Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 260–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:37:12

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 51
Выпуск 2, 2006 год
апрель, май, июнь

© 2006 г. **БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.***

О БОЛЬШИХ И СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА. I¹⁾

Исследуется асимптотика вероятности попадания суммы независимых одинаково распределенных случайных векторов в малый куб с вершиной в точке x в следующих двух случаях.

А. Когда относительные (нормированные) отклонения x/n (n — число слагаемых в сумме) находятся в области аналитичности функции отклонений $\Lambda(\alpha)$ слагаемого (если при этом $|x|/n \rightarrow \infty$, то говорят о *сверхбольших* отклонениях).

В. Когда имеет место альтернативная возможность, т.е. x/n располагается вне области аналитичности функции $\Lambda(\alpha)$.

В задачах А, В асимптотика вероятностей сверхбольших отклонений (когда $|x/n| \rightarrow \infty$), так же как асимптотика вероятностей «обычных» больших отклонений в задаче В (когда x/n отделено от математического ожидания слагаемого и сравнимо с константой), во многом оставалась не изученной. Настоящая работа, состоящая из двух частей, посвящена, главным образом, решению задачи А для сверхбольших отклонений.

В части I приводится решение задачи А в общем многомерном случае. При этом в качестве первого шага используется преобразование Крамера, позволяющее свести задачу о сверхбольших отклонениях исходной суммы к задаче о нормальных отклонениях суммы преобразованных векторов. Затем используется интегро-локальная или локальная теорема для сумм случайных векторов в схеме серий в области нормальных отклонений. Нужные версии этих теорем содержатся в [11] и в § 5. В части I приведена также схема решения задачи В, которой будет посвящена отдельная работа.

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-01-00810, НШ-2139.2003.1 и INTAS № 02-51-5019.

Если распределение суммы в некоторой окрестности точки x абсолютно непрерывно, то изучается асимптотика соответствующей плотности в этой точке.

Ключевые слова и фразы: функция отклонений, большие отклонения, сверхбольшие отклонения, интегро-локальная теорема, схема серий, преобразование Крамера.

§ 1. Введение

Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые d -мерные случайные векторы, имеющие общее распределение $\mathbf{F}$. Скалярное произведение и норму в d -мерном пространстве Евклида $\mathbf{R}^d$ обозначим соответственно $\langle \alpha, \beta \rangle$ и $|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}$. Подмножество векторов в $\mathbf{R}^d$ с целочисленными координатами обозначим $\mathbf{Z}^d$.

Везде в настоящей работе будем предполагать выполненным условие невырожденности: для любого единичного вектора $e \in \mathbf{R}^d$ случайная величина $\langle e, \xi \rangle$ невырождена (ее распределение не сосредоточено в одной точке).

Преобразование Лапласа над распределением $\mathbf{F}$ и характеристическую функцию случайного вектора ξ обозначим соответственно

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi \rangle}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^d; \quad f(t) = \varphi(it) = \mathbf{E}e^{i\langle t, \xi \rangle}, \quad t \in \mathbf{R}^d.$$

Будем использовать следующие условия о структуре распределения $\mathbf{F}$ невырожденного случайного вектора ξ .

Невырожденный случайный вектор ξ называют *арифметическим* (имеющим арифметическое распределение), если $\mathbf{P}\{\xi \in \mathbf{Z}^d\} = 1$ и для некоторого $y_0 \in \mathbf{Z}^d$ такого, что $\mathbf{P}\{\xi = y_0\} > 0$, группа по сложению, порожденная множеством $\{y: \mathbf{P}\{\xi = y_0 + y\} > 0\}$, совпадает с $\mathbf{Z}^d$. В силу леммы 21.6 в [10, с. 235] невырожденный вектор ξ является арифметическим тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие.

[Z]. (Условие арифметичности.) Для любого $t \in \mathbf{Z}^d$

$$f(2\pi t) = 1,$$

и для любого $t \notin \mathbf{Z}^d$

$$|f(2\pi t)| < 1.$$

Невырожденную скалярную случайную величину ξ называют *решетчатой с шагом решетки h* (имеющей решетчатое распределение), если для некоторых $c \in \mathbf{R}^1$ и $h > 0$ случайная величина $\xi' = c + h^{-1}\xi$ является арифметической. Если это свойство не выполнено, то случайную величину ξ называют *нерешетчатой* (имеющей нерешетчатое распределение). В силу сказанного выше скалярная случайная величина ξ является нерешетчатой тогда и только тогда, когда для всех $t \neq 0$ выполняется $|f(t)| < 1$.

Говорят, что невырожденный случайный вектор ξ является *нерешетчатым* (имеет нерешетчатое распределение), если для любого единичного вектора $e \in \mathbf{R}^d$ случайная величина $\langle e, \xi \rangle$ является нерешетчатой, т.е. выполнено следующее условие.

[R]. (Условие нерешетчатости.) Для любого $e \in \mathbf{R}^d$, $|e| = 1$, $t \neq 0$

$$|f(et)| < 1.$$

В известном смысле условия [R] и [Z] исчерпывают все возможности (см. [5]), поскольку всегда с помощью линейного невырожденного преобразования можно перевести изучаемый случайный вектор ξ в случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ такой, что либо этот вектор ζ является арифметическим, либо он является нерешетчатым, либо для некоторого $m \in \{1, \dots, d-1\}$ первые m координат $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ этого вектора составляют арифметический подвектор, а остальные $d-m$ координат $(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_d)$ — нерешетчатый.

Нам понадобится более сильное, чем [R], условие, зависящее от параметра $\gamma \in (0, \infty]$ (условие Крамера на характеристическую функцию). [R $^\gamma$].

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| \leq e^{-d\gamma}.$$

Отметим, что константа $\gamma > 0$, которая занята в условии [R $^\gamma$] и которая характеризует «силу» этого условия, будет играть важную роль в интегро-локальных теоремах (см. теорему 1.1 ниже). Если распределение $\mathbf{F}$ абсолютно непрерывно, то для него выполнено условие [R $^\infty$].

Везде в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что выполнено также следующее *моментное условие Крамера*.

[C]. Множество $\mathcal{A} = \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$ телесно, т.е. содержит в себе непустое открытое множество.

Функция *уклонений*, отвечающая случайному вектору ξ , определяется как *преобразование Лежандра* над функцией $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ (см. [1]):

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d. \quad (1.1)$$

Как вероятностная характеристика она достаточно полно изучена в [2]–[4]. В частности, известно, что функция уклонений неотрицательна, выпукла и полунепрерывна снизу [4].

При выполнении условия [C] функция уклонений играет определяющую роль при описании вероятностей больших уклонений (в соответствующих областях) сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$, о чем свидетельствует теорема 1.1 (см. ниже, а также [5], [4], [8], [9]).

Обозначим $\Delta[x] = \{y = (y_1, \dots, y_d): x_i \leq y_i < y_i + \Delta, 1 \leq i \leq d\}$ куб в пространстве $\mathbf{R}^d$ с вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$ и со стороной $\Delta > 0$. Интегро-локальными теоремами для сумм $S(n)$ мы называем

(см. [8], [9]) утверждения об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ вероятности

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}, \quad (1.2)$$

где вектор $x = x(n)$ и положительное число $\Delta = \Delta(n)$ зависят, вообще говоря, от n . Положим $a = \mathbf{E}\xi$. Поскольку $\mathbf{E}S(n) = an$, то количество $s = |x - an|$ в (1.2) характеризует отклонение суммы $S(n)$ от наиболее вероятного значения an . Если $|x - an| = O(\sqrt{n})$, то в случае конечного второго момента $\mathbf{E}|\xi|^2$ такие отклонения называют *нормальными отклонениями*; если $s = |x - an| \gg \sqrt{n}$, $s = o(n)$, то такие отклонения часто называют *умеренно большими отклонениями* сумм $S(n)$. Если $s = |x - an|$ имеет порядок cn , т.е. $\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1}|x - an| > 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1}|x - an| < \infty$, то такие отклонения образуют «обычные» большие отклонения (или просто *большие отклонения*). Если при этом точка $\alpha = x/n$ принадлежит области аналитичности функции $\Lambda(\alpha)$, то мы будем говорить о *регулярных* больших отклонениях.

Отклонения $s = |x - an|$, для которых $s/n \rightarrow \infty$, мы будем называть «сверхбольшими отклонениями» сумм случайных векторов. Настоящая статья посвящена, во многом, изучению сверхбольших отклонений сумм $S(n)$.

Зная асимптотику (1.2) в интегро-локальной теореме, мы можем оценить соответствующие вероятности в интегральной теореме; например, можем оценить вероятности $\mathbf{P}\{S(n) \in rB\}$, где вещественное $r = r(n)$ зависит от n , а измеримое множество $B \subseteq \mathbf{R}^d$ фиксировано. Для этого следует аппроксимировать «сверху» и «снизу» множество rB (если оно имеет достаточно гладкую границу) объединением непересекающихся кубов $\Delta(x)$ и воспользоваться асимптотикой вероятностей (1.2). Очевидно, что при этом утверждение интегро-локальной теоремы тем сильнее, чем быстрее в этом утверждении параметр Δ может стремиться к 0. Чем меньше Δ , тем точнее будет аппроксимация множества rB объединениями кубиков. Скажем, если выполнено только условие $[R]$, то интегро-локальная теорема в области больших отклонений верна для любого фиксированного i , стало быть, для достаточно медленно стремящегося к нулю параметра Δ . Если же выполнено условие $[R']$, то параметр Δ может убывать экспоненциально быстро, как функция $e^{-n\gamma_1}$ для любого $\gamma_1 < \gamma$ (см. теорему 1.1, приведенную ниже).

Оказывается, что при выполнении условия $[C]$ интегро-локальные теоремы для сумм случайных векторов в области *нормальных, умеренно больших и регулярных больших отклонений* допускают единую формулировку. Чтобы ее привести, введем ряд обозначений и напомним некоторые известные факты, которые можно найти, например, в [4].

Для краткости *градиент* функции $g = g(\lambda): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^1$ условимся обозначать $g'(\lambda) = \text{grad } g(\lambda) \in \mathbf{R}^d$. В частности, $A'(\lambda) = \text{grad } A(\lambda) =$

$\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$. Рассмотрим наряду с $\mathcal{A} = \{\lambda: A(\lambda) < \infty\}$ множество $\mathcal{A}' = \{\alpha = A'(\lambda) \in \mathbf{R}^d: \lambda \in \mathcal{A}\}$. Если выполнено условие [C], то эти множества непусты и имеют непустые внутренности $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}')$. Функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ аналитична в области $(\mathcal{A}')$, и для $\alpha \in (\mathcal{A}')$ вектор $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$ является точкой, в которой достигается супремум в определении (1.1), т.е. $\Lambda(\alpha) = \langle \lambda(\alpha), \alpha \rangle - A(\lambda(\alpha))$ для $\alpha \in (\mathcal{A}')$. Матрица вторых производных $\Lambda''(\alpha)$ положительно определена в области $(\mathcal{A}')$. Обратная к ней матрица совпадает с матрицей $A''(\lambda(\alpha))$:

$$(\Lambda''(\alpha))^{-1} := \sigma^2(\alpha) = A''(\lambda(\alpha)).$$

При этом матрица $\sigma^2(\alpha)$ является ковариационной матрицей для случайного вектора $\xi^{(\alpha)}$ с распределением

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(B) := \mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} \in B\} = \frac{\mathbf{E}(e^{\langle \lambda(\alpha), \xi \rangle}; \xi \in B)}{\varphi(\lambda(\alpha))}, \quad \alpha \in (\mathcal{A}'), \quad (1.3)$$

так что преобразование Лапласа для $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ имеет вид

$$\mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi^{(\alpha)} \rangle} = \frac{\varphi(\lambda(\alpha) + \lambda)}{\varphi(\lambda(\alpha))}, \quad \alpha \in (\mathcal{A}').$$

Здесь распределение $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ есть так называемое *преобразование Крамера* в точке $\lambda(\alpha)$ над распределением $\mathbf{F}$ вектора ξ . Очевидно, что распределения $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ взаимно абсолютно непрерывны. В частности, если распределение $\mathbf{F}$ случайного вектора ξ имеет плотность $f(x)$, то и распределение $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ также будет иметь плотность

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\langle \lambda(\alpha), x \rangle}}{\varphi(\lambda(\alpha))} f(x), \quad \alpha \in (\mathcal{A}'), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Наряду с уже введенными в рассмотрение структурными условиями [Z], [R], [R'] нам понадобится следующее условие.

$[\mathbf{R}_{(\text{den})}]$. Распределение $\mathbf{F}$ абсолютно непрерывно и для любого компакта $K \subseteq (\mathcal{A}')$ плотности $f^{(\alpha)}(x)$ распределения $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ равномерно ограничены:

$$\sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d} f^{(\alpha)}(x) < \infty.$$

Рассмотрим теперь свойства преобразования Крамера $\mathbf{F}^{(\alpha)}$. Важно отметить, что в любой точке α из области $(\mathcal{A}')$ выполнено равенство $\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \alpha$. Кроме того, для всех $\alpha \in (\mathcal{A}')$ матрица $\sigma^2(\alpha)$ положительно определена. Поэтому определена единственная *положительно определенная* матрица $\sigma(\alpha)$ (положительно определенный корень из $\sigma^2(\alpha)$), квадрат которой равен $\sigma^2(\alpha)$. Определитель матрицы $\sigma(\alpha)$ обозначим $|\sigma(\alpha)| = \sqrt{|\sigma^2(\alpha)|}$, где $\alpha \in (\mathcal{A}')$. Значение $|\sigma(\alpha)|$ равно объему преобразованного куба

$$\Delta[0] \sigma(\alpha) := \{x = y\sigma(\alpha): y \in \Delta[0]\}$$

при $\Delta = 1$. Определим функцию

$$c(\alpha, \Delta) = \Delta^{-d} \int_{\Delta[0]} e^{-\langle \lambda(\alpha), u \rangle} du = \prod_{i=1}^d \frac{1 - e^{-\Delta \lambda_i(\alpha)}}{\Delta \lambda_i(\alpha)}.$$

Легко видеть, что $c(\alpha, \Delta) \rightarrow 1$ при $\Delta \rightarrow 0$ равномерно по $\alpha \in K$, где K — произвольный компакт, лежащий в области $(\mathcal{A}')$.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие Крамера [C].

(i) Если выполнено условие [R], то

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (c(\alpha, \Delta) + \varepsilon_n), \quad (1.4)$$

где $\alpha = x/n$, остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ стремится к 0 равномерно по $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ и $\alpha = x/n \in K$ для любых фиксированных $0 < \Delta_1 \leq \Delta_2 < \infty$ и любого фиксированного компакта K , лежащего в области $(\mathcal{A}')$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0. \quad (1.5)$$

(ii) Если вместо условия [R] выполнено более сильное условие $[R^\gamma]$, то в соотношении (1.4) остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ удовлетворяет соотношению (1.5), в котором Δ_1 заменено на $e^{-n\gamma_1}$ при любом фиксированном $\gamma_1 < \gamma$.

(iii) Если вместо условия [R] выполнено условие $[R_{(\text{den})}]$, то для плотности $f_n(x)$ распределения суммы $S(n)$ и для любого компакта K , лежащего в области $(\mathcal{A}')$, имеет место равенство

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n(x)), \quad (1.6)$$

в котором остаточный член $\varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{R}^d} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

(iv) Если вместо условия [R] выполнено условие [Z], то для $x \in \mathbf{Z}^d$

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n(x)), \quad (1.7)$$

где для любого компакта K , лежащего в области $(\mathcal{A}')$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, x \in \mathbf{Z}^d} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Первое утверждение теоремы 1.1 справедливо при любых фиксированных Δ_1, Δ_2 , и, стало быть, оно будет справедливо и при $\Delta = \Delta(n)$, сходящемся к нулю при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно. Так как функция $c(\alpha, \Delta)$ в (1.4) сходится к 1 при $\Delta \rightarrow 0$ равномерно по $\alpha \in K$,

то утверждение (1.4) можно упростить, придав ему форму, близкую к (1.6), (1.7).

Следствие 1.1. Пусть выполнены условия [R], [C], и пусть $\alpha = x/n \in K$, где K — произвольный фиксированный компакт, лежащий в $(\mathcal{A}')$, и $\Delta = \Delta(n)$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место равномерное по $\alpha \in K$ соотношение

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + o(1)). \quad (1.8)$$

Утверждения частей (i), (ii), (iv) теоремы 1.1 по существу получены в работе Ч. Стоуна [5, теорема 3]. Однако в названной теореме автор вместо условия [C] предполагает несколько более сильное условие: $\varphi(\lambda) < \infty$ в некоторой окрестности начала координат. При этом в качестве компакта K автор рассматривает только множества $\{\alpha: |\alpha| \leq c\}$ для достаточно малого $c > 0$. Нетрудно проверить, что доказательство, приведенное в [5], сохранится без существенных изменений и при условии [C]. Заметим также, что в упомянутой теореме 3 из [5] автор рассматривает более общую, чем в теореме 1.1, ситуацию, когда часть координат случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ удовлетворяют условию [R], а остальные — условию [Z]. Простоты ради мы ограничились в теореме 1.1 рассмотрением отдельно нерешетчатого и арифметического случаев. Утверждение части (iii) теоремы 1.1 будет доказано ниже, в § 2.

Некоторые из результатов работы [5] были переоткрыты авторами настоящей статьи в [8] по той причине, что мы не были знакомы с названной работой Стоуна. Судя по всему, с работой [5] не были знакомы и некоторые другие авторы работ по большим отклонениям (ср., например, результаты [5] с результатами работ [10], [24]).

Итак, из теоремы 1.1 видно, что в случае $\alpha = x/n \in \mathcal{A}'$ все три названных выше типа отклонений (нормальные, умеренно большие и большие) могут быть описаны совершенно единообразно, с помощью асимптотических представлений (1.6)–(1.8) (в этом состоит одно из достоинств интегро-локальных теорем). Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что при выполнении некоторых дополнительных условий (близких к необходимым) асимптотические представления (1.6)–(1.8) в условиях п. (ii), (iii), (iv) теоремы 1.1 сохраняются и при $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathcal{A}'$ (т.е. в области сверхбольших отклонений). Если же $\alpha \notin \mathcal{A}'$, то асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$ для больших и сверхбольших отклонений будет иной. Этой проблеме (мы называем ее задачей В) будет посвящена отдельная работа.

В случае, когда мы находимся в условиях п. (i) теоремы 1.1, расширение результатов этой теоремы на сверхбольшие отклонения не всегда возможно и требует дополнительных рассмотрений.

Сделаем некоторые предварительные пояснения по поводу сказанного. Напомним прежде всего, что теорема 1.1 «не охватывает» следующие две основные задачи.

А. *Отыскание асимптотики вероятностей (1.2) в случае $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\alpha \in (\mathcal{A}')$.*

В. *Отыскание асимптотики вероятностей (1.2) в случае, когда множество $\mathcal{A}'$ не совпадает с $\mathbf{R}^d$ и $\alpha \notin \mathcal{A}'$, при этом α либо сходится к конечному пределу $\alpha_0 \notin (\mathcal{A}')$, либо $|\alpha| \rightarrow \infty$.*

Теорема 1.1 не охватывает также «промежуточную» задачу

АВ. *Отыскание асимптотики вероятностей (1.2) в промежуточном случае, когда $\alpha \in (\mathcal{A}')$ и при этом α сходится к конечному пределу $\alpha_0 \in \partial\mathcal{A}'$, где $\partial\mathcal{A}'$ — граница множества $\mathcal{A}'$.*

«Симметричная» задаче АВ задача ВА, когда $\alpha \notin \mathcal{A}'$ и при этом α сходится к конечному пределу $\alpha_0 \in \partial\mathcal{A}'$, является частным случаем задачи В и будет рассматриваться в рамках этой задачи.

Настоящая работа посвящена решению задач А, АВ и, отчасти, задачи В. В §2 мы приводим схему решения задач А и В. В §3 приводится решение задачи А в общем многомерном случае (теорема 3.4 и ее обобщение в теореме 4.1). Задача АВ не относится к задачам о сверхбольших отклонениях, но она близка к задаче А, поскольку в ней, как и в задаче А, точка $\alpha = x/n$ лежит в области $(\mathcal{A}')$ регулярности функции отклонений $\Lambda(\alpha)$. Так как подходы, использованные в задаче А, годятся и для задачи АВ, то мы приводим в §3 также и решение задачи АВ (теорема 3.5). Формулировку теоремы 4.1, обобщающей теорему 3.4, мы поместили в §4, а ее доказательство — в §5. В §5 получены необходимые для доказательств теорем 3.1–3.5, 4.1 варианты интегро-локальной и локальной теорем для схемы серий в области нормальных отклонений (теоремы 5.2–5.4), дополняющие в нужном нам направлении результаты работ [6], [5], [7], [11]. Доказательства тех утверждений из §§2,3 настоящей работы, которые оказываются достаточно простыми и короткими, мы приводим в тех же разделах, где эти утверждения сформулированы.

Во второй части работы сверхбольшие отклонения изучаются в более конкретной ситуации — для наиболее распространенных типов *одномерных распределений*, а именно для трех классов «экспоненциально» и «суперэкспоненциально» убывающих, «регулярно» меняющихся распределений. В §6 даются определения этих классов распределений и получены предельные теоремы для преобразования Крамера над распределениями из изучаемых классов, когда параметр преобразования сходится к «критическому» значению. В §7 получены простые достаточные условия, обеспечивающие в задаче А при $\alpha \rightarrow \infty$ прежнюю асимптотику вида (1.6)–(1.8). Как и в первой части, короткие и достаточно простые доказательства всех утверждений из §§6,7 приведены в тех же разделах, где эти утверждения формулируются. Более объемные и сложные дока-

зательства и необходимые вспомогательные леммы приведены отдельно, в § 8. В § 9 найдены условия, при которых удастся построить асимптотические разложения функции уклонений $\Lambda(\alpha)$, позволяющие в соответствующих областях сверхбольших уклонений находить значение $n\Lambda(\alpha)$ с точностью до величин $o(1)$.

Все теоремы настоящей работы, посвященные задачам А, АВ, доказаны с помощью преобразования Крамера и интегро-локальных теорем для нормальных уклонений из работ [6], [5], [11] (или их усилений, приведенных в § 5; там же содержатся и локальные теоремы). Решение задачи В (которой, как уже было сказано, будет посвящена отдельная работа) также основано на преобразовании Крамера, но в качестве «второго элемента» используются *интегро-локальные теоремы о больших уклонениях сумм случайных векторов с правильно меняющимися распределениями*.

Касаясь истории вопроса, отметим, что предельным теоремам для «обычных» больших уклонений посвящена обширная литература и мы останавливаться на ней не будем. Мы назовем лишь те известные нам публикации, где рассмотрены задачи А, В и промежуточная задача АВ.

В *одномерном* случае при выполнении условия Крамера *сверхбольшие регулярные уклонения* (задача А), а также *большие нерегулярные уклонения* (задачи В, АВ) для сумм случайных величин изучались в работах [12]–[21], [25] (см. также библиографию в этих работах и обзоры в работах [12], [22]). В названных работах изучались, как правило, *локальные теоремы*, когда слагаемые имеют абсолютно непрерывные или арифметические распределения.

В недавней книге [28] (см. также [22]) изучается задача А в *многомерном* случае. В ней рассматриваются слагаемые $\xi(i) \in \mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, распределение которых имеет плотность $f = f(x)$ вида

$$f(x) = q\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^{\alpha-1} e^{-a(x)}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad (1.9)$$

где $\alpha + d - 1 > 0$, функция $q(e)$, $|e| = 1$, непрерывна и положительна на единичной сфере, функция $a(x): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^1$ выпукла, положительна на единичной сфере и линейна вдоль любого направления $e = x/|x|$. В этом случае, как показано в [28], множество $\mathcal{A}$ конечности функции $A(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)}$ ограничено и имеет вид $\mathcal{A} = \{\lambda: a(\lambda) < 1\}$ и при этом $A(\lambda) = \infty$ на границе $\partial\mathcal{A}$. Поэтому множество аналитичности $\mathcal{A}'$ функции уклонений $\Lambda(\alpha)$ совпадает с $\mathbf{R}^d$, в силу чего задача изучения вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\}$ при $|\alpha| = |x/n| \rightarrow \infty$ относится к задаче А. Заметим попутно, что в [28] не рассмотрена ситуация, когда $\varphi(\lambda) < \infty$ и $|\varphi'(\lambda)| = \infty$ при $\lambda \in \partial\mathcal{A}$, тоже относящаяся к задаче А. В работе [28] найдены дополнительные к (1.9) условия, при которых справедлива равномерная в $\mathbf{R}^d$ локальная предельная теорема для суммы $S(n)$. Част-

ный характер рассматриваемой в [28] задачи и соответственно частный характер ответа не позволяют понять природу условий, обеспечивающих то или иное асимптотическое поведение вероятностей сверхбольших отклонений в общем случае.

§ 2. Схемы решения задач А, В

Опишем теперь пути решения задач А и В, использованные в настоящей работе, более подробно. В обоих случаях мы будем применять преобразование Крамера (1.3) в точке $\lambda = \lambda(\alpha)$, с помощью которого получаем соотношения (см. также, например, [27])

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) \in dv\} &= \varphi^{-n}(\lambda(\alpha)) e^{(\lambda(\alpha), v)} \mathbf{P}\{S(n) \in dv\}, \\ \mathbf{P}\{S(n) \in dv\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} e^{-(\lambda(\alpha), v - n\alpha)} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) \in dv\}, \\ \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \int_{v \in \Delta[x]} e^{-(\lambda(\alpha), v - n\alpha)} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) \in dv\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\alpha = x/n$, $S^{(\alpha)}(n) = \xi^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi^{(\alpha)}(n)$, случайные векторы $\xi^{(\alpha)}(i)$ независимы и распределены как $\xi^{(\alpha)}$ (вектор $\xi^{(\alpha)}$ определен в (1.3)).

2.1. Задача А. В задаче А мы будем рассматривать векторы $x = x(n) \in \mathbf{R}^d$ такие, что $\alpha = x/n$ лежит «с некоторых пор» (при достаточно больших n) в усеченном снизу конусе

$$\underline{K} = \underline{K}(e, \delta, N) := \{\alpha = e't : |e - e'| \leq \delta, t \geq N\} \quad (2.2)$$

при некоторых e , $\delta > 0$, $N < \infty$, где e, e' — единичные векторы из $\mathbf{R}^d$. Мы будем предполагать, что множество $\underline{K}$ вложено в $(\mathcal{A}')$. Оно не будет компактом в отличие от множества K , фигурирующего в теореме 1.1. Будут выяснены условия, при которых для некоторой последовательности $\{\mathcal{J}_n(\alpha); \alpha = x/n \in \underline{K}\}$ отрезков $\mathcal{J}_n(\alpha) = [\Delta_{1,n}(\alpha), \Delta_{2,n}(\alpha)] \subset (0, \infty)$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n), \quad (2.3)$$

где остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha, \Delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}, \Delta \in \mathcal{J}_n(\alpha)} |\varepsilon_n(\alpha, \Delta)| = 0. \quad (2.4)$$

Для получения (2.3), (2.4) введем в рассмотрение нормированные случайные векторы $\zeta^{(\alpha)} = (\xi^{(\alpha)} - \alpha) \sigma^{-1}(\alpha)$, так что в задаче А выполняется

$$\mathbf{E}\zeta^{(\alpha)} = 0, \quad \mathbf{E}(\zeta^{(\alpha)})^\top \zeta^{(\alpha)} = E, \quad (2.5)$$

где E — единичная матрица, индекс $^\top$ означает транспонирование. Положим $S_0^{(\alpha)}(n) = (S^{(\alpha)}(n) - n\alpha) \sigma^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \zeta^{(\alpha)}(i)$, $\Delta^{(\alpha)}[0] =$

$\Delta[0] \sigma^{-1}(\alpha)$. Тогда равенство (2.1) после замен $v = \alpha n + u'$, $u = u' \sigma^{-1}(\alpha)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \int_{u' \in \Delta[0]} e^{-\langle \lambda(\alpha), u' \rangle} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - x \in du'\} \\ &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \int_{u \in \Delta^{(\alpha)}[0]} e^{-\langle \lambda(\alpha), u\sigma(\alpha) \rangle} \mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in du\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу (2.5) вероятности $\mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta^{(\alpha)}[0]\}$ в (2.6) относятся к зоне нормальных уклонений сумм $S_0^{(\alpha)}(n)$ в схеме серий, так как α зависит от n . Это означает, что с помощью соотношений (2.6) можно найти асимптотику вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$, если имеют место следующие две предпосылки.

а) В пределах куба $\Delta^{(\alpha)}[0]$ подынтегральная функция $e^{-\langle \lambda(\alpha), u\sigma(\alpha) \rangle}$ во втором интеграле в (2.6) мало меняется; или, что то же, в пределах куба $\Delta[0]$ подынтегральная функция $e^{-\langle \lambda(\alpha), u' \rangle}$ близка к 1 (см. первое равенство в (2.6)). Последнее означает, что равномерно по $\alpha \in \underline{K}$ должно выполняться соотношение

$$\Delta|\lambda(\alpha)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Из (2.7) получаем следующее ограничение сверху на длину Δ ребра куба $\Delta[x]$ в утверждении (2.3):

$$\Delta \leq \Delta_2 \equiv \Delta_{2,n} = \delta_n \frac{1}{|\lambda(\alpha)|} \quad (2.8)$$

для произвольной фиксированной последовательности $\delta_n \downarrow 0$. Отметим, что $|\lambda(\alpha)| \geq \lambda_N > 0$ при $\alpha \in \underline{K} = \underline{K}(\epsilon, \delta, N)$, если N достаточно велико (если $N > 0$ в случае $\mathbf{E}\xi = 0$); и, стало быть, $\Delta_{2,n} \rightarrow 0$ в силу (2.8).

При выполнении (2.7) мы получаем

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta^{(\alpha)}[0]\} (1 + o(1)). \quad (2.9)$$

Если, например, в одномерном случае $\lambda_+ = \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} < \infty$, то $\lambda(\alpha) \rightarrow \lambda_+$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Поэтому в рассматриваемом случае соотношение (2.7) выполнено, если $\Delta \rightarrow 0$. Если же $\lambda_+ = \infty$, то $\lambda(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$, и в этом случае соотношение (2.7) невозможно, если $\Delta \rightarrow 0$ недостаточно быстро. Разрешить эту проблему (т.е. обеспечить выполнение (2.7), устремляя Δ к 0 с подходящей скоростью) удастся лишь с помощью условия $[R^\gamma]$.

Чтобы найти асимптотику правой части в (2.9), нам понадобится вторая предпосылка, которая состоит в том, что

б) мы располагаем следующей модификацией теоремы 1.1 для схемы серий (для сумм $S_0^{(\alpha)}(n)$ в области нормальных уклонений): для фиксированной последовательности $\{\mathcal{I}_n\}$ отрезков $\mathcal{I}_n = [t_{1,n}, t_{2,n}] \subset$

$(0, \infty)$ и любой фиксированной последовательности $\delta_n = o(1)$ выполняется

$$\mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta[y]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2}} (1 + \varepsilon_n), \quad (2.10)$$

где остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha, y, \Delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}, |y| \leq \delta_n \sqrt{n}, \Delta \in \mathcal{J}_n} |\varepsilon_n(\alpha, y, \Delta)| = 0 \quad (2.11)$$

(на самом деле в (2.10), (2.11) речь идет о «малых» уклонениях y).

В предпосылке б) мы будем рассматривать, как правило, интервалы $\mathcal{J}_n$ двух видов: 1) $\mathcal{J}_n = [\Delta_1, \Delta_2]$; $0 < \Delta_1 \leq \Delta_2 < \infty$; 2) $\mathcal{J}_n = [e^{-\gamma_1 n}, \Delta_2]$; $\gamma_1 > 0$, $e^{-\gamma_1 n} \leq \Delta_2 < \infty$. Модификация теоремы 1.1, отвечающая предпосылке б), будет установлена ниже в теореме 3.1 с помощью результатов работы [11]. Отправляясь от предпосылки б), мы можем получить теперь асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta^{(\alpha)}[0]\}$ из правой части (2.9) в следующем виде: для последовательности $\{\mathcal{J}_n(\alpha): \alpha = x/n \in \underline{K}\}$ отрезков $\mathcal{J}_n(\alpha) = [\Delta_{1,n}, \Delta_{2,n}] \subset (0, \infty)$ (построенных ниже по отрезкам $\mathcal{J}_n$) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) \in \Delta^{(\alpha)}[0]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2}} (1 + \varepsilon_n(\alpha, \Delta)), \quad (2.12)$$

где остаточный член $\varepsilon_n(\alpha, \Delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}, \Delta \in \mathcal{J}_n(\alpha)} |\varepsilon_n(\alpha, \Delta)| = 0. \quad (2.13)$$

Сказанное позволяет получить следующее утверждение.

Лемма 2.1. Из предпосылок а), б) вытекает (2.3)–(2.4) для последовательности отрезков $\mathcal{J}_n(\alpha) = [\Delta_{1,n}(\alpha), \Delta_{2,n}(\alpha)]$, определяемых формулами

$$\Delta_{1,n}(\alpha) = \frac{t_{1,n} \sigma_d(\alpha)}{\delta_n}, \quad \Delta_{2,n}(\alpha) = \delta_n \min \left\{ \frac{1}{|\lambda(\alpha)|}, \sigma_1(\alpha) \sqrt{n} \right\} \quad (2.14)$$

для произвольной фиксированной последовательности $\delta_n \downarrow 0$.

По поводу совместимости неравенств (2.14) и их следствий см. замечание 3.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже было сказано, соотношения (2.3), (2.4) в силу а), б) суть следствия (2.12), (2.13). Поэтому нам остается установить (2.12), (2.13) и найти границы $\Delta_{i,n}(\alpha)$ интервалов $\mathcal{J}_n(\alpha)$.

Для получения (2.12), (2.13) мы должны приблизить «деформированный куб» $\Delta^{(\alpha)}[0]$ маленькими кубиками $\Delta[y]$ с ребром $\Delta \in \mathcal{J}_n$ и вершинами в точках y , $|y| = o(\sqrt{n})$. Для этого достаточно, чтобы минимальная ширина H куба $\Delta^{(\alpha)}[0]$ (максимальный диаметр шара, целиком лежащего в $\Delta^{(\alpha)}[0]$) был значительно больше $t_{1,n}$, т.е.

$$H = \sigma_d^{-1}(\alpha) \Delta \gg t_{1,n}, \quad (2.15)$$

где $\sigma_d^{-1}(\alpha)$ — минимальное собственное число матрицы $\sigma^{-1}(\alpha)$. Действительно, пусть для простоты размерность d равна 2. Тогда $\Delta^{(\alpha)}[0]$ есть параллелограмм со сторонами $L_1 \geq L_2$, минимальной шириной H и площадью $S = L_1 H$. Погрешность аппроксимации ε не превосходит площади полосы «вдоль» периметра шириной $\sqrt{2}t_{1,n}$, т.е. $\varepsilon \leq \sqrt{2}t_{1,n}2(L_1 + L_2) \leq 4\sqrt{2}t_{1,n}L_1$. Поэтому в силу (2.15) выполняется $\varepsilon/S \leq 4\sqrt{2}t_{1,n}L_1/(L_1 H) = o(1)$, так что возможность нужной аппроксимации и справедливость (2.12), (2.13) установлены. Из (2.15) вытекает первое соотношение в (2.14) (для нижней границы $\Delta_{1,n}(\alpha)$).

Далее, чтобы обеспечить применимость предпосылки б), длина векторов $y \in \Delta^{(\alpha)}[0]$ (вершин аппроксимирующих кубиков) должна быть значительно меньше $\sqrt{n}$, т.е.

$$\sigma_1^{-1}(\alpha)\Delta \ll \sqrt{n}, \quad (2.16)$$

где $\sigma_1^{-1}(\alpha)$ — максимальное собственное число матрицы $\sigma^{-1}(\alpha)$. Поэтому, а также в силу (2.8) справедливо второе соотношение в (2.14) (для верхней границы $\Delta_{2,n}(\alpha)$). Лемма 2.1 доказана.

Как мы уже видели выше на примере одномерного случая, при $\lambda_+ = \infty$ одного лишь условия [R] «не хватает» для выполнения предпосылки а) (а стало быть, и для получения асимптотики (2.3)–(2.4) при медленно убывающих Δ). Убедимся, что и в случае $\lambda_+ < \infty$ условие [R] не может обеспечить одновременно выполнение соглашения а) и получение асимптотики правой части (2.9). Действительно, из условия [R] следует нужное нам представление для вероятности в правой части (2.9) только при условии, что количество $\Delta\sigma^{-1}(\alpha)$ есть «почти константа» и не может убывать сколько-нибудь быстро. Иначе говоря, Δ должно вести себя «примерно» как $\sigma(\alpha)$, что противоречит соглашению а), если

$$\limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(\alpha) = \infty. \quad (2.17)$$

Но соотношение (2.17) при $\lambda_+ < \infty$ выполняется всегда. Действительно, допустив, что (2.17) неверно, мы получаем $\liminf_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma^{-2}(\alpha) > 0$. Но $\sigma^{-2}(\alpha) = \Lambda''(\alpha) = \lambda'(\alpha)$, поэтому из последнего неравенства получаем, что $\lambda(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$, что противоречит конечности λ_+ .

Итак, мы убедились, что для получения в задаче А интегральной теоремы нам в нерешетчатом случае необходимо привлечь более сильное условие Крамера [R $^\gamma$].

В абсолютно непрерывном случае редукция к нормальным уклонениям с помощью преобразования Крамера выглядит проще (ср. с (2.6) и (2.9)): для $x \in \mathbf{R}^d$

$$f_n(x) = e^{-n\Lambda(\alpha)} f_n^{(\alpha)}(x), \quad (2.18)$$

где $f_n(x)$, $f_n^{(\alpha)}(x)$ суть плотности распределений сумм $S(n)$, $S^{(\alpha)}(n)$ соответственно. Здесь предпосылка б) имеет следующий вид.

b₁) Мы располагаем модификацией теоремы 1.1 в абсолютно непрерывном случае, позволяющей оценивать асимптотику плотности $f_n^{(\alpha)}(x)$ равномерно по $\alpha \in \underline{K}$.

Такая модификация будет установлена ниже (см. теорему 3.2). Как видно из (2.18), в абсолютно непрерывном случае проблем с предпосылкой а) не возникает (она не нужна). Аналогичным образом осуществляется редукция больших отклонений к нормальным и в случае, когда распределение $S^{(\alpha)}(n)$ в некоторой окрестности точки x абсолютно непрерывно (см. п. 3.2).

В арифметическом случае редукция к нормальным отклонениям с помощью преобразования Крамера также выглядит проще, чем в случае [R] (ср. с (2.6) и (2.9)): для $x = n\alpha \in \mathbf{Z}^d$

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha = 0\}, \quad (2.19)$$

где, очевидно, слагаемые $\xi^{(\alpha)}$ являются по-прежнему арифметическими. Здесь предпосылка b) имеет следующий вид.

b₂) Мы располагаем модификацией теоремы 1.1 в арифметическом случае, позволяющей оценивать асимптотику $\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) - n\alpha = 0\}$ равномерно по $\alpha \in \underline{K}$.

Такая модификация будет установлена ниже (см. теорему 3.3). Как видно из (2.19), в арифметическом случае проблем с предпосылкой а) также не возникает (она не нужна).

2.2. Задача В. Обратимся теперь к задаче В, в которой единая форма записи (аналогичная (3.5), (3.8)) для вероятности $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$, справедливая для всех видов отклонений, отсутствует.

В задаче А точка $\alpha = x/n$ принадлежит области $(\mathcal{A}')$. В задаче В точка $\alpha = x/n$ лежит вне множества $\mathcal{A}'$ (при этом α может быть и ограниченным). В этом случае $\lambda(\alpha)$ лежит на границе множества $\mathcal{A}$ и зависит только от направления $e(\alpha) = \alpha/|\alpha|$ вектора α . Рассмотрим для простоты *одномерный* случай. Для него значение $\lambda(\alpha)$ при α вне множества $\mathcal{A}'$ не зависит от α ; в частности, $\lambda(\alpha) = \lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$ при $\alpha \geq \alpha_+ = \varphi'(\lambda_+)/\varphi(\lambda_+)$ (в задаче В с необходимостью $\alpha_+ < \infty$). Для отыскания асимптотики $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$ мы вновь воспользуемся преобразованием Крамера (1.3), но на этот раз это будет преобразование в фиксированной точке λ_+ , так как $\lambda(\alpha) = \lambda_+$ при всех $\alpha \geq \alpha_+$. Здесь соотношения (2.1) полностью сохранятся, но $S^{(\alpha)}(n)$ будет суммой независимых копий случайного вектора $\xi^{(\alpha_+)}$ с фиксированным распределением

$$\mathbf{P}\{\xi^{(\alpha_+)} \in dv\} = \frac{e^{(\lambda_+, v)} \mathbf{P}\{\xi \in dv\}}{\varphi(\lambda_+)}.$$

Очевидно, что $\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \mathbf{E}\xi^{(\alpha_+)} = \varphi'(\lambda_+)/\varphi(\lambda_+) = \alpha_+$ при всех $\alpha \geq \alpha_+$. Поэтому для $\alpha > \alpha_+$ и для $\Delta = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ получаем соотношение

(ср. с (2.1), (2.9))

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S^{(\alpha+)}(n) \in \Delta[x]\}(1 + o(1)), \quad (2.20)$$

и вероятность

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha+)}(n) \in \Delta[x]\} = \mathbf{P}\{S^{(\alpha+)}(n) - n\alpha_+ \in \Delta(x - n\alpha_+)\}, \quad (2.21)$$

присутствующая в правой части (2.20), будет для центрированных сумм $S^{(\alpha+)}(n) - n\alpha_+$ вероятностью *больших отклонений* порядка $y = x - n\alpha_+ = (\alpha - \alpha_+)n$. При этом правый хвост распределения $\xi^{(\alpha+)} - \alpha_+$ уже не удовлетворяет моментному условию Крамера. В этих условиях асимптотику (2.21) можно найти, предположив дополнительно правильное изменение функции $e^{\lambda+v} \mathbf{P}\{\xi \geq v\}$ при $v \rightarrow \infty$. В этом случае имеются результаты, описывающие асимптотику $\mathbf{P}\{S^{(\alpha+)}(n) \in \Delta[y]\}$ (см. [21], [23]), с помощью которых удастся решить задачу В для ряда основных типов правильно меняющихся хвостов распределений $\xi^{(\alpha+)}$. Получению интегро-локальных теорем для больших и сверхбольших нерегулярных отклонений сумм случайных векторов (т.е. задаче В) будет посвящена отдельная работа. Изложенный выше подход к решению задачи В был использован и в работе [25], посвященной одномерным блужданиям, однако там удалось получить ряд *интегральных* теорем для сумм (а также и в значительно более сложной граничной задаче) без привлечения техники интегро-локальных теорем.

§ 3. Задачи А и АВ в общем многомерном случае

3.1. Модификация теоремы 1.1 для $S_0^{(\alpha)}(n)$ в нерешетчатом случае. Как уже было отмечено, для решения задачи А в нерешетчатом случае нам понадобится модификация теоремы 1.1 (для нормальных отклонений) для *стемы серий*, когда вектор $\zeta^{(\alpha)} = (\xi^{(\alpha)} - \alpha) \sigma^{-1}(\alpha)$ удовлетворяет условию Крамера $[R^\gamma]$. Чтобы сформулировать соответствующую версию теоремы, нам понадобятся следующие два основных условия. В обозначении каждого из этих условий будет присутствовать символ Ω , обозначающий фиксированное множество, вложенное в $(\mathcal{A}')$. В задаче А в качестве Ω будет выбран усеченный снизу конус $\underline{K} \subseteq (\mathcal{A}')$ (см. (2.2) и теоремы 3.1–3.4), а в задаче АВ — усеченный *сверху* конус $\overline{K}_{(\alpha_0)}$ с вершиной в некоторой точке α_0 (лежащей на границе множества $\mathcal{A}'$), который будет определен позже. Первое условие имеет следующий вид.

$[UI_\Omega]$. (Условие равномерной по $\alpha \in \Omega$ интегрируемости квадрата нормы $\zeta^{(\alpha)}$.)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{E}(|\zeta^{(\alpha)}|^2; |\zeta^{(\alpha)}| > T) = 0.$$

Заметим, что если рассмотреть схему серий $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$, где $\xi_{k,n} = \zeta^{(\alpha)}(k)$, а вектор $\alpha \in \Omega$ зависит от n , то из условия $[UI_\Omega]$ вытекает условие Линдеберга, в силу чего для суммы

$$S_0^{(\alpha)}(n) = \xi_{1,n} + \dots + \xi_{n,n} := \zeta^{(\alpha)}(1) + \dots + \zeta^{(\alpha)}(n)$$

справедлива центральная предельная теорема. Хорошо известно, что условие $[UI_\Omega]$ будет выполнено, если, например, выполнено равномерное по $\alpha \in \Omega$ условие Ляпунова

$$\sup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{E} |\zeta^{(\alpha)}|^{2+\delta} < \infty, \quad \delta > 0.$$

Второе условие есть *равномерное по $\alpha \in \Omega$ условие Крамера на характеристическую функцию* (параметр $\gamma = \gamma_\Omega$ зависит, вообще говоря, от Ω):

$$[R_\Omega^\gamma].$$

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Omega} |\mathbf{E} e^{i\langle t, \zeta^{(\alpha)} \rangle}| \leq e^{-d\gamma}.$$

Условие $[R_\Omega^\gamma]$ будет выполняться для некоторого $\gamma > 0$, если выполнено следующее условие (см. [11]).

$[R_\Omega^*]$. *Найдется куб $\Delta[v]$ со стороной $\Delta > 0$ и с вершиной в точке $v \in \mathbf{R}^d$ (которая может зависеть от α) такой, что распределение вектора $\zeta^{(\alpha)}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту и ее плотность $f^{(\alpha)}(y)$ в этом кубе равномерно отделена от нуля:*

$$f^{(\alpha)}(y) \geq p > 0 \quad \text{при } y \in \Delta[v], \quad \alpha \in \Omega.$$

Заметим также, что условие $[UI_\Omega]$ не будет выполнено при наличии больших лагун в распределении ξ . Условие $[R_\Omega^\gamma]$ не будет выполнено, если множество Ω не ограничено, а распределение ξ «на бесконечности» в известном смысле сближается с решетчатым распределением (тогда $\xi^{(\alpha)}$ сближается с решетчатым распределением при $\alpha \rightarrow \infty$).

Приведем теперь, в соответствии со сказанным выше, модификацию теоремы 1.1 для схемы серий (для сумм $S_0^{(\alpha)}(n)$) в области нормальных уклонений в нерешетчатом случае.

Теорема 3.1. Пусть для фиксированного усеченного конуса $K \subseteq (\mathcal{A}')$ выполнены условия $[UI_K]$, $[R_K^\gamma]$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta[y]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2}} (e^{-|y|^2/(2n)} + \varepsilon_n), \quad (3.1)$$

где последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta, \alpha, y)$ равномерно сходится к нулю: для любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$, $\Delta_2 > 0$ при $\Delta_1 = e^{-\gamma_1 n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2 \\ \alpha \in K, y \in \mathbf{R}^d}} |\varepsilon_n(\Delta, \alpha, y)| = 0.$$

Теорема 3.1 вытекает из части (ii) теоремы 1.1 в [11] (см. также теорему 5.1 в § 5), поскольку условия теоремы 3.1 влекут за собой выполнение всех условий названной теоремы в [11].

3.2. Модификация теоремы 1.1 для $S_0^{(\alpha)}(n)$ в случае, когда распределение $\zeta^{(\alpha)}$ абсолютно непрерывно на подходящем полупространстве. Условие $[UI_\Omega]$ в этом случае сохранится без изменения, а аналогом условия $[R_\Omega^*]$ будет следующее условие абсолютной непрерывности распределения $\zeta^{(\alpha)}$ в подходящем полупространстве.

$[R_\Omega^{(\text{den})}]$. Для некоторых $e \in \mathbf{R}^d$, $|e| = 1$, $c > 0$ (вектор e и число c могут зависеть от α) распределение $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ вектора $\zeta^{(\alpha)}$ абсолютно непрерывно на полупространстве $\Pi = \{y: \langle e, y \rangle \geq -c\}$ с плотностью $f^{(\alpha)}(y)$, $y \in \Pi$, для которой

$$\sup_{\alpha \in \Omega} \sup_{y \in \Pi} f^{(\alpha)}(y) < \infty.$$

Кроме того, для некоторых $\Delta > 0$, $h > 0$ и $v \in \mathbf{R}^d$ (вектор v может зависеть от α)

$$f^{(\alpha)}(y) \geq h$$

при $y \in \Delta[v] \subseteq \Pi$, $\alpha \in \Omega$.

Модификация теоремы 1.1 на случай схемы серий (для сумм $S_0^{(\alpha)}(n)$ в области «малых» отклонений) для «частично» абсолютно непрерывного случая $[R_K^{(\text{den})}]$ имеет следующий вид.

Теорема 3.2. Пусть для фиксированного усеченного конуса $K \subseteq (\mathcal{A}')$ выполнены условия $[UI_K]$, $[R_K^{(\text{den})}]$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ распределение суммы $S_0^{(\alpha)}(n)$ в шаре $U_\delta(0) = \{y: |y| \leq \delta\}$ абсолютно непрерывно с плотностью

$$f_n^{(\alpha)}(y) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} (1 + \varepsilon_n),$$

где последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha, y)$ равномерно сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in K, |y| \leq \delta} |\varepsilon_n(\alpha, y)| = 0.$$

Условия теоремы 3.2 влекут за собой выполнение всех условий теоремы 5.4 из п. 5.3, так что теорема 3.2 вытекает из теоремы 5.4.

3.3. Модификация теоремы 1.1 для $S_0^{(\alpha)}(n)$ в арифметическом случае. Прежде чем формулировать соответствующую версию теоремы 1.1 в арифметическом случае, заметим следующее. Пусть в одномерном случае для суммы $S^{(\alpha)}(n)$ выполнена локальная центральная предельная теорема, т.е.

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) = x\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(\alpha)}}, \quad x = n\alpha \in \mathbf{Z}. \quad (3.2)$$

Тогда с необходимостью выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sigma(\alpha) = \infty \quad (3.3)$$

(иначе левая часть (3.2) не будет стремиться к 0, что противоречит центральной предельной теореме). В многомерном случае $d \geq 2$ для арифметических слагаемых аналогом (3.3) является соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sigma_1(\alpha) = \infty$, где $\sigma_1(\alpha)$ — минимальное собственное число матрицы $\sigma(\alpha)$. Это соотношение мы будем использовать в теореме 3.3, посвященной арифметическому случаю, в качестве условия.

Условие $[UI_\Omega]$ в арифметическом случае сохранится без изменения, а аналогом условию $[R_\Omega^*]$ будет следующее условие равномерной по $\alpha \in \Omega$ арифметичности распределения $\xi^{(\alpha)}$.

$[Z_\Omega]$. Выполнено условие $[Z]$ и для некоторых $p > 0$, $\Delta > 0$ и $v \in \mathbf{R}^d$ для куба $\Delta_\alpha[v]$ с вершиной в точке v (которая может зависеть от α) и со стороной $\Delta_\alpha = \Delta |\sigma(\alpha)|^{1/d}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} = y\} \geq \frac{p}{|\sigma(\alpha)|} \quad \text{при } y \in \mathbf{Z}^d \cap \Delta_\alpha[v], \quad \alpha \in \Omega.$$

Напомним, что $|\sigma(\alpha)|$ есть объем параллелепипеда $\Delta[0] \sigma(\alpha)$ при $\Delta = 1$, который получается, если каждый вектор из единичного куба с вершиной в нуле умножить на матрицу $\sigma(\alpha)$. При этом $|\sigma(\alpha)| = \prod_{i=1}^d \sigma_i(\alpha)$, где $0 < \sigma_1(\alpha) \leq \dots \leq \sigma_d(\alpha)$ — собственные числа матрицы $\sigma(\alpha)$.

Модификация теоремы 1.1 на случай схемы серий (в области нормальных отклонений) для арифметического случая имеет следующий вид.

Теорема 3.3. Пусть для фиксированного усеченного конуса $\underline{K} \subseteq (\mathcal{A}')$ выполнены условия $[UI_{\underline{K}}]$, $[Z_{\underline{K}}]$ и минимальное собственное число $\sigma_1(\alpha)$ матрицы $\sigma(\alpha)$ на $\underline{K}$ обладает свойством $\sqrt{n} \sigma_1(\alpha) \rightarrow \infty$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S^{(\alpha)}(n) = y\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} \left(-\exp \left\{ \frac{|(y - n\alpha) \sigma^{-1}(\alpha)|^2}{2n} \right\} + \varepsilon_n \right), \quad (3.4)$$

где последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha, y)$ равномерно сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}, y \in \mathbf{Z}^d} |\varepsilon_n(\alpha, y)| = 0.$$

В силу леммы 1 в [11] условия теоремы 3.3 влекут за собой выполнение всех условий теоремы 5.3 (теоремы 2 в [11]), из которой и следует теорема 3.3.

3.4. Основное утверждение в задаче А в общем многомерном случае. Теоремы 3.1–3.3 лежат в основе решения задачи А. При этом теоремы 3.1 и 3.3 являются следствиями общих интегро-локальных

теорем, полученных в [11] для схемы серий в области нормальных уклонений. Отметим, что аналоги утверждений (3.1), (3.4) для случая, когда вместо множества $\underline{K}$ рассматривается компакт K , вложенный в $(\mathcal{A}')$ (эти аналоги лежат в основе доказательства теоремы 1.1), получены в работе [6] и в теореме 2 работы [5]. Теоремы 3.1, 3.3 распространяют результаты названных теорем из [6], [5] на случай нормальных и малых уклонений y и неограниченного множества значений $\alpha = x/n$, каковым является конус $\underline{K}$ (см. (2.2)).

Мы можем сформулировать теперь основное утверждение в задаче А. Приведенные выше предпосылки а), б), b_1), b_2) объясняют в значительной мере появление соответствующих условий в этом утверждении. Они же являются основой доказательства.

Теорема 3.4. Пусть для некоторого фиксированного усеченного конуса $\underline{K} \subseteq (\mathcal{A}')$, определенного в (2.2), выполнено условие $[UI_{\underline{K}}]$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если выполнено условие $[R_{\underline{K}}^\gamma]$, то

$$P\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n), \quad (3.5)$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta, \alpha)$ для любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$ и последовательности $\delta(n) = o(1)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2, \alpha \in \underline{K}} |\varepsilon_n(\Delta, \alpha)| = 0, \quad (3.6)$$

в котором

$$\Delta_1 = \sigma_d(\alpha) e^{-n\gamma_1}, \quad \Delta_2 = \delta(n) \min\{|\lambda(\alpha)|^{-1}, \sqrt{n}\sigma_1(\alpha)\} = o(1).$$

(ii) Если выполнено условие $[R_{\underline{K}}^{(\text{den})}]$, то распределение $S(n)$ на множестве $n\underline{K}$ абсолютно непрерывно с плотностью $f_n(x)$ и для $\alpha = x/n \in \underline{K}$ имеет место соотношение

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n), \quad (3.7)$$

где для $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}} |\varepsilon_n(\alpha)| = 0.$$

(iii) Если выполнено условие $[Z_{\underline{K}}]$ и при этом $\sqrt{n}\sigma_1(\alpha) \rightarrow \infty$ при $|\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \underline{K}$, то для $x \in \mathbf{Z}^d$

$$P\{S(n) = x\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n), \quad (3.8)$$

где для $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d, \alpha \in \underline{K}} |\varepsilon_n(\alpha)| = 0. \quad (3.9)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Утверждение части (i) теоремы 3.4 для фиксированного $\Delta > 0$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |\sigma(\alpha)|} \int_{\Delta[0]} e^{-n\Lambda(\alpha+u)} du (1 + \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta, \alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \underline{K}} |\varepsilon_n(\Delta, \alpha)| = 0.$$

Заметим далее, что из неравенства $\Delta_1 \leq \Delta_2$ под знаком супремума в (3.6) вытекает неравенство $\sigma_d(\alpha) e^{-n\gamma_1} \leq \delta(n) \min\{|\lambda(\alpha)|^{-1}, \sqrt{n}\sigma_1(\alpha)\}$. Это неравенство дает следующее ограничение сверху на порядок уклонений $|\alpha| = |x/n|$ в части (i) теоремы 3.4, для которых удастся получить интегро-локальную теорему в универсальной форме (3.5) (ср. с теоремой 1.1):

$$\sigma_d(\alpha) \left(|\lambda(\alpha)| + \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_1(\alpha)} \right) \leq e^{n\gamma_1}. \quad (3.10)$$

В примерах, которые будут рассмотрены в § 7 части II, левая часть (3.10) растет не быстрее некоторой степени $|\alpha|$, поэтому в этих примерах ограничение (3.10) позволяет изучать уклонения $\alpha = x/n$ порядка $|\alpha| \leq e^{nc}$ при некотором $c > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.4. Утверждение части (i) следует непосредственно из леммы 2.1 и теоремы 3.1. Часть (ii) теоремы 3.4 является непосредственным следствием формулы (2.18) и теоремы 3.2. Часть (iii) теоремы 3.4 является непосредственным следствием формулы (2.19) и теоремы 3.3. Теорема 3.4 доказана.

Таким образом, мы видим, что при выполнении некоторых дополнительных (по сравнению с теоремой 1.1) условий, сформулированных в теореме 3.4, утверждения (1.6)–(1.8) (см. теорему 1.1 и следствие 1.1), справедливые в областях нормальных, умеренно больших и больших уклонений, остаются верными также и в области *сверхбольших уклонений*. Это означает, что мы можем сформулировать *равномерные по всем уклонениям* предельные интегро-локальные или локальные теоремы (в этом состоит одно из преимуществ интегро-локальных и локальных теорем перед интегральными).

Следствие 3.1. Пусть для некоторого фиксированного усеченного конуса $\underline{K} \subseteq (\mathcal{A}')$ (см. (2.2)) выполнены условия части (i) теоремы 3.4. Тогда справедливы утверждения (3.5), (3.6), где вместо конуса $\underline{K}$ можно взять объединение этого конуса с любым компактом K , тоже вложенным в $(\mathcal{A}')$.

Аналогичное утверждение о справедливости (3.8), (3.9) имеет место при выполнении условий части (iii) теоремы 3.4.

3.5. Основное утверждение в задаче АВ в многомерном случае. Покажем теперь, что, следуя предложенному выше подходу к решению задачи А, можно получить решение задачи АВ (см. § 1), в которой рассматриваются большие уклонения $\alpha = x/n \rightarrow \alpha_0 \in \partial\mathcal{A}'$, и при этом $\alpha \in (\mathcal{A}')$. В одномерном случае множество $\mathcal{A}'$ совпадает (см. [4]) с отрезком $[\alpha_-, \alpha_+]$, где

$$\alpha_+ = \sup_{\lambda_- < \lambda < \lambda_+} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \quad \alpha_- = \inf_{\lambda_- < \lambda < \lambda_+} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Поэтому задача АВ возникает только в случае, когда хотя бы одно из чисел α_- , α_+ конечно. Допустим, что $\alpha_+ < \infty$. Тогда либо $\lambda_+ = \infty$, что с необходимостью влечет $\mathbf{P}\{\xi \leq \alpha_+\} = 1$; либо $\lambda_+ < \infty$, и тогда с необходимостью выполняется $\varphi(\lambda_+) < \infty$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$.

Аналогичные условия сопровождают задачу АВ и в многомерном случае: точка α_0 лежит на границе множества $\mathcal{A}'$, и либо с вероятностью 1 случайный вектор ξ ограничен некоторой гиперплоскостью, проходящей через эту точку, либо вектор $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0) := \Lambda'(\alpha_0)$ лежит на границе множества $\mathcal{A}$ конечности функции $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ и при этом $|A(\lambda_0)| < \infty$ и $|A'(\lambda_0)| < \infty$.

Пусть $\alpha_0 \in \partial\mathcal{A}'$. Рассмотрим множество $\bar{K}_{(\alpha_0)}$, которое является *срезанным сверху* конусом с «выколотой» вершиной в точке α_0 :

$$\bar{K}_{(\alpha_0)} = \bar{K}_{(\alpha_0)}(e, \delta, c) = \{v = \alpha_0 + e't: |e - e'| \leq \delta, 0 < t \leq c\}. \quad (3.11)$$

В этом определении числа $c > 0$, $\delta > 0$ и единичный вектор e выбраны так, что $\bar{K}_{(\alpha_0)}(e, \delta, c) \subset (\mathcal{A}')$ (если «направление» e из точки α_0 «ведет» в $(\mathcal{A}')$, то выбирая $\delta > 0$, $c > 0$ достаточно малыми, всегда можно получить требуемое включение). Множество $\bar{K}_{(\alpha_0)}$ не является компактом (оно не замкнуто), но в отличие от усеченного снизу конуса $\underline{K}$ является ограниченным множеством.

Решение задачи АВ содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.5. Пусть $\alpha = x/n \rightarrow \alpha_0 \in \partial\mathcal{A}'$ при $n \rightarrow \infty$ и существует усеченный сверху конус $\bar{K}_{(\alpha_0)}$ (определенный в (3.11)), лежащий в $(\mathcal{A}')$. Если в формулировке теоремы 3.4 множество $\underline{K}$ заменить множеством $\bar{K}_{(\alpha_0)}$, то все утверждения теоремы 3.4 сохранятся.

Доказательство теоремы 3.5 практически не отличается от доказательства теоремы 3.4 (следует только заменить усеченный снизу конус $\underline{K}$ на усеченный сверху конус $\bar{K}_{(\alpha_0)}$), поэтому мы его опускаем.

Очевидно, что из теоремы 3.5 вытекает утверждение, аналогичное следствию 3.1 из теоремы 3.4 и справедливое, если вместо множества $\bar{K}_{(\alpha_0)} \subseteq (\mathcal{A}')$ взять объединение этого множества с любым компактом $K \subseteq (\mathcal{A}')$.

В одномерном случае в качестве следствия из теоремы 3.5 можно было бы привести решение задачи АВ для распределений $\mathbf{F}$ из так на-

зываемых классов экспоненциально убывающих правильно меняющихся распределений (см. § 6 в части II работы). Для некоторых таких распределений, имеющих плотность, решение задачи АВ содержится в [12]. В многомерном случае результаты, относящиеся к задаче АВ (в весьма частной постановке), получены в [28] (глава 3, раздел 3.2).

§ 4. Обобщение теоремы 3.4

Вернемся к задаче А. Как мы увидим во второй части работы, теорема 3.4 позволяет найти асимптотику вероятностей сверхбольших уклонений в задаче А для широкого класса распределений $\mathbf{F}$. Но не для всех. Например, для некоторых экспоненциально убывающих правильно меняющихся распределений (см. § 7) условия теоремы 3.4 оказываются не выполненными и поэтому получить решение в задаче А с помощью теоремы 3.4 не удастся. В связи с этим нам понадобится некоторое обобщение теоремы 3.4.

4.1. Основное утверждение. Пусть, как и прежде, $\underline{K}$ есть фиксированный срезанный снизу конус, целиком лежащий в $(\mathcal{A}')$. Условия $[\mathbf{U}_{\underline{K}}]$, $[\mathbf{R}_{\underline{K}}^{\gamma}]$ для семейства $\{\zeta^{(\alpha)}; \alpha \in \underline{K}\}$, фигурирующие в теореме 3.4, являются в известном смысле завышенными. То же относится к условию $[\mathbf{Z}_{\underline{K}}]$ для семейства $\{\xi^{(\alpha)}; \alpha \in \underline{K}\}$ в арифметическом случае.

Мы укажем более широкие условия, при которых утверждение теоремы 3.4 будет оставаться в силе (эти условия нам понадобятся в теореме 4.1).

Пусть $m = m_{\alpha} \geq 1$ — некоторая целочисленная функция аргумента α . Обозначим через $\mathcal{M}$ класс всех таких функций. Названные более широкие условия будут состоять в том, что в случае $[\mathbf{R}]$ для некоторой функции $m = m_{\alpha} \in \mathcal{M}$ условия $[\mathbf{U}_{\underline{K}}]$, $[\mathbf{R}_{\underline{K}}^{\gamma}]$ выполнены не для $\zeta^{(\alpha)}$, а для нормированных сумм $m_{\alpha}^{-1/2}[\zeta^{(\alpha)}(1) + \dots + \zeta^{(\alpha)}(m_{\alpha})]$. В этом случае мы будем говорить, что выполнены условия $[\mathbf{U}_{\underline{K}}(m)]$, $[\mathbf{R}_{\underline{K}}^{\gamma}(m)]$ соответственно. В арифметическом случае аналогично мы будем требовать выполнение условия $[\mathbf{Z}_{\underline{K}}]$ не для $\xi^{(\alpha)}$, а для сумм $\xi^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi^{(\alpha)}(m_{\alpha})$ для некоторой функции $m = m_{\alpha} \in \mathcal{M}$ и тогда будем говорить, что выполнено условие $[\mathbf{Z}_{\underline{K}}(m)]$ (условие $[\mathbf{U}_{\underline{K}}(m)]$ в арифметическом случае определяется так же, как и в нерешетчатом случае).

При выполнении этих условий будет справедлив аналог теоремы 3.4, в котором, однако, будет присутствовать дополнительное ограничение $m_{\alpha} \ll n$ для $\alpha = x/n$, т.е. отношение m_{α}/n стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим также следующее условие.

$[\mathbf{R}_{\underline{K}}^*(m)]$. Найдется куб $\Delta[v]$ со стороной $\Delta > 0$ и с вершиной в точке $v \in \mathbf{R}^d$ (которая может зависеть от α) такой, что распределение вектора $\zeta^{(\alpha)}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту с

плотностью $f^{(\alpha)}(y)$, а произведение $m_\alpha f^{(\alpha)}(y)$ в этом кубе равномерно отделено от нуля:

$$m_\alpha f^{(\alpha)}(y) \geq p > 0 \quad \text{при } y \in \Delta[v], \quad \alpha \in \underline{K}.$$

Из леммы 5.1, приведенной ниже в § 5, будет следовать, что условия $[UI_{\underline{K}}(m)]$, $[R_{\underline{K}}^*(m)]$ влекут за собой выполнение условия $[R_{\underline{K}}^\gamma(m^2)]$ для некоторого $\gamma > 0$, где $m^2 = m_\alpha^2 \in \mathcal{M}$.

Наконец, в арифметическом случае для $m \in \mathcal{M}$ рассмотрим следующее условие (оно понадобится в теореме 4.1).

$[Z_{\underline{K}}(m)]$. Выполнено условие $[Z]$ и для некоторых $p > 0$, $\Delta > 0$ и $v \in \mathbf{R}^d$ для куба $\Delta_\alpha[v]$ с вершиной в точке v (которая может зависеть от α) и со стороной $\Delta_\alpha = \Delta |\sigma(\alpha)|^{1/d}$ выполняется неравенство

$$m_\alpha \mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} = y\} \geq \frac{p}{|\sigma(\alpha)|} \quad \text{при } y \in \mathbf{Z}^d \cap \Delta_\alpha[v], \quad \alpha \in \underline{K}.$$

Сформулируем теперь основное утверждение (аналог теоремы 3.4, о котором шла речь выше).

Теорема 4.1. Пусть фиксированы функция $m = m_\alpha \in \mathcal{M}$ и усеченный конус $\underline{K} \subseteq (\mathcal{A}')$. Предположим, что выполнено условие $[UI_{\underline{K}}(m)]$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если выполнено условие $[R_{\underline{K}}^\gamma(m)]$, то справедливо утверждение (3.5), в котором для любых последовательностей $\delta(n) = o(1)$, $N_n \rightarrow \infty$ и числа $\gamma_1 < \gamma$ остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta, \alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N_n m_\alpha, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2, \alpha \in \underline{K}} |\varepsilon_n(\Delta, \alpha)| = 0, \quad (4.1)$$

где

$$\Delta_1 = \sigma_d(\alpha) \sqrt{m_\alpha} e^{-(n/m_\alpha) \gamma_1}, \quad \Delta_2 = \delta(n) \min\{|\lambda(\alpha)|^{-1}, \sqrt{n} \sigma_1(\alpha)\}.$$

(ii) Если выполнено условие $[Z_{\underline{K}}(m)]$, то справедливо утверждение (3.8), в котором остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha)$ при любой последовательности (N_n) такой, что $N_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d, \alpha \in \underline{K}, n \geq N_n m_\alpha} |\varepsilon_n(\alpha)| = 0.$$

4.2. Схема доказательства теоремы 4.1. Как было показано в § 2, основными элементами доказательства интегро-локальных (локальных) теорем в области сверхбольших уклонений являются интегро-локальные (локальные) теоремы в области нормальных уклонений для схемы серий. Интегро-локальные теоремы для схемы серий (для сумм $S_0^{(\alpha)}(n)$), полученные в работе [11] (см. теоремы 5.1 и 5.3 в § 5),

мы использовали при доказательстве теорем 3.1, 3.2, 3.4. Однако в работе [11] отсутствует подходящее утверждение для доказательства части (i) теоремы 4.1. Поэтому в п. 5.1 следующего параграфа наряду с формулировкой теоремы 1 из [11] (теорема 5.1) мы приводим необходимую для доказательства теоремы 4.1 модификацию этой теоремы (теорема 5.2). В п. 5.2 мы приводим формулировку локальной теоремы (теорема 5.3) в области нормальных уклонений для схемы серий в арифметическом случае, полученную в [11], которая используется в доказательстве теоремы 3.3. В п. 5.3 мы формулируем и доказываем локальную теорему в области нормальных уклонений для схемы серий в абсолютно непрерывном случае (теорема 5.4), необходимую для доказательства теоремы 3.2. Наконец, в п. 5.4 мы помещаем доказательство теоремы 4.1.

§ 5. Интегро-локальные и локальные теоремы в области нормальных уклонений для схемы серий

5.1. Нерешетчатый случай. Пусть задана последовательность $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ распределений в $\mathbf{R}^d$, зависящих от параметра $n = 1, 2, \dots$ (схема серий). Обозначим $\xi_{(n)}$ какой-нибудь случайный вектор с распределением $\mathbf{F}_{(n)}$. Как правило, нижний индекс (n) в обозначении $\xi_{(n)}$ мы будем для простоты опускать и писать ξ . Мы будем предполагать, что выполнено условие

$$\mathbf{E}\xi = 0, \quad \mathbf{E}\xi^\top \xi = E. \quad (5.1)$$

Частичные суммы k слагаемых в n -й серии обозначим

$$S(k) = S_{(n)}(k) = \xi(1) + \dots + \xi(k),$$

где $\xi(k)$ независимы и имеют общее распределение $\mathbf{F}_{(n)}$.

Наряду с $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ мы будем рассматривать также некоторые другие последовательности распределений $\{\mathbf{G}_{(n)}\}$. Относительно соответствующих им случайных векторов $\zeta_{(n)}$ также будет предполагаться выполнение условия (5.1). Для последовательности $\{\mathbf{G}_{(n)}\}$ рассмотрим два условия:

[UI].

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{E}(|\zeta_{(n)}|^2; |\zeta_{(n)}| \geq T) = 0;$$

[R γ].

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq T} |\mathbf{E}e^{(t, \zeta_{(n)})}| \leq e^{-d\gamma}.$$

В части II теоремы 1 в [11] установлено следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ выполнены условия (5.1), [UI], [R γ]. Тогда

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{n^{d/2}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_n(x, \Delta) \right], \quad (5.2)$$

$$\text{где } \phi(t) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|t|^2/2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0 \quad (5.3)$$

при $\Delta_1 = e^{-n^{\gamma_1}}$ и любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$, $\Delta_2 > 0$.

Рассмотрим далее последовательность $N = \{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных целых чисел. Класс всех таких последовательностей, удовлетворяющих соотношению $N_n = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, обозначим $\mathcal{N}$. Будем говорить, что последовательность распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ удовлетворяет условиям $[\text{UI}(N)]$, $[\text{R}^\gamma(N)]$, если последовательность $\{\mathbf{G}_{(n)}\}$ распределений случайных векторов

$$\zeta_{(n)} = \frac{S_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет условиям $[\text{UI}]$, $[\text{R}^\gamma]$ соответственно.

Справедливо следующее обобщение теоремы 5.1.

Теорема 5.2. Пусть для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$, удовлетворяющих (5.1), и для фиксированной последовательности $N \in \mathcal{N}$ выполнены условия $[\text{UI}(N)]$, $[\text{R}^\gamma(N)]$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{n^{d/2}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_n(x, \Delta) \right], \quad (5.4)$$

$$\text{где } \phi(t) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|t|^2/2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0 \quad (5.5)$$

при $\Delta_1 = e^{-(n/N_n)^{\gamma_1}} \sqrt{N_n}$ и любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$, $\Delta_2 > 0$.

Ясно, что в теореме 5.1 условия $[\text{UI}(N)]$, $[\text{R}^\gamma(N)]$ выполнены для последовательности $N_n \equiv 1$, так что теорема 5.1 является частным случаем теоремы 5.2. Можно показать, далее, что выполнение условий $[\text{UI}]$, $[\text{R}^\gamma]$ для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ влечет за собой выполнение условий $[\text{UI}(N)]$, $[\text{R}^\gamma(N)]$ для любой последовательности $N \in \mathcal{N}$ (мы не приводим доказательство этого утверждения, поскольку оно не понадобится в дальнейшем).

Доказательство теоремы 5.2. Введем обозначения $k_n = [n/N_n]$, $r_n = n - k_n N_n$, так что $n = k_n N_n + r_n$, $0 \leq r_n < N_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\zeta_{(n)}(i)$ — независимые копии вектора $\zeta_{(n)} = N_n^{-1/2} S_{(n)}(N_n)$:

$$\zeta_{(n)}(i) = N_n^{-1/2} (S_{(n)}(i N_n) - S_{(n)}((i-1) N_n)), \quad i = 1, \dots, k_n,$$

Обозначим далее

$$Z_{(n)}(j) = \zeta_{(n)}(1) + \dots + \zeta_{(n)}(j) = N_n^{-1/2} S_{(n)}(j N_n), \quad j = 1, \dots, k_n;$$

$$\zeta'_{(n)}(r_n) = N_n^{-1/2} (S_{(n)}(n) - S_{(n)}(k_n N_n)).$$

Тогда очевидно, что

$$S_{(n)}(n) = Z_{(n)}(k_n) \sqrt{N_n} + \zeta'_{(n)}(r_n) \sqrt{N_n}; \quad (5.6)$$

при этом слагаемые в правой части (5.6) независимы. Для сумм $Z_{(n)}(k_n)$ выполнены все условия теоремы 5.1, поэтому

$$\mathbf{P}\{Z_{(n)}(k_n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(k_n)^{d/2}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{k_n}}\right) + \varepsilon_n(x, \Delta) \right],$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0$ при $\Delta_1 = e^{-k_n \gamma_1}$ для любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$, $\Delta_2 > 0$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\sqrt{N_n} Z_{(n)}(k_n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{(k_n N_n)^{d/2}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{k_n N_n}}\right) + \varepsilon_n(x, \Delta) \right], \quad (5.7)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \bar{\Delta}_1 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0 \quad (5.8)$$

при $\bar{\Delta}_1 = \sqrt{N_n} e^{-k_n \gamma_1}$ для любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma$, $\bar{\Delta}_2 > 0$. В силу (5.6)–(5.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{(n)}(n) \in \Delta[x]\} &= \mathbf{P}\left\{\sqrt{N_n} Z_{(n)}(k_n) \in \Delta\left[x - \sqrt{N_n} \zeta'_{(n)}(r_n)\right]\right\} \\ &= \frac{\Delta^d}{(\sqrt{k_n N_n})^d} \left[\mathbf{E} \phi\left(\frac{x - \sqrt{N_n} \zeta'_{(n)}(r_n)}{\sqrt{k_n N_n}}\right) + \mathbf{E} \varepsilon_n\left(x - \sqrt{N_n} \zeta'_{(n)}(r_n), \Delta\right) \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$\frac{1}{(\sqrt{k_n N_n})^d} = \frac{1}{(\sqrt{n})^d} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (5.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \bar{\Delta}_1 \leq \Delta \leq \bar{\Delta}_2} \left| \mathbf{E} \varepsilon_n\left(x - \sqrt{N_n} \zeta'_{(n)}(r_n), \Delta\right) \right| = 0.$$

Нетрудно видеть, далее, что для случайного вектора $\eta_{(n)} := \sqrt{N_n} \zeta'_{(n)}(r_n) / \sqrt{k_n N_n}$ выполняются соотношения $\mathbf{E} \eta_{(n)} = 0$ и $\mathbf{E} \eta_{(n)}^\top \eta_{(n)} = (k_n N_n)^{-1} r_n E = o(1) E$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность случайных векторов $\eta_{(n)}$ сходится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x \left| \mathbf{E} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{k_n N_n}} - \eta_{(n)}\right) - \phi\left(\frac{x}{\sqrt{k_n N_n}}\right) \right| = 0.$$

Наконец, очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x \left| \phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{x}{\sqrt{k_n N_n}}\right) \right| = 0. \quad (5.11)$$

Из соотношений (5.10), (5.11) вытекает, что правая часть формулы (5.9) имеет вид правой части формулы (5.4), в которой остаточный член $\varepsilon_n(x, \Delta)$ удовлетворяет (5.5). Теорема 5.2 доказана.

Достаточным для выполнения условия $[UI(N)]$ является следующее соотношение:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}| \geq \tau \sqrt{N_n} \right) = 0$$

для любого $\tau > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\left| \frac{S_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right|^2; \left| \frac{S_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq T \right) \\ &= \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}(N_n)|^2; \left| \frac{\xi_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq \frac{T}{2}, \left| \frac{S_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq T \right) \\ &+ \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}(N_n)|^2; \left| \frac{\xi_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| < \frac{T}{2}, \left| \frac{S_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq T \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}(N_n)|^2; \left| \frac{\xi_{(n)}(N_n)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq \frac{T}{2} \right) \\ &+ \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}(N_n)|^2; \left| \frac{S_{(n)}(N_n - 1)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq \frac{T}{2} \right) \\ &= o(1) + \mathbf{E} |\xi_{(n)}(N_n)|^2 \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S_{(n)}(N_n - 1)}{\sqrt{N_n}} \right| \geq \frac{T}{2} \right\}. \end{aligned}$$

В силу неравенства Чебышёва второе слагаемое в правой части последнего выражения стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ равномерно по n . Поэтому условие $[UI(N)]$ доказано.

Приведем теперь достаточное условие выполнения $[R^\gamma(N)]$ для заданной последовательности $N \in \mathcal{N}$ и некоторого $\gamma > 0$.

Лемма 5.1. Пусть для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$, удовлетворяющих (5.1), и для фиксированной последовательности $N = \{N_n\} \in \mathcal{N}$ выполнено условие $[UI(N^{(1)})]$, где $N^{(1)} = \{[\sqrt{N_n}]\} \in \mathcal{N}$. Пусть, кроме того, распределение $\mathbf{F}_{(n)}$ случайного вектора $\xi_{(n)}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту с плотностью $f_{(n)}(x)$, которая при всех достаточно больших n удовлетворяет на кубе $\Delta[u_n]$ неравенству

$$f_{(n)}(x) \geq \frac{h}{\sqrt{N_n}}, \quad (5.12)$$

где константы $h > 0$, $\Delta > 0$ и последовательность $u_n \in \mathbf{R}^d$ фиксированы. Тогда для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ выполнено условие $[R^\gamma(N)]$ при некотором $\gamma > 0$.

Доказательство. Для доказательства $[R^\gamma(N)]$ при некотором $\gamma > 0$ достаточно убедиться, что найдутся числа $T > 0$, $n_0 < \infty$, $\gamma' > 0$ такие, что

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{|t| \geq T} \left| f_{(n)} \left(\frac{t}{\sqrt{N_n}} \right) \right|^{N_n} \leq e^{-\gamma'}, \quad (5.13)$$

где, как и прежде, $f_{(n)}(t)$ — характеристическая функция $\xi_{(n)}$. Ясно, что соотношение (5.13) будет выполнено, если для некоторых $c > 0$, $T > 0$, $n_0 < \infty$ справедливо неравенство

$$A_n := \sup_{|t| \geq T/\sqrt{N_n}} |f_{(n)}(t)| \leq 1 - \frac{c}{N_n} \quad \text{при всех } n \geq n_0. \quad (5.14)$$

Пусть для $M_n = \delta/N_n^{1/4}$

$$A_n^{(1)}(\delta) := \sup_{M_n \geq |t| \geq T/\sqrt{N_n}} |f_{(n)}(t)|, \quad A_n^{(2)}(\delta) := \sup_{|t| \geq M_n} |f_{(n)}(t)|,$$

так что $A_n = \max\{A_n^{(1)}(\delta), A_n^{(2)}(\delta)\}$. Для доказательства (5.14) достаточно убедиться, что для некоторых $\delta > 0$, $c > 0$ и всех достаточно больших n выполнены неравенства

$$A_n^{(1)}(\delta) \leq 1 - \frac{c}{N_n}, \quad A_n^{(2)}(\delta) \leq 1 - \frac{c}{N_n}. \quad (5.15)$$

Из условия $[UI(N^{(1)})]$ вытекает, что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \left(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}| \geq TN_n^{1/4} \right) = 0. \quad (5.16)$$

С помощью формулы Тейлора и (5.16) получаем $|f_{(n)}(t)| \leq 1 - ct^2$ при всех $|t| \leq \delta\sqrt{N_n}$, $n \geq 1$, и некоторых $c > 0$, $\delta > 0$. Отсюда следует первое неравенство в (5.15) для найденных c, δ .

В силу условия (5.12) $|f_{(n)}(t)| \leq 1 - h/\sqrt{N_n} + (h/\sqrt{N_n})|g(t)|$ для $t \in \mathbf{R}^d$, где $g(t)$ — характеристическая функция равномерного распределения в кубе с центром в нуле и ребром длины Δ . Поэтому для $M_n = \delta/N_n^{1/4}$

$$A_n^{(2)}(\delta) \leq 1 - \frac{h}{\sqrt{N_n}} + \frac{h}{\sqrt{N_n}} \sup_{|t| \geq M_n} |g(t)|.$$

Поскольку для всех $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$ и для некоторого $b > 0$ имеет место неравенство $\sup_{|t| \geq \nu} |g(t)| \leq 1 - b\nu^2$, то

$$A_n^{(2)}(\delta) \leq 1 - \frac{h}{\sqrt{N_n}} + \frac{h}{\sqrt{N_n}} \left(1 - b \frac{\delta^2}{\sqrt{N_n}} \right) = 1 - \frac{hb\delta^2}{N_n}.$$

Второе неравенство в (5.15) установлено. Лемма 5.1 доказана.

5.2. Арифметический случай. В этом пункте мы считаем, что распределения $\mathbf{F}_{(n)}$ случайных векторов $\xi_{(n)}$ удовлетворяют условию арифметичности $[Z]$, равномерную версию которого для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ можно записать в следующем виде.

$[Z]$. Для любого $t \in \mathbf{Z}^d$ и всех n справедливо равенство $f_{(n)}(2\pi t) = 1$ и для любого $\delta > 0$ — неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta, \max_{1 \leq i \leq d} |t_i| \leq \pi} |f_{(n)}(t)| < 1,$$

где $f_{(n)}(t) = \mathbf{E} e^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}$.

Условие $[Z]$ для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ есть условие невырождения решетки, на которой сосредоточены случайные векторы $\xi_{(n)}$, в более редкую. Например, в $\mathbf{R}^1$ оно исключает сходимость к нулю при $n \rightarrow \infty$ вероятности $\mathbf{P}\{\xi_{(n)} \text{ нечетно}\}$.

Следующее условие является достаточным для выполнения $[Z]$ (см. лемму 1 в [11]).

$[Z^*]$. Для любого $t \in \mathbf{Z}^d$ выполняется $f_{(n)}(2\pi t) = 1$ и найдутся $u_n \in \mathbf{R}^d$, $p > 0$, $\Delta > 0$ и $T_n \rightarrow \infty$ такие, что для всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi_{(n)} = y\} \geq \frac{p}{T_n^d \Delta^d} \quad \text{при } y \in \mathbf{Z}^d \quad \text{и} \quad \frac{1}{T_n} y \in \Delta[u_n].$$

Пусть $N = \{N_n\} \in \mathcal{N}$. Будем говорить, что для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ случайных векторов $\xi_{(n)}$ выполнено условие $[Z(N)]$, если для последовательности распределений $\{\mathbf{G}_{(n)}\}$ случайных векторов $S_{(n)}(N_n)$ при $n = 1, 2, \dots$ выполнено условие $[Z]$.

Положим $a_{(n)} = \mathbf{E}\xi_{(n)}$, $B_{(n)}^2 = \mathbf{E}(\xi_{(n)} - a_{(n)})^\top (\xi_{(n)} - a_{(n)})$. Собственные числа матрицы $B_{(n)}$ обозначим $B_{(n)}(1) \leq B_{(n)}(2) \leq \dots \leq B_{(n)}(d)$, так что определитель $|B_{(n)}|$ матрицы $B_{(n)}$ равен $|B_{(n)}| = \prod_{i=1}^d B_{(n)}(i)$.

Как и прежде, наряду с векторами $\xi_{(n)}$ рассмотрим векторы $\zeta_{(n)} = (\xi_{(n)} - a_{(n)})B_{(n)}^{-1}$ с нулевыми средними и единичными ковариационными матрицами. В арифметическом случае для схемы серий справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}B_{(n)}(1) = \infty$ и для фиксированной последовательности $N \in \mathcal{N}$ последовательность $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ распределений $\xi_{(n)}$ удовлетворяет условию $[Z(N)]$, а последовательность $\{\mathbf{G}_{(n)}\}$ распределений $\zeta_{(n)}$ — условию $[UI(N)]$. Тогда для $x \in \mathbf{Z}^d$

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{n^{d/2}|B_{(n)}|} \left[\phi((x - na_{(n)})n^{-1/2}B_{(n)}^{-1}) + \varepsilon_n(x) \right],$$

где $\phi(t) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|t|^2/2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Теорема 5.3 содержится в работе [11] (см. теорему 2 и замечание после формулировки теоремы 2 в [11]).

Приведем теперь условия, достаточные для выполнения $[Z(N)]$ (ср. с леммой 1 в [11]).

Лемма 5.2. Пусть для любого $t \in \mathbf{Z}^d$ выполняется $f_{(n)}(2\pi t) = 1$. Пусть, далее, найдутся числа $\Delta > 0$, $p \in (0, 1)$ и последовательности $u_n \in \mathbf{R}^d$, $N \in \mathcal{N}$, $0 < r_n \rightarrow 0$ такие, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$N_n \mathbf{P}\{\xi_{(n)} = y\} \geq pr_n^d \quad \text{при } y \in \Omega_n, \quad (5.17)$$

где $\Omega_n = \{y \in \mathbf{Z}^d: y r_n \in \Delta[u_n]\}$. Тогда последовательность распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ случайных векторов $\xi_{(n)}$ удовлетворяет условию $[Z(N)]$.

Поскольку доказательство леммы 5.2 в значительной степени повторяет доказательство леммы 1 в [11], мы его опускаем.

5.3. Случай, когда распределение вектора $\xi_{(n)}$ абсолютно непрерывно на подходящем полупространстве. Обозначим $U_\delta(0) = \{y \in \mathbf{R}^d: |y| \leq \delta\}$. Для того, чтобы распределение суммы $S(n)$ независимых одинаково распределенных случайных векторов было абсолютно непрерывно на множестве $U_\delta(0)$ с ограниченной плотностью $f_{S(n)}(y)$, $y \in U_\delta(0)$, достаточно, чтобы распределение $\mathbf{F}$ было абсолютно непрерывно на полупространстве $\Pi = \Pi_{e,c} := \{x: \langle e, x \rangle \geq -c\}$, содержащем $n^{-1}U_\delta(0)$, а соответствующая плотность $f(y)$ была ограничена на Π .

Пусть, как и в п. 5.1, распределение $\mathbf{F}_{(n)}$ случайного d -мерного вектора $\xi_{(n)}$ удовлетворяет условию (5.1).

Рассмотрим вместо условия $[R^\gamma]$ следующее условие.

$[R^{(\text{den})}]$. Для некоторой последовательности пар (e_n, c_n) , где $e_n \in \mathbf{R}^d$, $|e_n| = 1$, $c_n \in \mathbf{R}^1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n > 0$, распределение $\mathbf{F}_{(n)}$ случайного вектора $\xi_{(n)}$ абсолютно непрерывно на множестве $\Pi_n = \{y: \langle e_n, y \rangle \geq -c_n\}$ с плотностью $f_{(n)}(y)$ и при этом

$$\sup_{n \geq 1, y \in \Pi_n} f_{(n)}(y) < \infty.$$

Кроме того, для некоторых $\Delta > 0$, $h > 0$ и последовательности $u_n \in \mathbf{R}^d$, $\Delta[u_n] \subset \Pi_n$, выполняется

$$f_{(n)}(y) \geq h \quad \text{при } y \in \Delta[u_n].$$

Теорема 5.4. Пусть для последовательности распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ выполнены условия (5.1), $[UI]$, $[R^{(\text{den})}]$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ распределение суммы $S(n)$ на множестве $U_\delta(0) = \{y: |y| \leq \delta\}$ абсолютно непрерывно с плотностью $f_{S(n)}(y)$ и при этом справедливо соотношение

$$f_{S(n)}(y) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} |B_{(n)}|} (1 + \varepsilon_n(y)),$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|y| \leq \delta} |\varepsilon_n(y)| = 0. \quad (5.18)$$

Для доказательства теоремы 5.4 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3. В условиях теоремы 5.4 можно выбрать $c'_n \in (0, c_n]$ (последовательность c_n из условия $[R^{(\text{den})}]$) таким образом, что будут

выполнены соотношения

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} c'_n > 0,$$

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\langle e_n, \xi_n \rangle \geq -c'_n\} > 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\langle e_n, \xi_n \rangle \geq -c'_n\} < 1. \quad (5.19)$$

Лемму 5.3 мы докажем ниже, в конце настоящего пункта. В силу леммы 5.3 можно считать, не ограничивая общности, что в условии $[R^{(\text{den})}]$ последовательность $\{c_n\}$ выбрана таким образом, что для некоторой константы $s_0 > 0$ и для всех натуральных $n \geq 1$ числа $p_n^{(1)} := \mathbf{P}\{\langle e_n, \xi_n \rangle \geq -c_n\}$, $p_n^{(2)} := \mathbf{P}\{\langle e_n, \xi_n \rangle < -c_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям: $s_0 \leq p_n^{(1)} \leq 1 - s_0$, $p_n^{(1)} + p_n^{(2)} = 1$ и при этом $\inf_{n \geq 1} c_n \geq s_0$.

Доказательство теоремы 5.4. Наряду с вектором $\xi_{(n)}$ с распределением $\mathbf{F}_{(n)}$ определим два случайных вектора $\xi_{(n)}^{(1)}$, $\xi_{(n)}^{(2)}$ с распределениями

$$\mathbf{F}_{(n)}^{(1)}(B) := \mathbf{P}(\xi_{(n)} \in B \mid \langle e_n, \xi_n \rangle \geq c_n),$$

$$\mathbf{F}_{(n)}^{(2)}(B) := \mathbf{P}(\xi_{(n)} \in B \mid \langle e_n, \xi_n \rangle < c_n)$$

соответственно. Тогда очевидно, что

$$\mathbf{F}_{(n)} = p_n^{(1)} \mathbf{F}_{(n)}^{(1)} + p_n^{(2)} \mathbf{F}_{(n)}^{(2)}, \quad (5.20)$$

и если обозначить $a_{(n)}^{(i)}$, $(B_{(n)}^{(i)})^2$ среднее и ковариационную матрицу вектора $\xi_{(n)}^{(i)}$, $i = 1, 2$, то справедливы тождества $0 = p_n^{(1)} a_{(n)}^{(1)} + p_n^{(2)} a_{(n)}^{(2)}$ и $E = p_n^{(1)} (B_{(n)}^{(1)})^2 + p_n^{(2)} (B_{(n)}^{(2)})^2$. При этом носители распределений $\mathbf{F}_{(n)}^{(1)}$, $\mathbf{F}_{(n)}^{(2)}$ не пересекаются и распределение $\mathbf{F}_{(n)}^{(1)}$ абсолютно непрерывно с плотностью $f_{(n)}^{(1)}(y)$, которая равномерно ограничена: для некоторого $C < \infty$ выполняется

$$\sup_{n \geq 1, y \in \mathbf{R}^d} f_{(n)}^{(1)}(y) \leq C < \infty. \quad (5.21)$$

Обозначим $\delta = s_0/2$. Независимые копии случайных векторов $\xi_{(n)}^{(i)}$ обозначим $\xi_{(n)}^{(i)}(j)$, а их суммы — $S_{(n)}^{(i)}(k)$, $i = 1, 2$. При этом по построению векторы $S_{(n)}^{(1)}(i)$, $S_{(n)}^{(2)}(j)$ независимы для всех i, j . В силу (5.20) для любого измеримого множества $B \subseteq U_\delta(0)$ справедливо тождество

$$\mathbf{P}\{S_{(n)}(n) \in B\} = \sum_{k=1}^n C_n^k (p_n^{(1)})^k (p_n^{(2)})^{n-k} \mathbf{P}\{S_{(n)}^{(1)}(k) + S_{(n)}^{(2)}(n-k) \in B\}, \quad (5.22)$$

где $S_{(n)}^{(1)}(0) = S_{(n)}^{(2)}(0) = 0$. В правой части (5.22) отсутствует слагаемое $(p_n^{(2)})^n \mathbf{P}\{S_{(n)}^{(2)}(n) \in B\}$, соответствующее $k = 0$ и равное нулю по той причине, что носитель распределения вектора $S_{(n)}^{(2)}(n)$ не пересекается с множеством $B \subseteq U_\delta(0)$. Распределение случайного вектора

$S_{(n)}^{(1)}(k) + S_{(n)}^{(2)}(n - k)$ при $k = 1, \dots, n$ абсолютно непрерывно с плотностью $f_{n,k}(y)$, ограниченной равномерно по $n \geq 1$ и $y \in \mathbf{R}^d$, поэтому из равенства (5.22) следует, что на множестве $U_\delta(0)$ распределение суммы абсолютно непрерывно с плотностью $f_{S(n)}(y)$, удовлетворяющей равенству

$$f_{S(n)}(y) = \sum_{k=1}^n q_{n,k}(y), \quad y \in U_\delta(0), \quad (5.23)$$

где $q_{n,k}(y) := C_n^k (p_n^{(1)})^k (p_n^{(2)})^{n-k} f_{n,k}(y)$. Обозначим

$$q_n^{(1)}(y) = \sum_{|k - np_n^{(1)}| \leq \sqrt{n} \ln n} q_{n,k}(y), \quad q_n^{(2)}(y) = \sum_{|k - np_n^{(1)}| > \sqrt{n} \ln n} q_{n,k}(y),$$

так что равенство (5.23) принимает вид

$$f_{S(n)}(y) = q_n^{(1)}(y) + q_n^{(2)}(y), \quad y \in U_\delta(0). \quad (5.24)$$

Далее нам понадобятся две леммы.

Лемма 5.4. Для плотности $f_{n,k}(y)$ суммы $S_{(n)}^{(1)}(k) + S_{(n)}^{(2)}(n - k)$ справедливо соотношение

$$f_{n,k}(y) = \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n,k)}|} \left[\phi((y - na_{(n,k)}) n^{-1/2} B_{(n,k)}^{-1}) + \varepsilon_n(y, k) \right],$$

где $\phi(y) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|y|^2/2}$,

$$na_{(n,k)} = kp_n^{(1)} a_{(n,k)}^{(1)} + (n - k) p_n^{(2)} a_{(n,k)}^{(2)},$$

$$n(B_{(n,k)})^2 = kp_n^{(1)} (B_{(n,k)}^{(1)})^2 + (n - k) p_n^{(2)} (B_{(n,k)}^{(2)})^2;$$

для остаточного члена $\varepsilon_n(y, k)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbf{R}^d, k=2, \dots, n} |\varepsilon_n(y, k)| = 0.$$

Доказательство. В силу неравенства (5.21) квадрат функции $f_{(n)}^{(1)}(y)$ интегрируем, и этот интеграл равномерно по n ограничен. Поэтому, в силу теоремы Фурье–Планшереля, абсолютно интегрируем и квадрат характеристической функции случайного вектора $\xi_{(n)}^{(1)}$, и этот интеграл равномерно по n ограничен. Следовательно, применяя формулу обращения и стандартную технику (см., например, [11]), получаем утверждение леммы 5.4.

Лемма 5.5. (i) Справедливо соотношение

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) [1 + \varepsilon_n(k)],$$

где $\phi(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq p \leq 1-s, |k - np| \leq \sqrt{n} \ln n} |\varepsilon_n(k)| = 0$ для любого $s \in (0, \frac{1}{2})$.

(ii) Для любых $N < \infty$, $s \in (0, \frac{1}{2})$

$$\sup_{s \leq p \leq 1-s} \sum_{|k-np| > \sqrt{n} \ln n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = o(n^{-N}).$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину η_n , принимающую значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно, и обозначим $Z(n) = \eta_n(1) + \dots + \eta_n(n)$, где $\eta_n(i)$ суть независимые копии случайной величины η_n . Тогда $\mathbf{P}\{Z(n) = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, и в частном случае, когда $p \in (0, 1)$ фиксировано, утверждение части (i) леммы 5.5 следует из части (iv) теоремы 1.1. Следуя пути доказательства теоремы 3.3 и используя при этом теорему 5.3, получаем доказательство равномерной версии части (i) леммы 5.5 в общем случае, когда p не фиксировано, $p \in [s, 1-s]$. Поскольку утверждение части (ii) является следствием экспоненциального неравенства Чебышёва, которое позволяет оценить $\mathbf{P}\{|Z(n) - np| > \sqrt{n} \ln n\}$, лемма 5.5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5.4. В силу утверждения части (ii) леммы 5.5

$$q_n^{(2)}(x) = o(n^{-d/2}). \quad (5.25)$$

Применяя далее утверждения леммы 5.4 и части (i) леммы 5.5, убеждаемся, что

$$q_n^{(1)}(y) = n^{-d/2}[\phi(0) + \varepsilon_n(y)], \quad (5.26)$$

где $\varepsilon_n(y)$ удовлетворяет (5.18). Возвращаясь к тождеству (5.24) и используя (5.25) и (5.26), получаем доказательство теоремы 5.4.

Нам осталось провести доказательство леммы 5.3.

Доказательство леммы 5.3. Для произвольной невозрастающей функции $h(t): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $h(0) = 1$, $h(\infty) = 0$, рассмотрим класс случайных величин

$$M_h = \{\eta: \mathbf{E}\eta = 0, \mathbf{E}\eta^2 = 1, \mathbf{E}(\eta^2; |\eta| \geq t) \leq h(t) \text{ для всех } t \geq 0\}.$$

Очевидно, что класс M_h является компактом относительно топологии слабой сходимости случайных величин. Справедливо следующее свойство: найдется положительная константа $\delta = \delta_h$, зависящая только от h , такая, что выполняется неравенство

$$\inf_{\eta \in M_h} \mathbf{P}\{\eta < -\delta\} \geq \delta. \quad (5.27)$$

Действительно, если для любого $\delta > 0$ не выполнено неравенство в (5.27), то найдется последовательность $\eta_n \in M_h$, слабо сходящаяся к $\eta \in M_h$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_n < -1/n\} = 0$. Следовательно, предельная случайная величина η обладает свойством $\mathbf{P}\{\eta < 0\} = 0$ и поэтому не может принадлежать классу M_h . Полученное противоречие доказывает (5.27).

Обозначим теперь $\eta_n = \langle e_n, \xi_{(n)} \rangle$, где e_n — единичные векторы из условия $[R^{(\text{den})}]$ в п. 5.3. Пусть $r_1 = \inf_{n \geq 1} c_n$, $r_2 = \inf_{n \geq 1} \mathbf{P}\{\eta_n \geq -c_n\}$, $r_3 = \inf_{n \geq 1} \mathbf{P}\{\eta_n < -c_n\}$. В силу условий доказываемой леммы константы r_1 и r_2 положительны. Далее, если константа r_3 также положительна, то утверждение леммы 5.3 выполнено для $c'_n = c_n$. Если же $r_3 = 0$, то воспользуемся тем обстоятельством, что для некоторой функции h все случайные величины η_n лежат в одном классе M_h , и выберем в силу (5.27) положительную константу $r_4 \in (0, \min\{r_1, r_2\})$ такую, что

$$\inf_{n \geq 1} \mathbf{P}\{\eta_n < -r_4\} \geq r_4. \quad (5.28)$$

Далее построим искомую последовательность $c'_n \in (0, c_n]$. Если $\mathbf{P}\{\eta_n < -c_n\} \geq r_4$, то положим $c'_n = c_n$. Если же $\mathbf{P}\{\eta_n < -c_n\} < r_4$, то в силу (5.28) и непрерывности функции распределения $\mathbf{P}\{\eta_n < t\}$ при $t \geq -c_n$ можно выбрать $c'_n \in (r_4, c_n]$ таким образом, что $\mathbf{P}\{\eta_n < -c'_n\} = r_4$. Для построенной таким образом последовательности выполнено утверждение доказываемой леммы. Лемма 5.3 доказана.

5.4. Доказательство теоремы 4.1. Для числа Δ , которое рассматривается в части (i) теоремы 4.1, выполнено соотношение (2.7). Поэтому в силу (2.9) нам достаточно доказать соотношение (3.1) при $y = 0$, в котором остаточный член $\varepsilon_n(\Delta, \alpha) = \varepsilon_n(\Delta, \alpha, 0)$ удовлетворяет (4.1). Поскольку это следует непосредственно из теоремы 5.2, часть (i) теоремы 4.1 доказана.

Часть (ii) теоремы 4.1 является непосредственным следствием формулы (2.19) и теоремы 5.3. Теорема 4.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
2. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
3. Боровков А. А., Rogozin Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.
4. Боровков А. А., Могильский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 223 с.
5. Stone C. On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1965/66). V. II, Part 2. Berkeley: Univ. California Press, 1966, p. 217–224.
6. Stone C. A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 546–551.
7. Feller W. C. On regular variation and local limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1965/66). V. II, Part 1. Berkeley: Univ. California Press, 1966, p. 373–388.
8. Боровков А. А., Могильский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 3–17.

9. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 5–29.
10. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
11. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий. — Матем. заметки, 2006, т. 79, № 4, с. 468–482.
12. Розовский Л. В. О сверхбольших отклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 1, с. 78–103.
13. Daniels H. E. Saddlepoint approximations in statistics. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, № 4, p. 631–650.
14. Нагаев А. В. Большие отклонения для одного класса распределений. — Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Фан, 1963, с. 56–68.
15. Нагаев А. В. Большие отклонения для одного класса положительных случайных величин. — Изв. АН УзССР, 1963, № 1, с. 18–20.
16. Нагаев А. В., Ходжабаган С. С. Предельные теоремы, учитывающие большие отклонения, для сумм положительных случайных величин. — Литов. матем. сб., 1974, т. 14, № 1, с. 149–163.
17. Нагаев А. В. Большие отклонения для сумм решетчатых случайных величин при выполнении условия Крамера. — Дискретн. матем., 1998, т. 10, № 3, с. 115–130.
18. Нагаев А. В. Локальные теоремы с учетом больших отклонений. — Предельные теоремы и вероятностные процессы. Ташкент: Фан, 1967, с. 71–88.
19. Нагаев А. В. Предельные теоремы для одной схемы серий. — Предельные теоремы и вероятностные процессы. Ташкент: Фан, 1967, с. 43–70.
20. Нагаев А. В. Крамеровские большие отклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
21. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
22. Заиграев А. Ю., Нагаев А. В. Абелевы теоремы, граничные свойства сопряженных распределений и большие отклонения сумм независимых случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 701–719.
23. Боровков А. А. Интегро-локальные и интегральные предельные теоремы о больших отклонениях для сумм случайных векторов. Регулярный случай. — Сиб. матем. журн., 2002, т. 43, № 3, с. 508–525.
24. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
25. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. II. Регулярные экспоненциально убывающие распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 209–230.
26. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
27. Боровков А. А. Теория вероятностей. — М./Новосибирск: Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, 1999, 470 с.
28. Zaihrayev O. Large-deviation theorems for sums of independent and identically distributed random vectors. Torun: Uniwersytet Mikołaja Kopernika, 2005.

Поступила в редакцию
21.XII.2005