Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шипилева, Оценки распределения момента вырождения марковского ветвящегося процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 776–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:33:07

что $\forall r > 0, \max_{|z| < r} |f_n(z)| \leq \exp(r \sum_{k=1}^{\infty} a_k)$, приходим к выводу, что $f_n(z) \rightarrow f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^1$, и сходимость равномерная на компактах в $\mathbb{C}^1$.

Обратимся теперь к (11). Поскольку ввиду сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(a_k z)$ сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}^1$ [5], то формула (5) следует из равносходимости $\sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^n \cos(a_k z) \sin(a_{j+1} z)$ с частичными суммами $(n-1)$ -го порядка ряда, стоящего в правой части (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Особый интерес представляет ряд (1), когда $a_k = (1 - \xi)\xi^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. В этом случае вероятностное распределение μ суммы S сингулярно и сосредоточено на множестве $E_{\xi}[-1, 1]$ канторовского типа [6]. При $\alpha = \frac{1}{2}$ (расстановка знаков в (1) равновероятна и независима) функция распределения $F(x)$ есть функция Лебега («канторовская лестница») [6]. Это следует из формулы (2) для характеристической функции и теоремы единственности [4]. Соответствующее распределение μ (мера Кантора–Лебега на $[-1, 1]$) задает равномерное распределение единичной массы по канторовскому множеству E_{ξ} . При $\alpha \rightarrow 0$ распределения μ_{α} сумм рядов (1) определяют «выметание» единичной массы внутри канторовского множества к точкам ± 1 . При $\alpha = 0$ все распределение сосредоточено в точках ± 1 .

Автор благодарит чл.-корр. РАН В. В. Напалкова за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
2. Jessen B., Wintner A. Distribution functions and the Riemann zeta function. — Trans. Amer. Math. Soc., 1935, v. 38, p. 48–88.
3. Kerscher R., Wintner A. On symmetric Bernoulli convolutions. — Amer. J. Math., 1935, v. 57, p. 541–545.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
5. Титчмарш Е. Теория функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951, 506 с.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965, 615 с.

Поступила в редакцию
12.IV.1999

© 2000 г.

ШИПИЛЕВА А. В.*

ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ВЫРОЖДЕНИЯ МАРКОВСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

Изучается распределение момента вырождения марковского ветвящегося процесса с одним типом частиц. Получены асимптотически точные оценки распределения момента вырождения для докритических, критических и надкритических процессов.

Ключевые слова и фразы: марковский ветвящийся процесс, инфинитезимальная производящая функция, распределение момента вырождения.

* Волгоградский государственный университет, 2-я Продольная ул., 30, 400062 Волгоград, Россия; e-mail: shalla@mailru.com

Рассмотрим однородный марковский ветвящийся процесс $\{\xi_t, t \geq 0\}$ с одним типом частиц и непрерывным временем (см. [1], [2]). Пусть $p_n(t) = P\{\xi_t = n, f^t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n$ — производящая функция процесса, которая (см. [1], [2]) удовлетворяет прямому и обратному уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(z) \frac{\partial}{\partial z} f^t(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z)),$$

где $v(z) = (\partial/\partial t) f^t(z)|_{t=0}$ — инфинитезимальная производящая функция процесса ξ_t . Обозначим $\tau = \inf\{t: \xi_t = 0\}$ — момент вырождения ($\inf \phi = \infty$), тогда $P\{\tau > t\} = 1 - f^t(0)$ — распределение момента вырождения.

Т. Е. Харрис отмечал, что в общем случае нелегко определить распределение момента вырождения явно (см. [1, с. 55]).

В работе Зе (см. [4, с. 293]) получены оценки распределения момента вырождения для вложимого критического процесса Гальтона-Ватсона.

Целью данной работы является получение оценок распределения момента вырождения τ для докритических, критических и надкритических марковских ветвящихся процессов.

Если процесс ξ_t вырождающийся (т.е. критический или докритический), то τ является собственной случайной величиной и ее функция распределения $F_\tau(t)$ выражается через производящую функцию процесса:

$$F_\tau(t) = P\{\tau \leq t\} = P\{\xi_t = 0\} = f^t(0).$$

В случае надкритического процесса $P\{\tau = \infty\} = 1 - q$, где $q = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_t = 0\}$ — вероятность вырождения процесса. Поэтому в случае надкритического процесса и $0 < q < 1$ через $F_\tau(t)$ обозначим условную функцию распределения

$$F_\tau(t) = P\{\tau \leq t \mid \tau < \infty\} = \frac{1}{q} P\{\tau \leq t\} = \frac{1}{q} f^t(0).$$

Случай $q = 0$ — тривиален, поскольку для него $P\{\tau \neq \infty\} = 0$.

Теорема 1. Если $v'(1) \leq 0$ и $v'(0) = -1$, то

$$e^{-t} \leq P\{\tau > t\} \leq \frac{2}{2+t}.$$

Доказательство. Условие $v'(1) \leq 0$ означает, что рассматриваемый марковский процесс ξ_t является докритическим или критическим. Функция $v(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией докритического или критического ветвящегося процесса с непрерывным временем в том и только том случае, если она допускает представление (см. [3])

$$v(z) = \alpha \left[1 - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} (z^n - 1) \right],$$

где $\alpha > 0$, а $\lambda_n, n = 2, 3, \dots$ — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \leq 1$. Условие $v'(0) = -1$ означает, что $\alpha = 1$ и $v(z)$ имеет вид $v(z) = 1 - z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n (z^n - 1)/n$.

Получим оценки $v(\theta)$ при $\theta \in (0, 1)$. Функцию $v(\theta)$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} v(\theta) &= (1 - \theta) \left[1 - \frac{\lambda_2}{2} (1 + \theta) - \frac{\lambda_3}{3} (1 + \theta + \theta^2) - \dots \right] \\ &= (1 - \theta) \left[\delta + \lambda_2 \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \theta) \right) + \lambda_3 \left(1 - \frac{1}{3} (1 + \theta + \theta^2) \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

где $\delta = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$.

В принятых обозначениях $v(\theta) = (1 - \theta) [\delta + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n u_n(\theta)]$. Заметим теперь, что $u_n(\theta) \geq u_2(\theta)$ при $n = 3, 4, \dots$. Действительно,

$$\begin{aligned} u_n(\theta) &= \frac{1}{n} \left((1 - \theta) + (1 - \theta^2) + \dots + (1 - \theta^{n-1}) \right) \\ &\geq \frac{1}{n} \left((1 - \theta) + (1 - \theta) + \dots + (1 - \theta) \right) = \frac{n-1}{n} (1 - \theta) \geq \frac{1}{2} (1 - \theta) = u_2(\theta). \end{aligned}$$

Кроме того, $u_n(\theta) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $v(\theta) \geq \frac{1}{2}(1 - \theta)^2$. Нетрудно показать, что $v(\theta) \leq 1 - \theta$. Таким образом, получено двустороннее неравенство для $v(\theta)$:

$$\frac{1}{2} (1 - \theta)^2 \leq v(\theta) \leq 1 - \theta. \quad (1)$$

Обозначим $\theta(t) = f^t(0)$, тогда $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\theta} = v(\theta)$ с начальным условием $\theta|_{t=0} = 0$.

Из неравенства (1) следует, что $\frac{1}{2} (1 - \theta)^2 \leq \dot{\theta} \leq (1 - \theta)$. Разрешая дифференциальное неравенство относительно $\theta(t)$, получим $t/(2 + t) \leq \theta(t) \leq 1 - e^{-t}$. Из последнего неравенства и получается оценка распределения момента вырождения τ , приведенная в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $v'(1) > 0$ и $v'(0) = -1$, то

$$e^{-t} \leq 1 - F_{\tau}(t) \leq \frac{1 - q}{g(t, q) - q},$$

где q — наименьший неотрицательный корень уравнения $v(z) = 0$ ($0 < q < 1$) и $g(t, q) = \exp\{t(1 - q)/(1 + q)\}$.

Доказательство. Рассмотрим надкритический марковский ветвящийся процесс ξ_t ($v'(1) > 0$). Как следует из результатов работы [3], инфинитезимальная производящая функция процесса ξ_t допускает представление в виде

$$v(z) = \alpha \left[q - z + (1 - q) \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{z^n - q^n}{1 - q^n} \right], \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ и λ_n , $n = 2, 3, \dots$, — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = 1$. Условие $v'(0) = -1$ означает, что $\alpha = 1$. Используя представление (2), получим оценки $v(\theta)$ при $\theta \in (0, q)$. Запишем $v(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} v(\theta) &= (q - \theta) \left[\lambda_2 \left(1 - \frac{q + \theta}{1 + q} \right) + \lambda_3 \left(1 - \frac{\theta^2 + q\theta + q^2}{1 + q + q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_4 \left(1 - \frac{\theta^3 + \theta^2 q + \theta q^2 + q^3}{1 + q + q^2 + q^3} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Обозначим $u_2(\theta) = (1 - \theta)/(1 + q)$,

$$u_n(\theta) = 1 - \frac{\theta^{n-1} + \theta^{n-2}q + \dots + q^{n-1}}{1 + q + \dots + q^{n-1}}, \quad n = 3, 4, \dots$$

В принятых обозначениях $v(\theta) = (q - \theta) \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n u_n(\theta)$. Заметим, что $u_n(\theta) \geq u_2(\theta)$ при $n = 3, 4, \dots$. Действительно, представив $u_n(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} u_n(\theta) &= (1 - \theta) \left[(1 + \theta + \dots + \theta^{n-2}) + q(1 + \theta + \dots + \theta^{n-3}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + q^{n-3}(1 + \theta) + q^{n-2} \right] (1 + q + \dots + q^{n-1})^{-1}, \end{aligned}$$

получим

$$u_n(\theta) \geq (1 - \theta) \frac{1 + q + \dots + q^{n-2}}{1 + q + \dots + q^{n-1}} \geq \frac{1 - \theta}{1 + q} = u_2(\theta).$$

Следовательно, $v(\theta) \geq (q - \theta)(1 - \theta)/(1 + q)$. Очевидно также, что $v(\theta) \leq q - \theta$. Таким образом, получено двустороннее неравенство для $v(\theta)$: $(q - \theta)(1 - \theta)/(1 + q) \leq v(\theta) \leq q - \theta$. Решая дифференциальное неравенство $(q - \theta)(1 - \theta)/(1 + q) \leq \dot{\theta} \leq q - \theta$ при начальном условии $\theta|_{t=0} = 0$, получим

$$\frac{q(g(t, q) - 1)}{g(t, q) - q} \leq \theta(t) \leq q(1 - e^{-t}), \quad (3)$$

где функция $g(t, q)$ определена в формулировке теоремы и $\theta(t) = f^t(0)$. Из неравенства (3) и определения функции $F_r(t)$ следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Правая часть неравенства теоремы 2 стремится к правой части неравенства теоремы 1 при $q \rightarrow 1$.

В заключение автор выражает глубокую признательность В.В. Горайнову за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 356 с.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
3. Горайнов В. В. Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные. — Матем. сб., 1993, т. 184, № 5, с. 55–74.
4. Sze M. Markov processes associated with critical Galton–Watson process with application to extinction probabilities. — Adv. Appl. Probab., 1976, v. 8, № 2, p. 278–295.

Поступила в редакцию
11.III.1999

© 2000 г.

CANTO E CASTRO L.*, DE HAAN L.**;
GRAÇA TEMIDO M.***

RARELY OBSERVED SAMPLE MAXIMA¹⁾

Для выборочных максимумов, наблюдаемых в почти геометрические моменты времени, определяются предельные распределения и их области притяжения.

Ключевые слова и фразы: выборочный максимум, область притяжения, геометрические моменты времени.

1. Introduction. Suppose $X_1, X_2, \dots$ are independent and identically distributed random variables with distribution function F . Suppose we observe $M_{k_n} := \max\{X_1, X_2, \dots, X_{k_n}\}$ for $n = 1, 2, \dots$, where $\{k_n\}$ is a nondecreasing integer sequence satisfying

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e^d \quad (1)$$

with $d > 0$.

* University of Lisbon.

** Erasmus University Rotterdam; e-mail: ldehaan@few.eur.nl

*** University of Coimbra.

¹⁾ Partially supported by JNICT/PRAXIS XXI/FEDER.