{\vartheta}(dy)}{h(y^{-1})} \\ &= rh(x) \int \frac{\vartheta(dy)}{h(y)} = rh(x) \int \varphi d\vartheta, \end{aligned} \quad (6)$$

так как h является экспоненциалом и $h(y^{-1}) = h^{-1}(y) = \varphi(y)$. Сравнение крайних членов в (6) ведет к условию (1), а с ним и к r -инвариантности φ для X .

Подчеркнем, что в (6) все равенства, начиная со второго, заведомо выполняются всюду в E , а потому все члены указанных равенств непрерывны в E вместе с последним из них. Следовательно, с учетом непрерывности функции h весь набор равенств (6) оказывается действующим всюду в E , и первое из них устанавливает r -инвариантность экспоненциала $h = \varphi^{-1} = \psi$ для $\widehat{X}$, а тем самым и справедливость двойственного варианта (1) для ψ .

Далее, если некоторый непрерывный экспоненциал ψ_1 также удовлетворяет тому же варианту (1), то $\psi_1 = r\widehat{P}\psi_1$, откуда снова следует (5), но с ψ_1 вместо h . Иными словами, мы вправе применить (2), заменив μ на $\mu_1 = \psi_1\pi$, и установить тем самым r -инвариантность μ_1 для X вместе с равенством $\psi_1 = k\psi$ при подходящем $k > 0$. Однако $\psi_1(e) = \psi(e) = 1$, т.е. $k = 1$ и $\psi_1 = \psi$, и, таким образом, ψ обладает свойством единственности, указанным в нашей теореме.

Не составляет труда обосновать аналогичное свойство экспоненциала φ : если непрерывный экспоненциал φ_1 подчиняется условию (1), то к $\psi_2 = \varphi_1^{-1}$ применим двойственный вариант (1), поскольку

$$\int \psi_2 d\widehat{\vartheta} = \int \psi_2(x^{-1}) \vartheta(dx) = \int \varphi_1 d\vartheta = r^{-1}$$

и по уже доказанному $\psi_2 = \psi$ и $\varphi_1 = \varphi^{-1} = \varphi$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Следствие 1. Если при условиях теоремы 1 некоторая функция g r -инвариантна для $\widehat{X}$ и локально суммируема по π , то $g = k\varphi$ п.в. при некотором $k > 0$. Если же условия теоремы 1 реализуются для случайного блуждания $\widehat{X}$, то всякая функция g , r -инвариантная для X и локально суммируемая по π , имеет вид $g = k_1\varphi$ п.в. при некотором $k_1 > 0$.

Чтобы установить первую часть следствия, достаточно заметить, что в указанной в ней ситуации мера $g\pi$ является r -инвариантной для X и принимает конечные значения на компактах, а следовательно, с точностью до некоторых множителей совпадает с мерами π_0 и $\mu = \varphi^{-1}\pi$ из проведенного доказательства. Вторая часть следствия вытекает из первой.

Для несингулярных R -возвратных блужданий имеется более удобный вариант этого следствия (см. предложение 5 в п. 4). Что же касается требования локальной суммируемости r -инвариантных функций, то оно зачастую выполнено автоматически (см. предложение 2).

Следствие 2. Пусть случайное блуждание X симметрично (т.е. $\vartheta = \widehat{\vartheta}$) и при некотором $r > 0$ любые его r -инвариантные меры могут отличаться друг от друга лишь подходящими множителями. Тогда $r = 1$ и любая его инвариантная (т.е. 1-инвариантная) функция равна п.в. некоторой постоянной.

Действительно, в этом случае можно считать, что $X = \widehat{X}$, и из теоремы 1 вытекает тождество $\varphi \equiv \varphi^{-1}$, в силу которого $\varphi = 1$ и $r = 1$ (см. (1)). Оставшаяся часть следствия 2 выводится из предыдущего следствия.

3. Промежуточные результаты. В этом пункте, с одной стороны, ведется подготовка к доказательству теоремы 2 из следующего пункта, а с другой — дается дополнительный материал, связанный с теоремой 1 и следствием 1 (см. предложение 2).

Во всех последующих утверждениях, исключая только предложение 4, X будет предполагаться несингулярным (соответствующий английский термин — «a spread out random walk»), т.е. имеющим закон ϑ , некоторая сверточная степень $\vartheta^n, n \geq 1$, которого несингулярна относительно меры Хаара π . Кроме того, как это нередко делается (ср. [7]), мы ограничимся рассмотрением лишь адаптированных случайных блужданий.

Начнем с обсуждения свойства неприводимости, которое толкуется по-разному в теории случайных блужданий и в общей теории марковских цепей. Именно, случайное блуждание называется неприводимым [1], [8], если наименьшая замкнутая полугруппа $T \subset E$, содержащая носитель меры ϑ , совпадает с E ; случайное блуждание называется π -неприводимым [4], если

$$\sum_{n \geq 1} p(n, x, A) > 0 \quad (7)$$

для всех $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}_+$, где $p(n, \cdot, \cdot)$ — переходные вероятности за n шагов, отвечающие X , и $\mathcal{E}_+ = \{A \in \mathcal{E}: \pi(A) > 0\}$.

Доказательства предложения 1, согласно которому в ситуации с несингулярными случайными блужданиями эти определения фактически идентичны, а также предложений 2 и 3 опираются на лемму 3.7 из [8, гл. 3], устанавливающую существование компакта $V \subset E$ с непустой внутренностью, натурального m и положительных a и b таких, что

$$p(m, x, A) = \vartheta^m(x^{-1}A) \geq a\pi(V \cap x^{-1}A) \geq b\pi_1(V \cap x^{-1}A) \quad (8)$$

для любых $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}$ (определение левой меры Хаара π_1 см. в конце п. 1).

Предложение 1. *Несингулярное случайное блуждание X π -неприводимо тогда и только тогда, когда оно неприводимо.*

Доказательство. Предположив X неприводимым, воспользуемся соотношениями (8) для $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}$ с V, m и т.п., выбранными в соответствии с только что сказанным. Если $A \in \mathcal{E}_+$ относительно компактно, то последнее из выражений в (8) непрерывно зависит от $x \in E$ и не обращается в 0 тождественно [7, следствие 20.17], так что $p(m, x, A) > 0$ при всех x из некоторого непустого открытого множества. Как следует из уравнения Чепмена–Колмогорова и свойства неприводимости X , для любого $x \in E$ имеем $p(n, x, A) > 0$ при некотором натуральном $n = n(x)$, и этот вывод немедленно распространяется на любые $A \in \mathcal{E}_+$. Тем самым установлена π -неприводимость X .

Наоборот, пусть X π -неприводимо, а T — недавно упомянутая полугруппа. Множество $S = E \setminus T$ открыто, и потому $\pi(S) > 0$, если оно непусто. Но тогда $\sum_{n \geq 1} p(n, e, S) > 0$ в силу (7), что противоречит определению полугруппы T . Итак, S пусто, т.е. случайное блуждание X неприводимо. Предложение 1 доказано.

Следствие 3. *Если несингулярное случайное блуждание X неприводимо, то для него любая из мер Хаара π или π_1 служит максимальной мерой неприводимости в смысле [4].*

Это следствие, непосредственно вытекающее из предложения 1, позволит далее свободно пользоваться теорией, развитой в [4].

Отметим также, что в соответствии с предложением 1 мы теперь можем в определении R -возвратного блуждания (см. п. 1) заменить требование π -неприводимости блуждания требованием его неприводимости, если, конечно, мы ограничиваемся несингулярными случайными блужданиями.

Напомним, что замена равенства $f = rPf$ в определении r -инвариантной функции (см. п. 1) неравенством $f \geq rPf$ приводит к определению r -субинвариантной функции [4].

Предложение 2. *Если случайно блуждание X несингулярно и неприводимо, то, каково бы ни было $r > 0$, любая r -субинвариантная для X функция локально суммируема по мере π .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что, вопреки нашему утверждению, некоторая r -субинвариантная для X функция f не является суммируемой по π на каком-либо непустом компакте F . Тогда она не является суммируемой по π , а вместе с тем и по π_1 в любой окрестности некоторой точки $z \in F$ (иначе она бы была суммируемой по π в некоторой окрестности G_x каждой точки $x \in F$ и некоторый конечный набор множеств вида G_x , $x \in F$, служил бы открытым покрытием компакта F , что возможно лишь в случае суммируемости f на F).

Зафиксируем точку z с отмеченным свойством и, сохранив прежние обозначения, вновь воспользуемся соотношением (8). С учетом регулярности группы E [7, гл. 1] можно выбрать непустое открытое множество W , замыкание которого содержится в множестве V , указанном в (8), и окрестность W_0 единичного элемента e так, чтобы было выполнено включение $x^{-1}W \subset V$ для всех $x \in W_0$. Для $x \in W_0$ и любых борелевских $A \subset W$ последнее из выражений (8) совпадает с

$$b\pi_1(x^{-1}A) = b\pi_1(A), \quad (9)$$

поскольку π_1 является левой мерой Хаара.

Теперь зададим $y \in W$, положим $s = yz^{-1}$ и $g(x) = f(s^{-1}x)$, $x \in E$, заметим, что

$$\int_W g d\pi_1 = \int 1_W(x) f(s^{-1}x) \pi_1(dx) = \int 1_W(sx) f(x) \pi_1(dx) = \int_{s^{-1}W} f d\pi_1 = \infty,$$

так как $s^{-1}W$ служит окрестностью точки $s^{-1}y = z$, а f несуммируема в любой окрестности этой точки (под 1_W подразумевается индикатор множества W). Отсюда на основании (8) и (9) получаем

$$P^m g(x) \geq b \int_W g d\pi_1 = \infty, \quad x \in W_0,$$

и, следовательно, $P^m f(x) = P^m g(sx) = \infty$, если x пробегает открытое множество $s^{-1}W_0$. Ясно, что $f \equiv \infty$ на том же множестве в силу r -субинвариантности функции f , а это обстоятельство вместе с уравнением Чепмена–Колмогорова ведет к тождеству $f \equiv \infty$ в E (ср. с предыдущим доказательством), несовместимому с определением r -субинвариантной функции. Итак, предположение, открывающее доказательство, оказалось несостоятельным, чем и завершается доказательство.

Предложение 3. Если случайное блуждание X несингулярно и неприводимо, то можно подобрать открытое $U \subset E$ так, чтобы при всяком $s \in E$ множество sU и каждая из мер $1_{sU}\pi_1$ или $1_{sU}\pi$ оказались малыми для X в смысле [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (8) и (9) вытекает неравенство

$$p(m, x, A) \geq b\pi_1(A), \quad (10)$$

в котором x пробегает некоторую окрестность W_0 точки e , в роли A берется любое борелевское подмножество некоторого непустого открытого $W \subset E$, а натуральное m и $b > 0$ выбраны подходящим образом. Кроме того, не ограничивая общности, можно считать W_0 относительно компактным. В соответствии с определением 2.3 из [4] неравенство (10) доказывает, что функция 1_{W_0} и мера $1_{W_0}\pi_1$ являются малыми для X . Теперь зададим $s \in E$. Если $x \in sW_0$ и $A \subset sW$ ($A \in \mathcal{E}$), то согласно (10)

$$p(m, x, A) = p(m, s^{-1}x, s^{-1}A) \geq b\pi_1(s^{-1}A) = b\pi_1(A),$$

так как $s^{-1}x \in W_0$ и $s^{-1}A \subset W$. Таким образом, вновь получено (10), но с несколькими иными x и A , и на этот раз множество sW_0 и мера $1_{sW}\pi_1$ оказываются малыми. Приняв во внимание относительную компактность множества W и связь между правыми и левыми мерами Хаара [7, § 15], видим, что мера $1_{sW}\pi$ также мала. Для завершения доказательства остается положить $U = W_0 \cap s_0W$, подобрав $s_0 \in E$ так, чтобы множество U не было пустым. Предложение 3 доказано.

В следующем пункте нам потребуется одно интуитивно ясное утверждение (см. предложение 4), которое поможет нам установить возвратность по Харрису некоторого случайного блуждания. Доказательство этого утверждения опирается на следующую лемму, в которой символом $\mathbf{E}_x$, $x \in E$, обозначено математическое ожидание, отвечающее вероятностной мере $\mathbf{P}_x$ (последняя задана на соответствующей σ -алгебре элементарных событий и сопоставляется X при начальном состоянии x [4], [8]).

Лемма 1. Для любой ограниченной борелевской функции g на E выполняется равенство

$$\mathbf{E}_{yx}[g(X_n)] = \mathbf{E}_x[g(yX_n)], \quad n \geq 0, \quad (11)$$

каковы бы ни были $x, y \in E$.

Доказательство. При $n = 0$ это равенство очевидно, так что рассмотрим лишь $n \geq 1$. Если $g = 1_A$ и $A \in \mathcal{E}$, то левая и правая части (11) равны вероятностям $\mathbf{P}_{yx}(X_n \in A)$ и $\mathbf{P}_x(X_n \in y^{-1}A)$ соответственно, каждая из которых совпадает с $\vartheta^n(x^{-1}y^{-1}A)$, откуда в нашем случае и следует (11). Разумеется, (11) сохраняет силу если функция g , будучи борелевской, принимает лишь конечное число значений. При нарушении этого условия функцию g можно равномерно приблизить удовлетворяющими этому условию, а это снова ведет к (11). Лемма 1 доказана.

Введем в рассмотрение функции

$$h^B(x) = \mathbf{P}_x(\Lambda_B^1) \quad \text{и} \quad H^B(x) = \mathbf{P}_x(\Lambda_B), \quad x \in X,$$

где события Λ_B^1 или Λ_B состоят в попадании в множество $B \in \mathcal{E}$ траектории случайного блуждания X хотя бы однажды или бесконечное число раз соответственно.

Предложение 4. Справедливы равенства

$$h^{yB}(yx) = h^B(x) \quad \text{и} \quad H^{yB}(yx) = H^B(x) \quad (12)$$

для $x, y \in E$, где $yB = \{z = yx: x \in B\}$.

Доказательство. Основная часть доказательства посвящена проверке первого из равенств (12). Сначала убедимся в том, что

$$h_n^{yB}(yx) = h_n^B(x), \quad n \geq 0, \quad (13)$$

для $x, y \in E$, положив $h_0^B(x) = \mathbf{P}_x(X_0 \in B)$ и

$$h_n^B(x) = \mathbf{P}_x(X_0 \notin B, X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B), \quad n \geq 1.$$

При $n = 0$ равенство (13) очевидно: обе его части равны 1 или 0, если $x \in B$ или $x \notin B$ соответственно. Столь же прост и случай $n \geq 1$ и $x \in B$, так что далее будем работать только с $x \notin B$. Предположим, что (13) доказано при некотором $n \geq 0$. Тогда по марковскому свойству имеем

$$h_{n+1}^{yB}(yx) = \mathbf{E}_{yx}[1_\Lambda h_n^{yB}(X_1)] \quad (14)$$

с множителем 1_Λ , равным индикатору события $\Lambda = \{X_0 \notin B\}$. Так как $x \notin B$, то $\mathbf{P}_{yx}(\Lambda) = \mathbf{P}(yX_0 \notin yB) = 1$, и, следовательно, правая часть (14) совпадает с

$$\mathbf{E}_{yx}[h_n^{yB}(X_1)] = \mathbf{E}_x[h_n^{yB}(yX_1)] = \mathbf{E}_x[h_n^B(X_1)] = h_{n+1}^B(x)$$

(первое из этих равенств вытекает из (11), второе — из (13) с теперешним значением n , а третье — из (14) с $y = e$). Итак, (13) доказано, но с n , замененным на $n + 1$, а стало быть, (13) установлено с любым $n \geq 0$.

Так как $h^B(x) = \sum_{n \geq 0} h_n^B(x)$, то одновременно доказано и первое из равенств (12), которое в сочетании с (11) ведет к соотношениям

$$\mathbf{E}_{yx}[h^{yB}(X_n)] = \mathbf{E}_x[h^{yB}(yX_n)] = \mathbf{E}_x[h^B(X_n)]. \quad (15)$$

Таким образом, крайние члены в (15) совпадают, и для обоснования второго из равенств (12) остается лишь заметить, что $\mathbf{E}_x[h^B(X_n)] \rightarrow H^B(x)$ при $n \rightarrow \infty$ ($x \in E$).

4. Случайные блуждания, R -возвратные по Твиди. Основная задача этого пункта заключается в доказательстве второго результата работы — теоремы 2. Однако вначале будет показано, насколько упрощаются теорема 1 и следствие 1, если случайное блуждание X несингулярно и R -возвратно по Твиди, где, как и ранее, под R подразумевается параметр сходимости X .

Предложение 5. При только что указанных условиях справедливы следующие утверждения:

1) существует единственный непрерывный экспоненциал φ на E , удовлетворяющий условию (1) с $r = R$;

2) всякая функция g , являющаяся R -инвариантной для $\hat{X}$ или X , имеет вид, указанный в первом или втором утверждении следствия 1 соответственно; более того, такой же вид имеют функции, R -субинвариантные для $\hat{X}$ или X .

Доказательство. Не составляет труда установить несингулярность и неприводимость, а следовательно, и π -неприводимость $\hat{X}$. Докажем, что это случайное блуждание R -возвратно по Твиди. Для борелевских функций $f: E \rightarrow [0, \infty)$ положим

$$G^R f = \sum_{n \geq 0} R^n P^n f$$

и аналогично по оператору $\hat{P}$ определим $\hat{G}^R f$. Пусть $\int f d\pi > 0$ и функция g обладает теми же свойствами, что и f . Так как $G^R f \equiv \infty$ в силу R -возвратности X , то

$$\int f \hat{G}^R g d\pi = \int g G^R f d\pi = \infty, \quad (16)$$

и, положив $\nu = f\pi$, получаем равенство $\int \hat{G}^R g d\nu = 0$. В соответствии с предложением 3 от рассматриваемой функции f можно потребовать, чтобы введенная мера ν была малой для $\hat{X}$. Тогда при $\hat{G}^R g \neq \infty$ функция $\hat{G}^R g$ будет R -субинвариантной для $\hat{X}$ и последнее равенство окажется противоречащим предложению 5.1 из [4], если функция g является малой для $\hat{X}$. Следовательно, $\hat{G}^R g \equiv \infty$ для всех g , малых для $\hat{X}$, т.е. $\hat{R} \leq R$, где $\hat{R}$ — параметр сходимости случайного блуждания $\hat{X}$. Меняя ролями X и $\hat{X}$, получаем неравенство $R \leq \hat{R}$, а с ним и равенство $R = \hat{R}$.

В результате случайное блуждание $\hat{X}$ также оказывается R -возвратным, что и влечет справедливость предложения 5 (см. [4, теорема 5.3] и теорему 1 и следствие 1 из п. 2).

Перейдем к основной задаче этого пункта. Отправляясь от закона ϑ R -возвратно по Твиди случайного блуждания X и экспоненциала φ , упомянутого в п. (а) предложения 5, рассмотрим на E правое случайное блуждание $\tilde{X}$ с законом $\tilde{\vartheta} = R\varphi\vartheta$ и переходным оператором $\tilde{P}$ (мера $\tilde{\vartheta}$ является вероятностной в силу R -инвариантности φ для X и условия (1) с $r = R$). Сверточные степени нового закона легко выражаются через такие же степени закона ϑ :

$$\tilde{\vartheta}^n = R^n \varphi \vartheta^n, \quad n \geq 1. \quad (17)$$

Например, для любой борелевской функции $f: E \rightarrow [0, \infty)$ находим

$$\int f d(\tilde{\vartheta}^2) = R^2 \int f(xy) \varphi(x) \varphi(y) \vartheta(dx) \vartheta(dy) = R^2 \int f \varphi d(\vartheta^2),$$

что и дает (17) при $n = 2$ (метод индукции в сочетании с аналогичными выкладками позволяет доказать (17) при всех $n \geq 1$). В свою очередь, из (17) легко выводятся равенства

$$\tilde{P}^n f = R^n \frac{1}{\varphi} P^n (f\varphi), \quad n \geq 1,$$

означающие, что $\tilde{P}$ получается из P с помощью так называемого преобразования подобия [4] (говорят также, что $\tilde{X}$ получается из X в результате перехода к φ -процессу [6]).

Теорема 2. Случайное блуждание $\tilde{X}$ возвратно по Харрису [4] и, как следствие, группа E является возвратной.

Доказательство. В соответствии с [4, предложение 5.3] случайное блуждание $\tilde{X}$ является π -неприводимым и возвратным в том смысле, что $\tilde{H}^B > 0$ всюду в E и $\tilde{H}^B = 1$ п.в. в E всякий раз, когда $B \in \mathcal{E}_+$, где $\tilde{H}^B$ — аналог для $\tilde{X}$ функции

H^B из предложения 5. По предложению 3.13 из [4] свойство возвратности $\tilde{X}$ влечет существование харрисовского множества $E_1 \in \mathcal{E}_+$, т.е. множества, ограничение $\tilde{X}$ на которое является цепью Маркова, возвратной по Харрису.

Зададим $x \in E$ и $B \in \mathcal{E}_+$. Если $z \in E_1$ и $y = zx^{-1}$, то по предложению 5

$$\tilde{H}^B(x) = \tilde{H}^{yB}(yx) = \tilde{H}^{yB}(z),$$

а поскольку $z \in E_1$ и $\pi(yB) > 0$, то $\tilde{H}^{yB}(z) = 1$. Иными словами, $\tilde{H}^B(x) = 1$ для всех $x \in E$, и, таким образом, случайное блуждание $\tilde{X}$ возвратно по Харрису [4, определение 3.5]. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babillot M.* An introduction to Poisson boundaries of Lie groups.— Probability Measures on Groups: Recent Directions and Trends. Ed. by S. G. Dany and P. Graczyk. New Delhi: Narosa Publ. House, 2006, p. 1–90.
2. *Baldi P.* Caractérisation des groupes de Lie connexes récurrents. — Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist., 1981, v. 17, p. 281–308.
3. *Guivarc'h Y., Keane M., Roynette B.* Marches aléatoires sur les groupes de Lie. — Lecture Notes in Math., 1977, v. 624, 292 p.
4. *Nummelin E.* General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984, 156 p.
5. *Tweedie R. L.* Theory for Markov chains on a general state space. I, II. — Ann. Probab., 1974, v. 2, p. 840–864, 865–878.
6. *Woess W.* Random Walks on Infinite Graphs and Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 334 p.
7. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975, 654 с.
8. Ревюз Д. Цепи Маркова. М.: РФФИ, 1997, 431 с.
9. *Шур М. Г.* Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. III. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 4, с. 682–700.

Поступила в редакцию
27.IV.2015

© 2016 г.

**BARNDORFF-NIELSEN O. E.* ,
HEDEVANG E.* , SCHMIEGEL J.***

INCREMENTAL SIMILARITY AND TURBULENCE

В статье представлено математическое описание такого эмпирически наблюдаемого явления, как «подобие приращений». Это явление рассматривается с точки зрения теории случайных процессов. Приведен ряд нетривиальных примеров, некоторые из которых возникают при моделировании турбулентности.

Ключевые слова и фразы: универсальность, нормальное обратного гауссовское распределение, α -устойчивые процессы Леви, процессы типа BSS/LSS.

* Thiele Centre; Department of Mathematics, Aarhus University, 8000 Aarhus C, Denmark; e-mail: oebn@math.au.dk; schmiegel@eng.au.dk