Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, Рецензии на книги: Bertoin G. “Levy Processes”; Sato K.-I. “Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 819–821

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:44:59

© 2000 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Bertoin G. **Lévy Processes**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 1998, x+266 p. Sato K.-I. **Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, xii+486 p.

Обе книги, изданные Cambridge University Press соответственно в сериях «Cambridge Tractats in Mathematics» (v. 121) и «Cambridge Studies in Advanced Mathematics» (v. 68), посвящены изложению разнообразных свойств того обширного класса процессов с однородными приращениями, которые принято теперь называть «процессами Леви».

Авторы являются признанными специалистами в своей области, и это объясняет тот большой интерес, с которым читатели ожидали появления этих книг, отдельные части которых в разнообразных формах и на различных языках можно было уже давно встретить во многих вероятностных департаментах разных стран.

По своему научному складу авторы относятся к разным школам. Жан Бертюэн — типичный представитель «общей теории случайных процессов». К.-И. Сато — типичный представитель школы вероятностных аналитиков.

Это наложило свой естественный отпечаток и на отбор материала и стиль изложения, что счастливым образом дает читателям возможность познакомиться с разных позиций с весьма широким кругом вопросов, относящихся как собственно к процессам Леви, так и к родственным им процессам.

О содержании этих монографий можно судить прежде всего по их оглавлениям.

J. Bertoin. Lévy Processes.

Предисловие.

0. Вспомогательные результаты.

I. Процессы Леви как марковские процессы.

II. Элементы теории потенциала.

III. Субординаторы.

IV. Локальные времена и экскурсии марковских процессов.

V. Локальные времена процессов Леви.

VI. Флуктуационная теория.

VII. Процессы Леви без положительных скачков.

VIII. Устойчивые процессы и самоподобность.

В каждой главе приведены упражнения и историко-библиографическая справка.

Оглавление книги

Ken-Iti Sato. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.

Предисловие.

Основные обозначения.

Гл. 1. Базисные примеры.

Гл. 2. Характеризация и существование процессов Леви. Аддитивные процессы.

Гл. 3. Устойчивые процессы и их обобщения.

Гл. 4. Разложение Леви-Ито выборочных функций.

Гл. 5. Свойства процессов Леви по распределению.

Гл. 6. Субординаторы и преобразование плотностей.

Гл. 7. Рекуррентность и транзитивность.

Гл. 8. Теория потенциала для процессов Леви.

Гл. 9. Факторизация Винера-Хопфа.

Каждую главу завершают упражнения и замечания историко-библиографического характера. Фундаментальная важность процессов Леви, являющихся процессами с однородными независимыми приращениями, и их обобщений — аддитивных процессов (для которых предполагается независимость приращений, но не предполагается их однородность) видна уже из того, что к ним принадлежат такие базисные процессы, как броуновское движение, процессы Пуассона и Коши, устойчивые процессы и др.

Для каждого фиксированного момента времени класс процессов Леви находится во взаимно однозначном соответствии с безгранично-делимыми распределениями. Аддитивные процессы описываются *системой* безгранично-делимых распределений.

Процессы Леви являются прототипом марковских процессов и семимартингалов — того класса процессов, с которыми ассоциируется современное «стохастическое исчисление». Процессы Леви широко используются в самых разнообразных приложениях. Они являются базовыми процессами при построении моделей в теории очередей, страховании, финансовой математике, теории риска и др.

Исторически, первые исследования, приведшие к созданию теории процессов Леви, восходят к двадцатым годам прошлого столетия и связаны с именами де Финетти, Колмогорова, Леви, Хинчина и позднее — Ито и Дуба. Знаменитая формула Леви-Хинчина, ранее найденная Колмогоровым в предположении конечности вторых моментов, установила связь между безгранично-делимыми распределениями и процессами со стационарными независимыми приращениями. Хорошо известна исключительная роль книги Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин», вышедшей в 1949 г. Можно смело утверждать, что многие поколения вероятностников выросли на этой книге.

Скажем несколько подробнее о содержании глав рецензируемых книг.

Ж. Бертуэн начинает свое изложение введением основных вероятностных понятий, используемых в последующем изложении (безграничная делимость, процессы Пуассона, броуновское движение, мартингалы, ...).

Связи процессов Леви с общей теорией марковских процессов и теорией потенциала рассматриваются в первых двух главах. Здесь представлены основные вероятностные свойства этих процессов — свойства траекторий, асимптотическое поведение на бесконечности, Автор систематически демонстрирует, как многие свойства могут быть получены, основываясь на марковском характере рассматриваемых процессов и с использованием аналитического аппарата общей теории марковских процессов (полугруппы, резольвенты, инфинитезимальные операторы, ...) и теории потенциала (емкость, дуальность, обращение времени, полярные множества, энергия, ...).

Субординаторы представляют собой подкласс процессов Леви с неубывающими траекториями. Этим процессам отводится третья глава, в которой излагаются многие интересные результаты — законы арксинуса, скорость роста траекторий, хаусдорфова размерность множества точек роста траектории. Субординаторы играют ключевую роль в четвертой и пятой главах, в которых рассматривается «теория экскурсий» Ито и «теория Леви» локального времени.

Как известно, «флуктуационная теория» призвана изучать совместное поведение процессов и их экстремумов. (В случае дискретного времени соответствующая теория, опирающаяся на факторизацию Винера-Хопфа, изложена в монографиях Спичера, Феллера, Боровкова). Для процессов Леви «флуктуационная теория» представлена в шестой главе, в которой собрано большое количество важных формул для распределений, связанных с этими процессами и их экстремумами.

Седьмая глава посвящена процессам Леви, у которых отсутствуют положительные скачки. В этом случае «флуктуационная теория» становится простой, а соответствующие результаты носят явный и законченный характер. Вот один из результатов (Takács L.), дающий представление об излагаемом здесь материале.

Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — процесс Леви без положительных скачков. Тогда вероятность того, что этот процесс впервые выйдет из интервала $[-x, y]$ через верхнюю границу y ($x, y > 0$) равна $w(x)/w(x+y)$, где $w: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ есть единственная абсолютно непрерывная возрастающая функция с преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} w(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}$$

где кумулянта $\psi(\lambda)$ ($\mathbb{E} e^{\lambda X_t} = e^{t\psi(\lambda)}$) задается формулой

$$\psi(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2} b\lambda^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x I(x > -1)) \Pi(dx).$$

Восьмая глава отводится изучению свойств α -устойчивых процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$, т.е. процессов Леви со свойством автомодельности (для каждого $k > 0$ $\text{Law}(k^{-1/\alpha} X_{kt}; t \geq 0) = \text{Law}(X_t; t \geq 0)$). Изучаются такие свойства, как асимптотическое поведение при больших и малых временах, представлены результаты относительно свойств таких процессов при фиксировании их значений в некоторый момент времени T , свойств их экскурсий и др.

Книга К.-И. Сато содержит большой аналитический материал, относящийся и к процессам Леви, и к теории безгранично-делимых распределений. Сам автор отмечает, что десять глав его книги можно разбить на три части.

Первая часть — это главы 1 и 2 (занимающие 68 страниц), дающие богатый фактический материал: пуассоновские и составные пуассоновские процессы, броуновское движение, характеристические функции, определение и свойства процессов Леви, аддитивные процессы, безгранично-делимые распределения, марковское свойство и др.

Вторую часть книги составляют главы 3–5 (127 с.). Здесь представлены фундаментальные результаты об устойчивых процессах, о разложении Леви–Ито выборочных функций и дается большой фактический материал относительно свойств по распределению процессов Леви. Сам автор рассматривает эти главы как фундамент, на котором основано все последующее изложение — в большой по объему третьей части (230 с.). Составляющие эту часть главы 6–10 достаточно независимы друг от друга и в них изложен материал относительно субординаторов, абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных распределений аддитивных процессов, приводятся критерии рекуррентности и транзиентности, свойства унимодальности и мультимодальности распределений безгранично-делимых законов, теория потенциала, факторизация Винера–Хопфа и т.п.

В обеих книгах много дополнительного материала включено в упражнения, а историко-библиографические справки дают ясное и четкое представление об истории вопроса и об авторах, внесших свой вклад в теорию процессов Леви и родственных им процессов.

Монографии Ж. Бертюэна и К.-И. Сато заслуживают самой высокой оценки. Они хорошо написаны, содержат богатый материал и будут служить как независимые руководства для широкого круга читателей. Остается лишь только пожелать, чтобы эти монографии были переведены, и как можно скорее, на русский язык.

16.03.2000

А. Н. Ширяев

Kallenberg O. **Foundations of Modern Probability**. New York: Springer-Verlag, 1997, xii + 523 p.

Рецензируемая монография по многим характеристикам выделяется из большого количества книг по теории вероятностей, появившихся в последние годы. Ее автору удалось, не выходя за рамки обычного для монографии объема (около 500