Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рябинин, О характеристических функциях вероятностных распределений сумм со случайной расстановкой знаков, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 773–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:36:53

Пусть заданы $t, I, \mathbf{x}$ и δ . Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{x} \notin \Omega_+(I|t)$, следовательно, множество $I^* = \{i \in I: L_i(\mathbf{x}) = L_i(\mathbf{x})\}$ не пусто.

В точке $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ выполняются неравенства $L_i(\mathbf{z}) > L_i(\mathbf{x})$ ($i \in I \setminus I^*$). Уменьшая, если необходимо, число δ , можно добиться того, чтобы эти неравенства выполнялись в шаре $B(\mathbf{x}; \delta)$.

Так как линейные формы L_j попарно различны, то, привлекая соображения размерности, нетрудно показать, что существует точка $\mathbf{y} \in \Omega \cap B(\mathbf{x}; \delta)$, удовлетворяющая условию $L_i(\mathbf{y}) \neq L_j(\mathbf{y})$ ($i, j \in I^* \cup \{t\}, i \neq j$). Выберем индекс s , на котором достигается минимум $L_i(\mathbf{y})$ при $i \in I^* \cup \{t\}$. Ясно, что тогда $\mathbf{y} \in \Omega_+(J|s)$ для $J = I \cup \{t\} \setminus \{s\}$, что и требовалось.

Для того чтобы показать, что $\bar{b}_k = \underline{b}_k$, достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ $\bar{b}_k \leq \underline{b}_k + \varepsilon$.

Пусть задано число ε и $\underline{b}_k = H_t(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in \Omega(I|t) \cap \Lambda$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $|L_i(\mathbf{x}) - L_i(\mathbf{y})| < \varepsilon$ при всех i , если $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2\delta$ (полагаем $|\mathbf{x}| = \sum |x_j|$), и построим для набора $(t, I, \mathbf{x}, \delta)$ набор $(s, J, \mathbf{y})$, существование которого утверждается в теореме 2.

Пусть $\mathbf{y}^*$ — точка, коллинеарная $\mathbf{y}$ и лежащая в $\Omega \cap \Lambda$. Тогда $|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{y}^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, следовательно, $\mathbf{y}^* \in \Omega_+(J|s) \cap B(\mathbf{x}; 2\delta)$.

Из наших построений теперь вытекает, что $\underline{b}_k = H_t(\mathbf{x}) = H_s(\mathbf{x})$, $\bar{b}_k \leq H_s(\mathbf{y}^*)$ и $|H_s(\mathbf{x}) - H_s(\mathbf{y}^*)| < \varepsilon$, что и требовалось.

Автор выражает благодарность Н. П. Салихову за постановку задачи и А. М. Зубкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: ИЛ, 1958, 374 с.
2. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984, 472 с.
3. Сализов Н. П. Об одном обобщении расстояния Чернова. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 294–314.

Поступила в редакцию
30.VIII.1999

© 2000 г.

РЯБИНИН А. А.*

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СО СЛУЧАЙНОЙ РАССТАНОВКОЙ ЗНАКОВ

Рассматривается случайный ряд $S = \sum_{k=1}^{\infty} \pm a_k$, $a_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, в котором расстановка знаков подчинена марковской зависимости с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p(+1, +1) & p(-1, +1) \\ p(+1, -1) & p(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для характеристической функции $f(z)$ суммы S получена формула

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(a_k z) + i(1 - 2\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{\infty} \cos(a_k z) \sin(a_{j+1} z),$$

где $\psi_j(z) = \mathbf{E}(t_j e^{izS_j})$ и $S_j = \sum_{k=1}^j \pm a_k$, $z \in \mathbf{C}^1$.

* Нижегородский государственный университет, механико-математический факультет, просп. Гагарина, 23, 603600 Нижний Новгород, Россия; e-mail: ryabinin@mm.unn.ac.ru

Ключевые слова и фразы: случайный ряд, марковская зависимость, характеристическая функция.

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, β, P) , где $\Omega = \{\omega: \omega = (t_1, \dots, t_n, \dots), t_n = \pm 1\}$; σ -алгебра β порождена цилиндрическими множествами $A_n(\delta) = \{\omega: \omega = (\delta_1, \dots, \delta_n, t_{n+1}, \dots), \delta_k = \pm 1\}$; вероятность P задается последовательностью конечномерных вероятностных распределений $\{P_n(t_1, \dots, t_n), t_k = \pm 1\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющих условию согласованности [1], так что $P\{A_n(\delta)\} = P_n(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Пусть $\{X_k(\omega) = t_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность координатных функций на (Ω, β, P) . Для совместного распределения $(X_1, \dots, X_n)$ имеем $P\{X_1(\omega) = t_1, \dots, X_n(\omega) = t_n\} = P_n(t_1, \dots, t_n)$.

С последовательностью действительных чисел $\{a_k: a_k > 0, \sum_{k=0}^\infty a_k < \infty\}$ ассоциируем случайный ряд на (Ω, β, P)

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^\infty a_k X_k(\omega). \quad (1)$$

Пусть $F(x)$ — функция распределения суммы S , μ — соответствующая $F(x)$ мера Лебега–Стилтьеса и $f(z)$ — характеристическая функция суммы S .

Основной причиной, побудившей нас обратиться к изучению рядов (1) на различных вероятностных пространствах, — это возможность конструктивного построения финитных мер Лебега–Стилтьеса с теми или иными желаемыми свойствами в виде вероятностных распределений μ сумм этих рядов. Процедура построения этих мер посредством рядов (1) облегчает изучение свойств их преобразований Фурье (характеристических функций) $f(z)$, позволяя получать удобные выражения для $f(z)$. Например, для независимого равновероятного способа расстановки знаков в (1), т.е. когда $P_n(t_1, \dots, t_n) = 2^{-n}$, в контексте бесконечных симметрических сверток Бернулли соответствующие вопросы изучались в [2], [3], в частности, имеем

$$f(z) = \prod_{k=1}^\infty \cos a_k z, \quad z \in \mathbb{C}^1. \quad (2)$$

В данной статье мы получим выражение для $f(z)$ в случае, когда расстановка знаков в (1) подчинена марковской зависимости, а именно, пусть

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} p(t_{k+1}, t_k), \quad (3)$$

$$\|p(t_{k+1}, t_k)\| = \begin{pmatrix} p(+1, +1) & p(-1, +1) \\ p(+1, -1) & p(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4)$$

В этом случае система координатных функций образует простую однородную марковскую цепь с фазовым пространством $\{\pm 1\}$, начальным распределением $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и матрицей переходных вероятностей (4). При $\alpha = \frac{1}{2}$ знаки расставляются независимо и равновероятно. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть ряд (1) рассматривается на (Ω, β, P) , где P определяется последовательностью (3), (4). Тогда для характеристической функции $f(z)$ суммы ряда (1) имеем

$$f(z) = \prod_{k=0}^\infty (\cos a_k z) + i(1-2\alpha) \sum_{j=0}^\infty \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^\infty (\cos a_k z) \sin(a_{j+1} z), \quad z \in \mathbb{C}^1, \quad (5)$$

$$\psi_j(z) = \sum_{\{t_1 = \pm 1, \dots, t_j = \pm 1\}} t_j e^{iz S_j} P_j(t_1, \dots, t_j). \quad (6)$$

В правой части (6) сумма берется по всевозможным наборам $t_1 = \pm 1, \dots, t_j = \pm 1$; $P_j(t_1, \dots, t_j)$ определяется посредством (3), (4), а $S_j = a_1 t_1 + \dots + a_j t_j$ — частичная сумма ряда (1).

Доказательство теоремы будет опираться на следующие леммы.

Лемма 1. В случае (3) имеем при $n = 2, 3, \dots$

$$P_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2^n \operatorname{ch}^{n-1} J} \exp \left\{ J \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{k+1} \right\}, \quad \text{где } J = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (7)$$

Доказательство. Матрицу переходных вероятностей (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2 \operatorname{ch} J} \begin{pmatrix} e^J & e^{-J} \\ e^{-J} & e^J \end{pmatrix}, \quad J = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Поэтому

$$p(t_{k+1}, t_k) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} J} \exp \{ J t_k t_{k+1} \}. \quad (8)$$

Обращаясь к (3) и учитывая (8), получаем (7). Лемма установлена.

Обратимся сейчас к характеристической функции $f_n(z)$ частичной суммы $S_n = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n$ ряда (1). Имеем $f_n(z) = \sum_{\{t_1 = \pm 1, \dots, t_n = \pm 1\}} \exp \{ i z S_n \} P_n(t_1, \dots, t_n)$, или, с учетом (7),

$$f_n(z) = \frac{1}{2^n \operatorname{ch}^{n-1} J} \sum_{\{t_1 = \pm 1, \dots, t_n = \pm 1\}} \exp \left\{ i z S_n + J \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{k+1} \right\}. \quad (9)$$

Наряду с $f_n(z)$ рассмотрим вспомогательную функцию $\psi_n(z)$, определенную посредством (6), или, опять же с учетом (7),

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2^n \operatorname{ch}^{n-1} J} \sum_{\{t_1 = \pm 1, \dots, t_n = \pm 1\}} t_n \exp \left\{ i z S_n + J \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{k+1} \right\}. \quad (10)$$

Выведем для системы $\{f_n(z), \psi_n(z)\}$, $n = 1, 2, \dots$, рекуррентное соотношение.

Лемма 2. Для $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} f_n(z) = \cos(a_n z) f_{n-1}(z) + i(1-2\alpha) \sin(a_n z) \psi_{n-1}(z), \\ \psi_n(z) = \sin(a_n z) f_{n-1}(z) + i(1-2\alpha) \cos(a_n z) \psi_{n-1}(z), \end{cases} \quad (11)$$

$$f_0(z) = 1, \quad \psi_0(z) = 0.$$

Доказательство. Для $n = 1$ (11) очевидно ввиду (3). Пусть $n \geq 2$. Имеем из (9), объединяя слагаемые, соответствующие наборам $(t_1, \dots, t_{n-1}, +1)$ и $(t_1, \dots, t_{n-1}, -1)$:

$$f_n(z) = \frac{1}{2^{n-1} \operatorname{ch}^{n-1} J} \sum_{\{t_1 = \pm 1, \dots, t_{n-1} = \pm 1\}} \exp \left\{ i z S_{n-1} + J \sum_{k=1}^{n-2} t_k t_{k+1} \right\} \operatorname{ch}(i a_n z + J t_{n-1}).$$

Поскольку $\operatorname{ch}(i a_n z + J t_{n-1}) = \cos(a_n z) \operatorname{ch}(J t_{n-1}) + i \sin(a_n z) \operatorname{sh}(J t_{n-1})$, а для $t_{n-1} = \pm 1$ $\operatorname{ch}(J t_{n-1}) = \operatorname{ch} J$, $\operatorname{sh}(J t_{n-1}) = t_{n-1} \operatorname{sh} J$, то $f_n(z) = \cos(a_n z) f_{n-1}(z) + i \operatorname{th} J \sin(a_n z) \psi_{n-1}(z)$. Учитывая, что $\operatorname{th} J = 1 - 2\alpha$, получим первое из соотношений (11). Аналогично устанавливается и второе соотношение. Лемма доказана.

Следствие. Для любого $n = 1, 2, \dots$ характеристическая функция $f_n(z)$ частичной суммы S_n ряда (1) имеет вид:

$$f_n(z) = \prod_{k=1}^n \cos(a_k z) + i(1-2\alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^n \cos(a_k z) \sin(a_{j+1} z). \quad (12)$$

Формула (12) получается итерацией первого из соотношений (11).

Доказательство теоремы. Ряд (1) сходится всюду на $(\Omega, \beta, \mathbf{P})$, что влечет слабую сходимость функций распределения частичных сумм к функции распределения суммы ряда [4]. Но в таком случае по теореме непрерывности [4] имеем $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}^1$. Обращаясь теперь к теореме Витали [5] и учитывая,

что $\forall r > 0, \max_{|z| < r} |f_n(z)| \leq \exp(r \sum_{k=1}^{\infty} a_k)$, приходим к выводу, что $f_n(z) \rightarrow f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^1$, и сходимость равномерная на компактах в $\mathbb{C}^1$.

Обратимся теперь к (11). Поскольку ввиду сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(a_k z)$ сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}^1$ [5], то формула (5) следует из равносходимости $\sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^n \cos(a_k z) \sin(a_{j+1} z)$ с частичными суммами $(n-1)$ -го порядка ряда, стоящего в правой части (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Особый интерес представляет ряд (1), когда $a_k = (1 - \xi)\xi^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. В этом случае вероятностное распределение μ суммы S сингулярно и сосредоточено на множестве $E_{\xi}[-1, 1]$ канторовского типа [6]. При $\alpha = \frac{1}{2}$ (расстановка знаков в (1) равновероятна и независима) функция распределения $F(x)$ есть функция Лебега («канторовская лестница») [6]. Это следует из формулы (2) для характеристической функции и теоремы единственности [4]. Соответствующее распределение μ (мера Кантора–Лебега на $[-1, 1]$) задает равномерное распределение единичной массы по канторовскому множеству E_{ξ} . При $\alpha \rightarrow 0$ распределения μ_{α} сумм рядов (1) определяют «выметание» единичной массы внутри канторовского множества к точкам ± 1 . При $\alpha = 0$ все распределение сосредоточено в точках ± 1 .

Автор благодарит чл.-корр. РАН В. В. Напалкова за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
2. Jessen B., Wintner A. Distribution functions and the Riemann zeta function. — Trans. Amer. Math. Soc., 1935, v. 38, p. 48–88.
3. Kerscher R., Wintner A. On symmetric Bernoulli convolutions. — Amer. J. Math., 1935, v. 57, p. 541–545.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
5. Титчмарш Е. Теория функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951, 506 с.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965, 615 с.

Поступила в редакцию
12.IV.1999

© 2000 г.

ШИПИЛЕВА А. В.*

ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ВЫРОЖДЕНИЯ МАРКОВСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

Изучается распределение момента вырождения марковского ветвящегося процесса с одним типом частиц. Получены асимптотически точные оценки распределения момента вырождения для докритических, критических и надкритических процессов.

Ключевые слова и фразы: марковский ветвящийся процесс, инфинитезимальная производящая функция, распределение момента вырождения.

* Волгоградский государственный университет, 2-я Продольная ул., 30, 400062 Волгоград, Россия; e-mail: shalla@mailru.com