Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Вахания, В. В. Кварацхелия, Безусловная сходимость слабо субгауссовских рядов в банаховых пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 295–318

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 05:51:48

© 2006 г. ВАХАНИЯ Н. Н.*, КВАРАЦХЕЛИЯ В. В.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ СЛАБО СУБГАУССОВСКИХ
РЯДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

Получены характеристики классов банаховых пространств, изоморфных c_0 , а также пространств с безусловным базисом, не содержащих l_∞^n равномерно, на языке п.н. безусловной сходимости слабо субгауссовских рядов. Под п.н. безусловной сходимостью случайных рядов понимается сходимость всех перестановок данного ряда на одном и том же множестве полной вероятности. Исследуются также вопросы п.н. безусловной и слабо абсолютной сходимости в пространствах, изоморфных c_0 .

Ключевые слова и фразы: банахово пространство с безусловным базисом; п.н. безусловная сходимость; субгауссовская случайная величина; слабо субгауссовский случайный элемент; строго субгауссовский случайный элемент; гауссовский случайный элемент; банахово пространство, не содержащее l_∞^n равномерно.

1. Введение. Пусть X — вещественное банахово пространство, X^* — его сопряженное. Говорят, что ряд $\sum_{k \geq 1} x_k$ сходится безусловно в пространстве X , если сходится ряд $\sum_{k \geq 1} x_{\pi(k)}$ для любой перестановки π . Мы будем пользоваться следующим критерием безусловной сходимости рядов в банаховых пространствах.

Предложение 1. Ряд $\sum_k x_k$ сходится безусловно в пространстве X в том и только том случае, если выполнены следующие два условия:

- (а) $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, x_k \rangle| < \infty$ для всех $x^* \in X^*$;
- (б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq n} |\langle x^*, x_k \rangle| = 0$.

Известно [6], что если банахово пространство не содержит подпространства, изоморфного c_0 , то выполнение условия (а) уже обеспечивает безусловную сходимость. В тех случаях, когда известно только выполнение условия (а), будем говорить, что ряд $\sum_{k \geq 1} x_k$ сходится слабо абсолютно.

* Институт вычислительной математики им. Н.И. Мусхелишвили АН Грузии, ул. Акури, 8, 0193 Тбилиси, Грузия; e-mail: vakhania@gw.acnet.ge

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке грантом CRDF-GRDF № GEM1-3328-TB-03 и грантом Академии наук Грузии № 1.15.04.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, (ξ_k) — последовательность случайных элементов со значениями в X (т.е. сепарабельно-значных измеримых по Борелю отображений Ω в X).

О п р е д е л е н и е . Случайный ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится почти наверное (п.н.) безусловно в пространстве X , если найдется множество $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ полной вероятности ($\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$) такое, что для каждого $\omega \in \Omega_0$ сходится любая перестановка ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k(\omega)$.

Заметим, что данное определение отличается от п.н. перестановочной сходимости (п.н. сходимости любой перестановки) уже в одномерном случае. Убедиться в этом можно на простом примере ряда $\sum_{k \geq 1} k^{-1} \gamma_k$, где (γ_k) — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Ясно, что этот ряд сходится п.н. перестановочно, однако не сходится п.н. безусловно, так как не сходится п.н. абсолютно.

Учитывая предложение 1, заметим, что ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. безусловно тогда и только тогда, когда найдется множество $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ полной вероятности такое, что для всех $\omega \in \Omega_0$ выполняются следующие условия: (а) $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| < \infty$ для каждого $x^* \in X^*$ и (б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq n} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| = 0$. В тех случаях, когда известно только выполнение условия (а), будем говорить, что ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. слабо абсолютно.

В пространстве c_0 ряд $\sum_{k \geq 1} e_k \gamma_k$, где $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица стоит на k -м месте), $k = 1, 2, \dots$, не сходится п.н. слабо абсолютно, поскольку последовательность (γ_k) не является п.н. ограниченной. Однако, как легко видеть, для всех $x^* \in c_0^* (= l_1)$ ряд $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, e_k \gamma_k \rangle|$ сходится на множестве полной вероятности, которое зависит от x^* .

Следуя [12], будем говорить, что случайная величина ζ является субгауссовской, если для некоторого a , $0 \leq a < \infty$, и для всех вещественных чисел t выполняется неравенство

$$\mathbf{E} e^{t\zeta} \leq e^{a^2 t^2/2},$$

где $\mathbf{E}$ символ математического ожидания.

Для произвольной субгауссовской случайной величины ζ через $\tau(\zeta)$ будет обозначаться число, определяемое равенством

$$\tau(\zeta) = \inf \{a \in [0, \infty): \mathbf{E} e^{t\zeta} \leq e^{a^2 t^2/2} \text{ для всех } -\infty < t < +\infty\}.$$

Число $\tau(\zeta)$ называется гауссовским стандартом случайной величины ζ (в [12] используется термин *гауссовское отклонение*). Множество всех субгауссовских случайных величин образует банахово пространство с нормой τ [1], [2]. Легко видеть, что если ζ — субгауссовская случайная величина, то $\mathbf{E}\zeta = 0$ и $\tau^2(\zeta) \geq \mathbf{E}\zeta^2$. Ясно, что центрированная гауссовская случайная величина g с дисперсией σ^2 является субгауссовской и $\tau(g) = \sigma$. Отметим одно неравенство, которое устанавливает связь

между моментами и гауссовским стандартом субгауссовской случайной величины [1]:

$$\mathbf{E}|\zeta|^p \leq \beta_p \tau^p(\zeta), \quad p > 0, \quad (1)$$

где $\beta_p = 2(p/e)^{p/2}$. Заметим, что для значений $0 < p \leq 2$ можно взять $\beta_p = 1$.

Говорят, что субгауссовская случайная величина ζ является *строго субгауссовской*, если $\tau(\zeta) = (\mathbf{E}\zeta^2)^{1/2}$ [1]. Для произвольной случайной величины ζ обозначим

$$\vartheta_2(\zeta) = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^n} \mathbf{E}\zeta^{2n} \right)^{1/(2n)}.$$

Можно показать [1], [2], что центрированная случайная величина ζ является субгауссовской тогда и только тогда, когда $\vartheta_2(\zeta) < \infty$. Кроме того, для всех субгауссовских случайных величин ζ

$$(2.05)^{-1/4} \sqrt{\frac{2}{e}} \tau(\zeta) \leq \vartheta_2(\zeta) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \tau(\zeta).$$

Константа в левой части несколько улучшена в [3].

Случайный элемент ξ в X называется *слабо субгауссовским*, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются субгауссовскими [18]. Запас слабо субгауссовских случайных элементов достаточно богат, основными распространенными примерами могут служить центрированные гауссовские и п.н. ограниченные случайные элементы.

Заметим, что определение слабой субгауссовости имеет смысл и для случая любого топологического векторного пространства X . Если X есть векторное пространство $\mathbf{R}^N$ всех вещественных числовых последовательностей с тихоновской топологией, то слабая субгауссовость случайного элемента $\xi = (\xi_k)$ со значениями в $\mathbf{R}^N$ означает просто покомпонентную субгауссовость в силу того, что совокупность всех субгауссовских случайных величин образует векторное пространство. Напомним, что если X — (конечномерное или бесконечномерное) вещественное банахово пространство, то случайный элемент ξ в X называется *гауссовским*, если все случайные величины $\langle x^*, \xi \rangle$, $x^* \in X^*$, являются гауссовскими. Как хорошо известно, сумма двух гауссовских случайных величин не обязательно является гауссовской. Поэтому, в отличие от субгауссовского случая, последовательность числовых гауссовских случайных величин может не быть совместно гауссовской.

Слабо субгауссовский случайный элемент ξ является *строго субгауссовским*, если $\tau^2(\langle x^*, \xi \rangle) = \mathbf{E}\langle x^*, \xi \rangle^2$ для всех $x^* \in X^*$. Очевидно, что гауссовский случайный элемент является строго субгауссовским.

Говорят, что случайный элемент ξ со значениями в банаховом пространстве X имеет *слабый p -й порядок*, $0 < p < \infty$, если $\mathbf{E}|\langle x^*, \xi \rangle|^p < \infty$

для любого $x^* \in X^*$. Для случайного элемента ξ со слабым первым порядком определяется математическое ожидание $\mathbf{E}\xi$ как интеграл в слабом смысле (интеграл Петтиса) следующими условиями: $\mathbf{E}\xi \in X$ и $\langle x^*, \mathbf{E}\xi \rangle = \mathbf{E}\langle x^*, \xi \rangle$ для всех $x^* \in X^*$. Для случайного элемента ξ со слабым вторым порядком определяется ковариационный оператор R_ξ следующим равенством: $\langle R_\xi x^*, y^* \rangle = \mathbf{E}\langle x^*, \xi - \mathbf{E}\xi \rangle \langle y^*, \xi - \mathbf{E}\xi \rangle$, $x^*, y^* \in X^*$. R_ξ представляет собой линейный ограниченный оператор, отображающий X^* в X (обсуждение этих и связанных с ними вопросов можно найти в [4] и [17]).

Ясно, что слабо субгауссовский случайный элемент имеет как математическое ожидание, так и ковариационный оператор. Хорошо известно, что гауссовский случайный элемент со значениями в банаховом пространстве однозначно определяется своими математическим ожиданием и ковариационным оператором.

Говорят, что банахово пространство X содержит l_∞^n равномерно, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального n найдется n -мерное подпространство $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n, l_\infty^n) \leq 1 + \varepsilon$, где $d(X_n, l_\infty^n)$ — так называемое расстояние Банаха–Мазура между X_n и l_∞^n . Примерами таких пространств являются пространства $c_0, l_\infty, C[0, 1], \bigoplus_{l_2} l_\infty^n$ (заметим, что последнее из этих пространств является рефлексивным). Пространства $l_p, L_p[0, 1], 1 \leq p < \infty$, представляют собой примеры пространств, не содержащих l_∞^n равномерно.

Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом (φ_i) и (φ_i^*) — биортогональные функционалы, соответствующие базису (φ_i) . Как известно, для всех последовательностей чисел (α_i) , для которых сходится ряд $\sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$, и для всех ограниченных последовательностей чисел (t_i) имеет место оценка

$$\left\| \sum_{i \geq 1} t_i \alpha_i \varphi_i \right\| \leq K \sup_{i \geq 1} |t_i| \left\| \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i \right\|, \quad (2)$$

где константа $K > 0$ зависит только от базиса (φ_i) (см. [15, с. 19]). Минимальную константу $K_u > 0$, удовлетворяющую этому неравенству, называют константой безусловности базиса (φ_i) . Существует эквивалентная норма, относительно которой константа безусловности равняется единице. Поэтому при обсуждении вопросов сходимости рядов можно без ограничения общности предположить, что $K_u = 1$.

Банахово пространство с безусловным базисом является банаховой решеткой относительно операции порядка, определяемой следующим образом: $\sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \geq 0$ для всех i (см. [16, с. 2]). Модуль элемента $x = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$ определяется следующим образом: $|x| = \sum_{i \geq 1} |\alpha_i| \varphi_i$ (если константа безусловности базиса $K_u > 1$, то нужно сделать несущественную модификацию в аксиоме согласованности между порядком и нормой). Элементы $x = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$ и

$y = \sum_{i \geq 1} \beta_i \varphi_i$ пространства X называются непересекающимися, если их наибольшей нижней границей является нулевой элемент. Это равносильно тому, что не пересекаются следующие подмножества натуральных чисел: $\{i: \langle \varphi_i^*, x \rangle \neq 0\}$ и $\{i: \langle \varphi_i^*, y \rangle \neq 0\}$.

В [5] было доказано, что если банахово пространство X с безусловным базисом (φ_i) не содержит l_∞^n равномерно, то для п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$, составленного из центрированных гауссовских случайных элементов, достаточна сходимость ряда $\sum_{i \geq 1} [\sum_{k \geq 1} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2}] \varphi_i$, где R_k — ковариационный оператор ξ_k . В настоящей статье аналогичный факт доказывается для слабо субгауссовских случайных элементов со значениями в X , а также устанавливается связь между п.н. безусловной сходимостью и геометрическими свойствами пространства X (теоремы 1 и 2). Кроме того, приводятся некоторые достаточные условия для п.н. безусловной и слабой абсолютной сходимости слабо субгауссовских рядов в банаховых пространствах, изоморфных c_0 (теоремы 3 и 4).

2. Безусловная сходимость в банаховых пространствах с безусловным базисом, не содержащих l_∞^n равномерно. Пусть $\zeta = (\zeta_k)$ — последовательность субгауссовских случайных величин. На ζ можно смотреть как на случайный элемент со значениями в пространстве $\mathbf{R}^N$. Легко видеть, что l_p , $1 \leq p < \infty$, является борелевским множеством в $\mathbf{R}^N$. Поэтому если значения $\zeta \in \mathbf{R}^N$ п.н. принадлежат пространству $l_p \subset \mathbf{R}^N$, то ζ можно считать случайным элементом со значениями в банаховом пространстве l_p (см. [17, гл. I]). В следующей лемме даются некоторые свойства слабо субгауссовских случайных элементов со значениями в пространстве l_p .

Лемма 1. Пусть ζ_k — субгауссовская случайная величина с гауссовским стандартом τ_k , $k = 1, 2, \dots$, и $1 \leq p < \infty$. Справедливы следующие утверждения.

(а) Последовательность случайных величин ζ_k , $k = 1, 2, \dots$, является слабо субгауссовским случайным элементом со значениями в банаховом пространстве l_p тогда и только тогда, когда $\sum_{k \geq 1} |\zeta_k|^p < \infty$ п.н.

(б) Если $\sum_{k \geq 1} \tau_k^p < \infty$, то $\sum_{k \geq 1} |\zeta_k|^p < \infty$ п.н.

(с) Существует слабо субгауссовский случайный элемент $\zeta = (\zeta_k)$ в пространстве l_p такой, что $\sum_{k \geq 1} \tau_k^p = \infty$.

(d) Если $\sum_{k \geq 1} \tau_k^p < \infty$, то $\mathbf{E} \|\zeta\|_{l_p}^t < \infty$ для всех $t > 0$.

(е) Если $\sum_{k \geq 1} \tau_k^p < \infty$, то для любого положительного r такого, что $r^2 \geq p \tau_\zeta^2$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\|\zeta\|_{l_p} \geq r\} \leq 2e^{-r^2/(2\tau_\zeta^2)},$$

где $\tau_\zeta^2 = (\sum_{k \geq 1} \tau_k^p)^{2/p}$.

(f) Если $\sum_{k \geq 1} \tau_k^p < \infty$, то

$$\mathbf{E} e^{\varepsilon \|\zeta\|_{l_p}^2} < \infty$$

для всех $\varepsilon < 1/(2\tau_\zeta^2)$, где $\tau_\zeta^2 = (\sum_{k \geq 1} \tau_k^p)^{2/p}$.

Доказательство. (а) Пусть $f = (f_k) \in l_p^*$ — произвольный линейный ограниченный функционал на l_p ($l_1^* = l_\infty$ и $l_p^* = l_q$ при $p > 1$, где $1/p + 1/q = 1$). По неравенству Гёльдера и по условию леммы ряд $\sum_{k \geq 1} f_k \zeta_k$ сходится п.н. для всех $f = (f_k) \in l_p^*$. Кроме того, случайные величины $f_k \zeta_k$ для всех k являются субгауссовскими. Как известно, пространство всех субгауссовских случайных величин является банаховым пространством [1] и, следовательно, сумма $\sum_{k \geq 1} f_k \zeta_k = \langle f, \zeta \rangle$ также будет субгауссовской случайной величиной.

(б) Применив теорему Б. Леви о сходимости интегралов и неравенство (1), получим соотношение

$$\mathbf{E} \sum_{k \geq 1} |\zeta_k|^p = \sum_{k \geq 1} \mathbf{E} |\zeta_k|^p \leq 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \sum_{k \geq 1} \tau_k^p,$$

из которого непосредственно следует утверждение (б).

Утверждение (с) вытекает из (б) и результата в [18], согласно которому в произвольном бесконечномерном нормированном пространстве существует слабо субгауссовский случайный элемент с неинтегрируемой нормой.

(д) Достаточно показать, что $\mathbf{E} \|\zeta\|_{l_p}^t < \infty$ для всех $t \geq p$. Используя сначала неравенство Минковского, затем неравенство (1) и условие леммы, получим

$$\mathbf{E} \|\zeta\|_{l_p}^t = \mathbf{E} \left(\sum_{k \geq 1} |\zeta_k|^p \right)^{t/p} \leq \left(\sum_{k \geq 1} (\mathbf{E} |\zeta_k|^t)^{p/t} \right)^{t/p} \leq 2 \left(\frac{t}{e} \right)^{t/2} \left(\sum_{k \geq 1} \tau_k^p \right)^{t/p} < \infty.$$

(е) Очевидно, что $\mathbf{P}\{\|\zeta\|_{l_p} \geq r\} = \mathbf{P}\{\|\zeta\|_{l_p}^t \geq r^t\} \leq r^{-t} \mathbf{E} \|\zeta\|_{l_p}^t$. Полагая $t \geq p$ и используя оценку, полученную при доказательстве утверждения (д), получим

$$\mathbf{P}\{\|\zeta\|_{l_p} \geq r\} \leq r^{-t} 2 \left(\frac{t}{e} \right)^{t/2} \left(\sum_{k \geq 1} \tau_k^p \right)^{t/p} = 2 \left(\frac{t \tau_\zeta^2}{e r^2} \right)^{t/2}. \quad (3)$$

Теперь выберем такое значение t , $t \geq p$, при котором правая часть неравенства (3) достигает своего минимального значения. Это минимальное значение есть $t_{\min} = r^2/\tau_\zeta^2$ и оно приводит к нужной оценке с учетом условия $t_{\min} \geq p$.

Утверждение (f) есть следствие утверждения (е).

Лемма 1 доказана.

Следствие. Если $\tau_\zeta \equiv \sum_{k \geq 1} \tau_k < \infty$, то для всех положительных r справедлива следующая оценка вероятности хвостов распределения нормы в пространстве l_1 :

$$\mathbf{P}\{\|\zeta\|_{l_1} \geq r\} \leq 2e^{-r^2/(2\tau_\zeta^2)}. \quad (4)$$

Доказательство. По лемме 1(е) неравенство (4) справедливо для всех $r \geq \tau_\zeta$. При $r \leq \tau_\zeta$ оно, очевидно, превращается в тривиальное неравенство.

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом (φ_i) и (φ_i^*) — соответствующие биортгональные функционалы. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) X не содержит l_∞^n равномерно.
- (ii) Из сходимости ряда

$$\sum_{i \geq 1} \left[\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) \right] \varphi_i \quad (5)$$

вытекает п.н. безусловная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ для всех последовательностей слабо субгауссовских случайных элементов (ξ_k) со значениями в пространстве X .

(iii) Из сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ п.н. безусловно для любых числовых субгауссовских случайных величин ζ_k с гауссовскими стандартами τ_k , $k = 1, 2, \dots$, и всех последовательностей элементов (a_k) в пространстве X .

(iv) Если ζ_k — независимые числовые субгауссовские случайные величины с гауссовскими стандартами τ_k , $k = 1, 2, \dots$, и последовательность (ζ_k/τ_k) неограничена п.н., то из сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k$ вытекает п.н. безусловная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$, где $a_k \in X$, $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Так как пространство X не содержит l_∞^n равномерно, оно, тем самым, не содержит подпространства, изоморфного c_0 , и для доказательства данной импликации, согласно [6], достаточно найти множество $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ полной вероятности такое, что $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| < \infty$ для всех $x^* \in X^*$ и $\omega \in \Omega_0$.

Предполагая сходимость ряда (5) (естественно, сходимость внутреннего ряда при каждом i подразумевается) и используя лемму 1 для каждого индекса i , получим сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle|$ на некотором множестве $\Omega_0^{(i)}$ полной вероятности и, следовательно, $(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle)$, как последовательность по k является случайным элементом со значениями в пространстве l_1 для каждого i .

Для краткости записи введем обозначения: $(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) = \eta_i$ и $\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) = t_i$, $i = 1, 2, \dots$. По условию теоремы ряд $\sum_{i \geq 1} t_i \varphi_i$ сходится в X и сходимость безусловная, так как (φ_i) — безусловный базис. Покажем, что в этом предположении ряд $\sum_{i \geq 1} \|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i$ сходится п.н.

в X . В самом деле, так как X не содержит l_∞^n равномерно, согласно [13] существуют число $p \geq 2$, зависящее только от пространства X , последовательность неотрицательных чисел (α_i) , $\sum_{i \geq 1} \alpha_i^p < \infty$, и линейный ограниченный оператор $A: l_p \rightarrow X$ такие, что

$$t_i \varphi_i = \alpha_i A e_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где (e_i) — естественный базис пространства l_p .

Мы сейчас покажем, что случайный ряд

$$\sum_{i \geq 1} \alpha_i \frac{\|\eta_i\|_{l_1}}{t_i} e_i$$

сходится п.н. (безусловно) в l_p (если $t_i = 0$, то соответствующий множитель e_i в последнем ряде будем считать равным нулю). Для этого достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{i \geq 1} \alpha_i^p \frac{\mathbf{E} \|\eta_i\|_{l_1}^p}{t_i^p}.$$

Воспользуемся неравенством Минковского и затем неравенством (1). Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\eta_i\|_{l_1}^p &= \mathbf{E} \left(\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle| \right)^p \leq \left(\sum_{k \geq 1} \left(\mathbf{E} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle|^p \right)^{1/p} \right)^p \\ &\leq 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \left(\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) \right)^p \equiv 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} t_i^p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{i \geq 1} \alpha_i^p \frac{\mathbf{E} \|\eta_i\|_{l_1}^p}{t_i^p} \leq 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \sum_{i \geq 1} \alpha_i^p < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{i \geq 1} \alpha_i (\|\eta_i\|_{l_1}/t_i) e_i$ сходится п.н. безусловно (поскольку (e_i) — безусловный базис) в пространстве l_p . Обозначим множество его сходимости через Ω'_0 и рассмотрим множество полной вероятности $\Omega_0 = \Omega'_0 \cap \bigcap_{i=1}^\infty \Omega_0^{(i)}$.

Ясно, что

$$A \left(\sum_{i \geq 1} \alpha_i \frac{\|\eta_i\|_{l_1}}{t_i} e_i \right) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \frac{\|\eta_i\|_{l_1}}{t_i} A e_i = \sum_{i \geq 1} \|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i$$

и, следовательно, ряд $\sum_{i \geq 1} \|\eta_i\|_{l_1} \varphi_i$ будет сходиться в X п.н. безусловно, как линейный ограниченный образ п.н. безусловно сходящегося ряда $\sum_{i \geq 1} \alpha_i (\|\eta_i\|_{l_1}/t_i) e_i$.

Теперь пусть $\omega \in \Omega_0$ и $x^* \in X^*$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| |\langle x^*, \varphi_i \rangle| = \sum_{i \geq 1} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} |\langle x^*, \varphi_i \rangle| \\ &= \left\langle x^*, \sum_{i \geq 1} \vartheta_i(x^*) \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\rangle \leq \left\| \sum_{i \geq 1} \vartheta_i(x^*) \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq \left\| \sum_{i \geq 1} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \varphi_i \right\| \cdot \|x^*\| < \infty, \end{aligned}$$

где было использовано обозначение $\vartheta_i(x^*) = \text{sign} \langle x^*, \varphi_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots$, и в последнем неравенстве было учтено предположение $K_u = 1$. На этом доказательство справедливости импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) закончено.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Пусть $\xi_k = a_k \zeta_k$, где $a_k \in X$ и ζ_k — субгауссовская случайная величина с гауссовским стандартом τ_k . Тогда, учитывая однородность функционала τ , имеем $\tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) = |\langle \varphi_i^*, a_k \rangle| \tau_k$, и справедливость данной импликации вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \left[\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) \right] \varphi_i &= \sum_{i \geq 1} \left[\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, a_k \rangle| \tau_k \right] \varphi_i \\ &= \sum_{k \geq 1} \left[\sum_{i \geq 1} |\langle \varphi_i^*, a_k \rangle| \varphi_i \right] \tau_k = \sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k, \end{aligned}$$

где, напомним, $|a_k|$ — модуль элемента a_k . Справедливость перестановки сумм легко можно обосновать критерием Коши и свойством (2) безусловных базисов.

Справедливость импликации (iii) $\Rightarrow$ (iv) очевидна.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Напомним предположение $K_u = 1$. Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что пространство X содержит l_∞^n равномерно. При этом допущении построим такую последовательность (a_k) в X , что ряд $\sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k$ сходится (безусловно), но ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ не сходится п.н. Ключевым моментом для построения такой последовательности является следующее известное утверждение (см. [16, с. 90]): если банахова решетка X содержит l_∞^n равномерно, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого натурального числа r в решетке X существует набор попарно непересекающихся элементов $x_1^r, \dots, x_r^r$, удовлетворяющих условию

$$\max_{1 \leq k \leq r} \beta_k \leq \left\| \sum_{k=1}^r \beta_k |x_k^r| \right\| \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq k \leq r} \beta_k \quad (6)$$

для всех наборов неотрицательных чисел $\beta_1, \dots, \beta_r$.

Так как по условию ζ_k , $k = 1, 2, \dots$, — независимые случайные величины, по лемме Бореля–Кантелли п.н. неограниченность последовательности (ζ_k/τ_k) равносильна выполнению условия

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{P} \left\{ \frac{|\zeta_k|}{\tau_k} > u \right\} = \infty \quad \text{для всех } u > 0.$$

Пусть m_1 — такое натуральное число, что

$$\sum_{k=1}^{m_1} \mathbf{P} \left\{ \frac{|\zeta_k|}{\tau_k} > 1 \right\} \geq 1.$$

Аналогичным образом выберем натуральные числа $m_2, m_3, \dots$, удовлетворяющие условиям $\sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} \mathbf{P} \{ |\zeta_k|/\tau_k > i^2 \} \geq 1/i, i = 2, 3, \dots$, где $M_i = \sum_{j=1}^i m_j, i = 1, 2, \dots$.

Составим разбиение $J = (J_i)$ множества натуральных чисел следующим образом. Пусть (m_i) — найденная выше последовательность натуральных чисел. В первый блок J_1 поместим m_1 чисел от 1 до m_1 включительно, и, продолжая этот процесс, в i -й блок $J_i, i = 2, 3, \dots$, поместим m_i чисел от $M_{i-1} + 1$ до M_i включительно. Рассмотрим в X следующую последовательность элементов (b_k) : для любого $k \in J_i$ (каждое натуральное число k входит в один из блоков J_i) положим $b_k = x_{\bar{k}}^{m_i}/i^2$, где $\bar{k} = k - M_{i-1}$ есть порядковый номер числа k в блоке J_i и элементы $x_1^{m_i}, \dots, x_{m_i}^{m_i}$ для каждого m_i обладают свойством (6) с $r = m_i, i = 1, 2, \dots$. Покажем, что ряд $\sum_{k \geq 1} |b_k|$ сходится. Прежде всего заметим, что в силу правого неравенства в (6) норма суммы произвольного количества элементов b_k с индексами k из любого одного блока J_i оценивается сверху числом $(1 + \varepsilon)/i^2$. Поэтому достаточно доказать сходимость или, что то же самое, фундаментальность подпоследовательности S_{M_n} последовательности $(S_n), S_n = \sum_{k=1}^n |b_k|$. В силу правого неравенства в (6) имеем оценку

$$\|S_{M_n} - S_{M_{n+p}}\| = \left\| \sum_{i=n}^{n+p} \frac{1}{i^2} \sum_{k \in J_i} |x_{\bar{k}}^{m_i}| \right\| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=n}^{n+p} \frac{1}{i^2},$$

и поэтому, независимо от значений m_i , ряд $\sum_{k \geq 1} |b_k|$ сходится.

Положим теперь $a_k = b_k/\tau_k$. Очевидно, что ряд $\sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k$ сходится. Следовательно, по условию (iv) теоремы ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ должен сходиться п.н. безусловно. Но это не так, последний ряд не сходится п.н. даже в обычном смысле, поскольку по построению последовательности (a_k) имеем:

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{P} \{ \|a_k\| |\zeta_k| > 1 \} = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \in J_i} \mathbf{P} \left\{ \frac{|\zeta_k|}{\tau_k} > i^2 \right\} \geq \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} = \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли последовательность $(a_k \zeta_k)$ не сходится п.н. к нулю по норме пространства X и, таким образом, ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ не сходится даже п.н. условно. Теорема 1 доказана.

В силу того, что гауссовский случайный элемент является слабо субгауссовским случайным элементом и последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин является п.н. неограниченной, из доказанной теоремы вытекает следующий результат.

Следствие. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом (φ_i) , (φ_i^*) — соответствующие биортонормальные функции, ξ_k — центрированные гауссовские случайные элементы со значениями в X с ковариационным оператором R_k , a_k — произвольный элемент в пространстве X , $|a_k|$ — модуль элемента a_k (в решетке X) и g_k — числовая стандартная гауссовская случайная величина, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующие утверждения.

(i) X не содержит l_∞^n равномерно.

(ii) Если

$$\sum_{i \geq 1} \left[\sum_{k \geq 1} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2} \right] \varphi_i \quad \text{сходится в пространстве } X,$$

то ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. безусловно.

(iii) Если ряд $\sum_{k \geq 1} |a_k|$, составленный из модулей элементов a_k , сходится в пространстве X , то ряд $\sum_{k \geq 1} a_k g_k$ сходится п.н. безусловно.

Справедливы импликации: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Если рассматриваемые гауссовские случайные элементы ξ_k независимы и независимы также случайные величины g_k , то имеет место эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Отметим, что в этом следствии не предполагается совместная гауссовость ни ξ_k , ни g_k , $k = 1, 2, \dots$.

Нетрудно убедиться в том, что если базис (φ_i) не является безусловным, то выполнение условия (ii) не обеспечивает даже обычную сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ п.н. по норме пространства X . Соответствующий пример построим в пространстве l_1 . Рассмотрим в l_1 условный базис Шаудера (φ_i) : $\varphi_1 = e_1$, $\varphi_i = e_i - e_{i-1}$, $i \geq 2$, где (e_i) — естественный базис пространства l_1 . Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) e_k + \alpha_n e_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Следовательно, ряд $\sum_{k \geq 1} \alpha_k \varphi_k$ сходится в l_1 тогда и только тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ и $\sum_{k \geq 1} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| < \infty$. Теперь пусть $\xi_k = \alpha_k \varphi_k \gamma_k$, где $\alpha_{2k-1} = (k+1)/(k\sqrt{k})$, $\alpha_{2k} = (k-1)/(k\sqrt{k})$, $k = 1, 2, \dots$, и (γ_k) — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Условие п. (ii) теоремы 1 выполняется, так как

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \geq 1} \left[\sum_{k \geq 1} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2} \right] \varphi_i \right\|_{l_1} &= \left\| \sum_{i \geq 1} |\alpha_i| \varphi_i \right\|_{l_1} \\ &= \sum_{i \geq 1} \left| |\alpha_i| - |\alpha_{i+1}| \right| = \sum_{k \geq 1} \left| |\alpha_{2k-1}| - |\alpha_{2k}| \right| + \sum_{k \geq 1} \left| |\alpha_{2k}| - |\alpha_{2k+1}| \right| \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k\sqrt{k}} + \sum_{k \geq 1} \left| \frac{k-1}{k\sqrt{k}} - \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k+1}} \right| \leq 3 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \infty. \end{aligned}$$

Теперь убедимся в том, что ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k = \sum_{k \geq 1} \alpha_k \varphi_k \gamma_k$ не сходится п.н. Известно [8], что ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$, составленный из центрированных независимых гауссовских случайных элементов со значениями в пространстве l_1 , сходится п.н. тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{k \geq 1} r_{ii}(k) \right)^{1/2} < \infty, \quad (7)$$

где $[r_{ij}(k)]$ — матричное представление ковариационного оператора R_k случайного элемента ξ_k (т.е. $r_{ij}(k) = \langle R_k e_i, e_j \rangle$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица стоит на i -м месте) — единичные векторы в пространстве l_∞ , $i, j, k = 1, 2, \dots$). Проверим выполнение условия (7). Для этого заметим, что $r_{11}(1) = \alpha_1^2$ и

$$r_{ii}(k) = \begin{cases} \alpha_k^2 & \text{при } k = i \text{ и } k = i + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \text{где } i = 2, 3, \dots$$

Поэтому очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 2} \left(\sum_{k \geq 1} r_{ii}(k) \right)^{1/2} &= \sum_{i \geq 2} \left(\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j \geq 2} (\alpha_{2j-1}^2 + \alpha_{2j}^2)^{1/2} \\ &+ \sum_{j \geq 1} (\alpha_{2j}^2 + \alpha_{2j+1}^2)^{1/2} \geq \sum_{j \geq 2} \left(\frac{(j+1)^2}{j^3} + \frac{(j-1)^2}{j^3} \right)^{1/2} \geq \sum_{j \geq 2} \sqrt{\frac{2}{j}} = \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно, ряд $\sum_{k \geq 1} \alpha_k \varphi_k \gamma_k$ не сходится п.н. в пространстве l_1 . Более того, легко видеть, что никакая перестановка данного ряда не сходится п.н.

3. Необходимое условие безусловной сходимости в пространствах, изоморфных c_0 . Согласно теореме 1, в пространствах, не содержащих l_∞ равномерно, сходимость ряда (5) является достаточным условием п.н. безусловной сходимости слабо субгауссовского ряда. Как показывает приводимый ниже пример, необходимость этого условия не имеет места даже в одномерном случае (однако для ряда, составленного из гауссовских случайных величин, сходимость ряда (5) является и необходимым условием [17]).

П р и м е р. Пусть ζ_k , $k = 1, 2, \dots$, — последовательность субгауссовских случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\zeta_k = 1\} = \mathbf{P}\{\zeta_k = -1\} = \frac{1}{2k^2}, \quad \mathbf{P}\{\zeta_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что ряд $\sum_{k \geq 1} \zeta_k$ сходится п.н. абсолютно. Далее, для всех натуральных $k \geq 2$ справедливы следующие неравенства:

$$2e \ln k \leq \inf_{n \geq 1} \{n k^{2/n}\} \leq 2e^2 \ln k. \quad (8)$$

В самом деле, для каждого фиксированного k функция $f(t) = t k^{2/t}$, $t \geq 1$, достигает своего минимального значения, которое равно $2e \ln k$, в точке $t = 2 \ln k$. Следовательно, справедливость левого неравенства в (8) показана. Для доказательства правой части рассмотрим числа $n_1 = [2 \ln k]$ и $n_2 = [2 \ln k] + 1$ ($[x]$ означает целую часть числа x). Легко можно показать, что $\inf\{f(n), n = 1, 2, \dots\} = \min\{f(n_1), f(n_2)\}$. Рассмотрим замкнутый интервал $[2 \ln k - \frac{1}{2}, 2 \ln k + \frac{1}{2}]$. Ясно, что он содержит по крайней мере одну из точек n_1 и n_2 . Если $n_1 \in [2 \ln k - \frac{1}{2}, 2 \ln k + \frac{1}{2}]$, то

$$f(n_1) = n_1 k^{2/n_1} \leq k^{2/(2 \ln k - \frac{1}{2})} 2 \ln k \leq k^{2/\ln k} 2 \ln k = 2e^2 \ln k,$$

а если $n_2 \in [2 \ln k - \frac{1}{2}, 2 \ln k + \frac{1}{2}]$, то

$$f(n_2) = n_2 k^{2/n_2} \leq \left(2 \ln k + \frac{1}{2}\right) k^{2/(2 \ln k)} \leq 3e \ln k < 2e^2 \ln k,$$

и соотношение (8) доказано.

В силу определения ϑ_2 соотношение (8) дает $(4e \ln k)^{-1} \leq \vartheta_2^2(\zeta_k) \leq (2e \ln k)^{-1}$ для каждого $k \geq 2$. Учитывая неравенство $(\sqrt{e}/2) \vartheta_2(\zeta) \leq \tau(\zeta)$ для каждой субгауссовской случайной величины ζ , заключаем, что $\sum_{k \geq 1} \tau(\zeta_k) = \infty$, и построение примера завершено.

Важно отметить, что в построенном примере последовательность $(\tau^2(\zeta_k)/\mathbf{E}\zeta_k^2)$ неограничена.

Основной целью настоящего пункта является доказательство того, что в пространствах, изоморфных c_0 , и только в них, сходимость ряда (5) является необходимым условием п.н. безусловной сходимости для некоторого класса слабо субгауссовских рядов (в частности, гауссовских рядов). Напомним, что c_0 обозначает банахово пространство всех сходящихся к нулю вещественных числовых последовательностей с супремум-нормой. Кроме того, c_0 является также банаховой решеткой относительно порядка, индуцированного естественным базисом.

Справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство с нормированным безусловным базисом $(\varphi_i), (\varphi_i^*)$ — соответствующие биортонормальные функционалы. Пусть, кроме того, (ζ_k) — последовательность числовых субгауссовских случайных величин с единичными дисперсиями, удовлетворяющих условию

$$\sup_{k \geq 1} \tau^2(\zeta_k) < \infty. \quad (9)$$

Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) X изоморфно пространству c_0 .
- (ii) Из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ вытекает сходимость ряда $\sum_{i \geq 1} [\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle)] \varphi_i$ для всех слабо субгауссовских слу-

чайных элементов ξ_k со значениями в X и ковариационным оператором R_k таких, что

$$\tau^2(\langle x^*, \xi_k \rangle) \leq C \langle R_k x^*, x^* \rangle \quad \text{для всех } x^* \in X^* \text{ и } k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $C \geq 1$ — некоторая константа, не зависящая ни от x^* , ни от k .

(iii) Из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} |a_k| \tau_k$ для всех последовательностей элементов (a_k) в X , где $\tau_k = \tau(\zeta_k)$, $k = 1, 2, \dots$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд вспомогательных фактов.

Лемма 2. Пусть ζ — числовая случайная величина, и пусть для некоторых чисел $K \geq 1$ и $p > q > 0$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{E}|\zeta|^p)^{1/p} \leq K(\mathbf{E}|\zeta|^q)^{1/q}.$$

Тогда

$$(\mathbf{E}|\zeta|^r)^{1/r} \leq K^\delta (\mathbf{E}|\zeta|^s)^{1/s}$$

для всех $0 < r, s \leq p$, где

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r \leq s \leq p, \\ 1 & \text{при } q \leq s < r \leq p, \\ q(p-s)(s(p-q))^{-1} & \text{при } 0 < s < q < r \leq p, \\ p(q-s)(s(p-q))^{-1} & \text{при } 0 < s < r \leq q. \end{cases}$$

Доказательство. Учитывая монотонность $(\mathbf{E}|\zeta|^t)^{1/t}$ как функции от t , $t > 0$, утверждение леммы для $0 < r \leq s \leq p$ и $q \leq s < r \leq p$ очевидно. Доказательство начнем с рассмотрения случая $0 < s < q < r \leq p$. В этом случае числа $\alpha = p(q-s)/(q(p-s))$ и $\beta = s(p-q)/(q(p-s))$ удовлетворяют условиям: $0 < \alpha, \beta < 1$ и $\alpha + \beta = 1$. Применением неравенства Гёльдера получим

$$\mathbf{E}|\zeta|^q = \mathbf{E}|\zeta|^{\alpha q} |\zeta|^{\beta q} \leq (\mathbf{E}|\zeta|^{\alpha q t})^{1/t} (\mathbf{E}|\zeta|^{\beta q t^*})^{1/t^*}, \quad (11)$$

где $1 < t$, $t^* < \infty$ и $1/t + 1/t^* = 1$. Выберем t из условия $\alpha q t = p$. Ясно, что $t > 1$ и

$$t = \frac{p-s}{q-s}, \quad t^* = \frac{t}{t-1} = \frac{p-s}{p-q}.$$

При таком выборе t соотношение (11) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\zeta|^q &\leq (\mathbf{E}|\zeta|^p)^{(q-s)/(p-s)} (\mathbf{E}|\zeta|^s)^{(p-q)/(p-s)} \\ &\leq K^{p(q-s)/(p-s)} (\mathbf{E}|\zeta|^q)^{p(q-s)/(q(p-s))} (\mathbf{E}|\zeta|^s)^{(p-q)/(p-s)}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что

$$(\mathbf{E}|\zeta|^q)^{1/q} \leq K^{p(q-s)/(s(p-q))} (\mathbf{E}|\zeta|^s)^{1/s}. \quad (12)$$

Окончательно имеем

$$(\mathbf{E}|\zeta|^r)^{1/r} \leq (\mathbf{E}|\zeta|^p)^{1/p} \leq K(\mathbf{E}|\zeta|^q)^{1/q} \leq K^{q(p-s)/(s(p-q))}(\mathbf{E}|\zeta|^s)^{1/s}.$$

Остается рассмотреть случай $0 < s < r \leq q$, который легко сводится к предыдущему. В самом деле, применением (12) получим

$$(\mathbf{E}|\zeta|^r)^{1/r} \leq (\mathbf{E}|\zeta|^q)^{1/q} \leq K^{p(q-s)/(s(p-q))}(\mathbf{E}|\zeta|^s)^{1/s},$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Лемма 2 доказана и использована в [10] для изучения свойств субгауссовских случайных векторов в банаховых пространствах. Там же отмечено, что результат леммы 2 можно извлечь из [11]. Наше доказательство этой леммы является элементарным. Кроме того, константа K^δ , найденная в доказательстве леммы, позволяет проследить зависимость от участвующих в задаче параметров p, q, r, s и K .

Лемма 3. Пусть $\alpha(t)$ — произвольная функция, определенная на произвольном непустом множестве T , и пусть ζ — произвольная случайная величина. Тогда если $\mathbf{P}\{\zeta \geq \alpha(t)\} \geq \delta > 0$ для всех $t \in T$, то

$$\mathbf{P}\left\{\zeta \geq \sup_{t \in T} \alpha(t)\right\} \geq \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (ε_n) — монотонно сходящаяся к нулю числовая последовательность и (t_n) — последовательность элементов множества T такая, что $\alpha(t_n) > \sup_{t \in T} \alpha(t) - \varepsilon_n$. По условию леммы имеем

$$\mathbf{P}\left\{\zeta > \sup_{t \in T} \alpha(t) - \varepsilon_n\right\} \geq \mathbf{P}\{\zeta \geq \alpha(t_n)\} \geq \delta.$$

Теперь, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая непрерывность вероятности, получаем доказываемое неравенство.

Лемма 4. Пусть последовательность числовых случайных величин (ζ_k) по вероятности стремится к нулю, и пусть $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда если

$$\mathbf{P}\{|\zeta_k| \geq \alpha_k\} \geq \delta > 0 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots,$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть существует число $\beta > 0$ такое, что $\alpha_{k_j} \geq \beta$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда имеем $\mathbf{P}\{|\zeta_{k_j}| \geq \beta\} \geq \mathbf{P}\{|\zeta_{k_j}| \geq \alpha_{k_j}\} \geq \delta$, что противоречит условию леммы.

Лемма 5. Пусть X — банахово пространство и (ζ_k) — последовательность числовых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$(\mathbf{E}|\zeta_k|^2)^{1/2} \leq M \mathbf{E}|\zeta_k| \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots,$$

где константа $M \geq 1$ не зависит от k . Пусть далее (a_k) — последовательность элементов пространства X . Справедливы следующие утверждения.

(а) Из п.н. абсолютной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \zeta_k$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}|\zeta_k|$.

(б) Из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ вытекает безусловная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \mathbf{E}|\zeta_k|$.

Доказательство. (а) Введем обозначение $\eta_n = \sum_{k=1}^n |\zeta_k|$, $n = 1, 2, \dots$. По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ п.н., где $\eta = \sum_{k \geq 1} |\zeta_k|$. Пользуясь известным элементарным неравенством (см., например, [4, лемма 4.2, с. 240]), имеем

$$\mathbf{P}\{\eta_n \geq \lambda \mathbf{E}\eta_n\} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbf{E}\eta_n)^2}{\mathbf{E}\eta_n^2} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\zeta_k|)^2}{(\sum_{k=1}^n (\mathbf{E}|\zeta_k|^2)^{1/2})^2} \geq \frac{(1 - \lambda)^2}{M^2}$$

для всех $0 < \lambda < 1$ и $n = 1, 2, \dots$. Отсюда вытекает, что последовательность $\mathbf{E}\eta_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\zeta_k|$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена, т.е. $\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}|\zeta_k| < \infty$.

(б) Пусть ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ сходится п.н. безусловно. Тогда для любого $x^* \in X^*$ п.н. сходится ряд $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, a_k \rangle \zeta_k|$. Очевидно, что согласно (а) сходится ряд $\sum_{k \geq 1} |\langle x^*, a_k \rangle| \mathbf{E}|\zeta_k|$. В силу предложения 1 остается показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle| \mathbf{E}|\zeta_k| = 0.$$

Для каждого натурального n введем обозначения: $\eta_n(x^*) = \sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle \zeta_k|$ и $\eta_n = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \eta_n(x^*)$. Очевидно, что $\eta_n(x^*) \geq 0$. Кроме того, $\mathbf{E}\eta_n(x^*) = \sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle| \mathbf{E}|\zeta_k|$ и

$$\mathbf{E}\eta_n^2(x^*) \leq \left(\sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle| (\mathbf{E}\zeta_k^2)^{1/2} \right)^2 \leq M^2 \left(\sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle| \mathbf{E}|\zeta_k| \right)^2$$

для всех $x^* \in X^*$ и $n = 1, 2, \dots$. Используя опять примененное выше неравенство из [4], получим

$$\mathbf{P}\{\eta_n(x^*) > \lambda \mathbf{E}\eta_n(x^*)\} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbf{E}\eta_n(x^*))^2}{\mathbf{E}\eta_n^2(x^*)} \geq \frac{(1 - \lambda)^2}{M^2} > 0$$

для всех $x^* \in X^*$, $\lambda \in (0, 1)$ и $n = 1, 2, \dots$. Зафиксируем $\lambda \in (0, 1)$. Тогда ясно, что

$$\mathbf{P}\{\eta_n > \lambda \mathbf{E}\eta_n(x^*)\} \geq \frac{(1 - \lambda)^2}{M^2} > 0$$

для всех x^* из единичного шара пространства X^* и $n = 1, 2, \dots$. Согласно лемме 3, для всех n имеем

$$\mathbf{P}\left\{\eta_n \geq \lambda \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E}\eta_n(x^*)\right\} \geq \frac{(1 - \lambda)^2}{M^2} > 0. \quad (13)$$

Из условия леммы вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ п.н., т.е. η_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и по вероятности. Далее, в силу соотношения (13) и леммы 4 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq n} |\langle x^*, a_k \rangle| \mathbf{E}|\zeta_k| = 0.$$

Таким образом, ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \mathbf{E}|\zeta_k|$ сходится безусловно в X , и на этом доказательство леммы заканчивается.

Следствие 1. Пусть X — банахово пространство и ζ_k — числовая субгауссовская случайная величина с субгауссовским стандартом τ_k , и пусть выполняется условие $\tau_k \leq M(\mathbf{E}\zeta_k^2)^{1/2}$ для всех $k = 1, 2, \dots$, где константа $M > 0$ не зависит от k . Тогда если ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \zeta_k$ сходится п.н. безусловно, то ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \tau_k$ сходится безусловно в пространстве X , $a_k \in X$, $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Согласно неравенству (1), для каждого натурального k имеем $(\mathbf{E}\zeta_k^4)^{1/4} \leq 2^{5/4}e^{-1/2}\tau_k$. Тогда, учитывая условие доказываемого следствия, получим неравенство $(\mathbf{E}\zeta_k^4)^{1/4} \leq 2^{5/4}Me^{-1/2}(\mathbf{E}\zeta_k^2)^{1/2}$. Отсюда, применяя лемму 2 для $p = 4$, $q = 2$ и выбирая $r = 2$, $s = 1$, приходим к неравенству

$$(\mathbf{E}\zeta_k^2)^{1/2} \leq 2^{5/2}M^2e^{-1}\mathbf{E}|\zeta_k|.$$

Следовательно, по лемме 5 ряд $\sum_{k \geq 1} a_k \mathbf{E}|\zeta_k|$ сходится безусловно, и с учетом оценки $\tau_k \leq 2^{5/2}M^3e^{-1}\mathbf{E}|\zeta_k|$, $k = 1, 2, \dots$, получим безусловную сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} a_k \tau_k$. Следствие 1 доказано.

Поскольку последовательность стандартных гауссовских случайных величин (g_k) удовлетворяет условию леммы 5, очевидна справедливость следующего утверждения.

Следствие 2 [4]. Если (g_k) — последовательность стандартных гауссовских случайных величин, то в произвольном банаховом пространстве X из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} a_k g_k$ вытекает безусловная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} a_k$, $a_k \in X$, $k = 1, 2, \dots$.

Банаховы решетки X , Y являются порядково изоморфными, если они изоморфны как банаховы пространства и в качестве оператора, осуществляющего изоморфизм, можно выбрать положительный оператор с положительным обратным (оператор $T: X \rightarrow Y$ называется положительным, если $Tx \geq 0$ для всех $x \geq 0$, $x \in X$). Следовательно, порядково изоморфные банаховы решетки изоморфны как банаховы пространства. Обратное неверно. Дополнительные сведения по теории банаховых решеток можно найти, например, в [16].

Мы будем пользоваться рядами, построенными с помощью матриц Сильвестра. Ряды с аналогичными конструкциями ранее встречались в работах [19]–[21] и в менее явном виде также в [7], [9].

Матрицы Сильвестра $\mathcal{S}^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\mathcal{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}^{(n-1)} & \mathcal{S}^{(n-1)} \\ \mathcal{S}^{(n-1)} & -\mathcal{S}^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Легко проверить, что для произвольной последовательности вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left(\sum_{i=1}^{2^n} s_{ki}^{(n)} \alpha_i \right)^2 = 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i^2. \quad (14)$$

Пусть (δ_n) — последовательность неотрицательных чисел и $I_n = \{2^n - 1, \dots, 2^{n+1} - 2\}$, $n = 1, 2, \dots$, — разбиение множества натуральных чисел. Каждое натуральное число k входит в один из отрезков I_n , для k из I_n положим $\bar{k} = k - 2^n + 2$. Ясно, что $\bar{k}$ означает порядковый номер элемента k в I_n . Далее, для любого натурального n и для каждой матрицы Сильвестра $\mathcal{S}^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$ можно построить в X последовательность элементов d_k с помощью равенств

$$d_k = \delta_n \sum_{i \in I_n} s_{\bar{k}i}^{(n)} \varphi_i, \quad k \in I_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Ряды с такими слагаемыми будем называть рядами Сильвестра.

Лемма 6. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом (φ_i) , (d_k) — последовательность элементов в пространстве X , определенная соотношением (15), ζ_k — числовые субгауссовские случайные величины с гауссовскими стандартами τ_k , $k = 1, 2, \dots$. Если

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n 2^{n/2} \left(\sum_{k \in I_n} \tau_k^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i \in I_n} \varphi_i \right\|^{1/2} < \infty, \quad (16)$$

то случайный ряд $\sum_{k \geq 1} d_k \zeta_k$ сходится п.н. безусловно в X .

Доказательство. Учитывая равенство $\sum_k = \sum_n \sum_{k \in I_n}$ и используя неравенство Коши во внутренней сумме, а затем соотношение (14), получим оценку

$$\sum_{k \geq l} |\langle x^*, d_k \rangle \zeta_k| \leq \sum_{n \geq n_l} \delta_n 2^{n/2} \left(\sum_{k \in I_n} \zeta_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in I_n} \langle x^*, \varphi_i \rangle^2 \right)^{1/2},$$

где n_l определяется из условия $2^{n_l} - 1 \leq l \leq 2^{n_l+1} - 2$, $l = 1, 2, \dots$. Ввиду монотонности $(\mathbf{E}|\zeta|^t)^{1/t}$ как функции от t , $t > 0$, для каждого натурального n справедливо соотношение

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k \in I_n} \zeta_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k \in I_n} \tau_k^2 \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Теперь нам понадобится элементарное неравенство: для любого набора векторов $x_1, \dots, x_m$ из единичного шара нормированного пространства X и для любого вектора x^* из единичного шара сопряженного пространства X^* при любом $p \geq 1$

$$\sum_{i=1}^m |\langle x^*, x_i \rangle|^p \leq \max_{\vartheta_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \vartheta_i x_i \right\|^p, \quad (18)$$

доказательство которого следует из соотношений $\sum_{i=1}^m |\langle x^*, x_i \rangle|^p \leq \sum_{i=1}^m |\langle x^*, x_i \rangle| \leq \max_{\vartheta_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \vartheta_i x_i \right\|$.

Имея в виду неравенство (18) при $p = 2$ и учитывая безусловность базиса (φ_i) (считая константу безусловности равной единице), легко получить следующее неравенство: для каждого натурального l

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq l} |\langle x^*, d_k \rangle \zeta_k| \leq \sum_{n \geq n_l} \delta_n 2^{n/2} \left(\sum_{k \in I_n} \zeta_k^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i \in I_n} \varphi_i \right\|^{1/2}. \quad (19)$$

В силу неравенства (17) и теоремы Б. Леви ряд

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n 2^{n/2} \left(\sum_{k \in I_n} \zeta_k^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i \in I_n} \varphi_i \right\|^{1/2}$$

сходится п.н. Следовательно, при $l \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (19) сходится п.н. к нулю, и отсюда в силу предложения 1 легко следует п.н. безусловная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} d_k \zeta_k$. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. (i) $\Rightarrow$ (ii) Пусть $X = c_0$, и пусть ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. безусловно в c_0 . Тогда ряд $\sum_{k \geq 1} |\xi_k|$ сходится п.н. и, следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle| = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (20)$$

так как базис (φ_i) нормированный.

С другой стороны, для каждого $x^* \in X^*$ последовательность случайных величин $\langle x^*, \xi_k \rangle$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию следствия 1 леммы 5. Следовательно, $\sum_{k \geq 1} \tau(\langle x^*, \xi_k \rangle) < \infty$ для всех $x^* \in X^*$. Учитывая субаддитивность $\tau(\langle x^*, \xi_k \rangle)$ как функционала от x^* и применяя принцип равномерной ограниченности, из последнего условия имеем

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq 1} \tau(\langle x^*, \xi_k \rangle) < \infty. \quad (21)$$

Обозначим $\eta_i = \sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle|$. Последовательность случайных величин η_i является равномерно интегрируемой. В самом деле, если $p > 1$, то, применяя неравенство Минковского, неравенство (1), а затем соотношение (21), получим для каждого i

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \eta_i^p &= \mathbf{E} \left(\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle| \right)^p \leq \left(\sum_{k \geq 1} \left(\mathbf{E} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle|^p \right)^{1/p} \right)^p \\ &\leq 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \left(\sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) \right)^p \leq 2 \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \left(\sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k \geq 1} \tau(\langle x^*, \xi_k \rangle) \right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, согласно которой имеем с учетом (20)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{E} \eta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{E} \sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle| = \mathbf{E} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle| \right) = 0.$$

Теперь доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) нетрудно завершить, повторив рассуждения, проведенные при доказательстве следствия 1 леммы 5, и учтя эквивалентность всех нормированных безусловных базисов в c_0 .

Если X изоморфно c_0 , то доказательство стандартным путем сводится к рассмотренному случаю.

Справедливость импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

Доказательство (iii) $\Rightarrow$ (i) проведем от противного. Пусть пространство X не изоморфно c_0 , и пусть последовательность субгауссовских случайных величин ζ_k с гауссовским стандартом $\tau_k = \tau(\zeta_k)$ удовлетворяет условию (9) настоящей теоремы. В этих предположениях построим случайный ряд (Сильвестра) $\sum_{k \geq 1} d_k \zeta_k$, который будет сходиться п.н. безусловно, но ряд $\sum_{k \geq 1} |d_k| \tau_k$ не будет сходиться. Поскольку по допущению X не изоморфно c_0 , последовательность чисел $\lambda(n) = \|\sum_{i=1}^n \varphi_i\|$, $n = 1, 2, \dots$, неограничена (см. [15, с. 120]). Следовательно, существует строго возрастающая последовательность (n_l) натуральных чисел такая, что $\|\sum_{i \in I_{n_l}} \varphi_i\| \geq l^4$ для всех l . Рассмотрим теперь случайный ряд Сильвестра с элементами (15), где числовая последовательность (δ_n) выбрана следующим образом: $\delta_n = 0$ для всех $n \neq n_l$ и

$$\sum_{l \geq 1} \delta_{n_l} 2^{n_l/2} \left(\sum_{k \in I_{n_l}} \tau_k^2 \right)^{1/2} \left\| \sum_{i \in I_{n_l}} \varphi_i \right\|^{1/2} < \infty$$

и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \delta_{n_l} \left(\sum_{k \in I_{n_l}} \tau_k \right) \left\| \sum_{i \in I_{n_l}} \varphi_i \right\| \neq 0.$$

Такую последовательность (δ_{n_l}) можно выбрать, например, следующим образом: $\delta_{n_l} = 2^{-n_l} \|\sum_{i \in I_{n_l}} \varphi_i\|^{-1/2} l^{-2}$, $l = 1, 2, \dots$. В силу условия (9) при таком выборе (δ_n) ряд $\sum_{k \geq 1} d_k \zeta_k$ сходится п.н. безусловно, так как выполнено условие (16) леммы 6. С другой стороны, ряд $\sum_{k \geq 1} |d_k| \tau_k$ расходится, поскольку в случае сходимости сумма была бы $\sum_{l \geq 1} \delta_{n_l} (\sum_{k \in I_{n_l}} \tau_k) (\sum_{i \in I_{n_l}} \varphi_i)$, что невозможно, так как общий член этого ряда не стремится к нулю в силу второго условия в (22) и условия $\mathbf{E} \zeta_k^2 = 1$ для всех k . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Заметим, что поскольку в c_0 все безусловные нормированные базисы эквивалентны, то изоморфность банаховых пространств X и c_0 означает порядковую изоморфность банаховых решеток X и c_0 .

Ясно, что если (ξ_k) — последовательность центрированных гауссовских случайных элементов (совместная гауссовость не предполагается), то условие (10) теоремы 2 выполняется. Поэтому теорема 2 для гауссовских случайных элементов принимает следующий вид.

Следствие. Пусть X — банахово пространство с нормированным безусловным базисом (φ_i) , (φ_i^*) — соответствующие биортгональные функционалы. Пусть, кроме того, (g_k) — последовательность стандартных гауссовских случайных величин. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) X изоморфно пространству c_0 .

(ii) Из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ в пространстве X вытекает сходимость ряда $\sum_{i \geq 1} [\sum_{k \geq 1} \langle R_k \varphi_i^*, \varphi_i^* \rangle^{1/2}] \varphi_i$ для всех центрированных гауссовских случайных элементов ξ_k с ковариационным оператором R_k , $k = 1, 2, \dots$

(iii) Из п.н. безусловной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} a_k g_k$ в пространстве X вытекает сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} |a_k|$ для произвольной последовательности элементов (a_k) в X .

4. Достаточные условия сходимости в пространствах, изоморфных c_0 . В заключительном пункте работы рассмотрим вопрос об условиях п.н. безусловной и слабо абсолютной сходимости слабо субгауссовских рядов в пространствах c_0 на языке гауссовских стандартов координат слагаемых.

Теорема 3. Пусть банахово пространство X изоморфно c_0 , и пусть (ξ_k) — последовательность слабо субгауссовских случайных элементов со значениями в X . Тогда ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. безусловно в пространстве X , если выполнены следующие два условия:

(a) $\tau(i) \equiv \sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) < \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots$,

(b) $\sum_{i \geq 1} \exp\{-\varepsilon/\tau^2(i)\} < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$,

где (φ_i) — нормированный безусловный базис X и (φ_i^*) — соответствующие биортгональные функционалы.

Доказательство. Сначала предположим, что $X = c_0$. По лемме 1 и условию (a) теоремы легко видеть, что последовательность $\eta_i = (\langle \varphi_i^*, \xi_1 \rangle, \langle \varphi_i^*, \xi_2 \rangle, \dots, \langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle, \dots)$ для каждого i является слабо субгауссовским случайным элементом со значениями в пространстве l_1 . Следовательно, для каждого i существует множество $\Omega_0^{(i)} \in \mathcal{A}$ полной вероятности, на котором

$$\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| \equiv \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} < \infty, \quad \omega \in \Omega_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \eta_i = 0$ п.н. по норме пространства l_1 . В самом деле, по лемме Бореля–Кантелли для этого достаточно показать, что

для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\{\|\eta_i\|_{l_1} > \varepsilon\} < \infty. \quad (23)$$

Согласно следствию леммы 1, имеем

$$\mathbf{P}\{\|\eta_i\|_{l_1} > \varepsilon\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau_{\eta_i}^2}\right\} = 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau^2(i)}\right\}.$$

Теперь, учитывая условие (b) теоремы, получим сходимость ряда (23) для всех $\varepsilon > 0$, и, следовательно, последовательность (η_i) п.н. сходится к нулю в пространстве l_1 на некотором множестве полной вероятности Ω'_0 .

Рассмотрим множество полной вероятности $\Omega_0 = \Omega'_0 \cap_{i=1}^{\infty} \Omega_0^{(i)}$ и докажем безусловную сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega_0$. Для всех $x^* \in c_0^* = l_1$ и $\omega \in \Omega_0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| |\langle x^*, \varphi_i \rangle| = \sum_{i \geq 1} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} |\langle x^*, \varphi_i \rangle| \\ &\leq \sup_{i \geq 1} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} \|x^*\| < \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Для каждого натурального n в пространстве l_1 рассмотрим последовательность случайных элементов $\eta_i^{(n)} = (0, \dots, 0, \langle \varphi_i^*, \xi_n \rangle, \langle \varphi_i^*, \xi_{n+1} \rangle, \dots)$, где нули стоят на первых $(n-1)$ местах. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \|\eta_i^{(n)}(\omega)\|_{l_1} = 0 \quad \text{для всех } \omega \in \Omega_0.$$

В самом деле, если это не так, то существуют такое $\omega_0 \in \Omega_0$ и такое положительное число $\delta > 0$, что для бесконечно многих индексов n имеем $\sup_{i \geq 1} \|\eta_i^{(n)}(\omega_0)\|_{l_1} > \delta$, т.е. $\sup_{i \geq 1} \sum_{k=n}^{\infty} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega_0) \rangle| > \delta$. Отсюда вытекает, что $\sum_{k \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega_0) \rangle| > \delta$ для бесконечно многих индексов i , что противоречит условию $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\eta_i(\omega)\|_{l_1} = 0$ для всех $\omega \in \Omega_0$. Следовательно, для всех $\omega \in \Omega_0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\|_{l_1} \leq 1} \sum_{k \geq n} |\langle x^*, \xi_k(\omega) \rangle| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\|_{l_1} \leq 1} \sum_{k \geq n} \sum_{i \geq 1} |\langle \varphi_i^*, \xi_k(\omega) \rangle| |\langle x^*, \varphi_i \rangle| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x^*\|_{l_1} \leq 1} \sum_{i \geq 1} \|\eta_i^{(n)}(\omega)\|_{l_1} |\langle x^*, \varphi_i \rangle| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \|\eta_i^{(n)}(\omega)\|_{l_1} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Соотношения (24) и (25), согласно предложению 1, показывают п.н. безусловную сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ в пространстве c_0 .

Если X изоморфно c_0 , то доказательство стандартным путем сводится к уже рассмотренному случаю $X = c_0$. Теорема 3 доказана.

Легко видеть, что условия теоремы 3 не являются необходимыми. Соответствующим примером является ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ в пространстве c_0 , где $\xi_k = \alpha_k e_k g$, (e_k) — естественный базис в c_0 , g — стандартная

гауссовская случайная величина и последовательность (α_k) выбрана таким образом, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, но не выполняются условия теоремы (в качестве такой последовательности можно взять, например, $\alpha_k = 1/\sqrt{\ln(k+1)}$).

Как известно [6], в пространствах, не содержащих подпространства, изоморфного c_0 (в частности, в пространствах, не содержащих l_∞^n равномерно), и только в них, ряд сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится слабо абсолютно. В частности, в пространстве c_0 ряд, составленный из его естественного базиса, очевидно, сходится слабо абсолютно, но не сходится никакая его перестановка. Следующая теорема дает достаточное условие п.н. слабой абсолютной сходимости слабо субгауссовского ряда в пространствах, изоморфных c_0 .

Теорема 4. Пусть банахово пространство X изоморфно c_0 , и пусть (ξ_k) — последовательность слабо субгауссовских случайных элементов со значениями в X . Тогда ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится п.н. слабо абсолютно в пространстве X , если выполнены следующие два условия:

(а) $\tau(i) \equiv \sum_{k \geq 1} \tau(\langle \varphi_i^*, \xi_k \rangle) < \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots$,

(б) $\sum_{i \geq 1} \exp\{-\delta/\tau^2(i)\} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$,

где (φ_i) — нормированный безусловный базис X и (φ_i^*) — соответствующие биортгональные функционалы.

Доказательство совпадает с доказательством предыдущей теоремы, разница только в том, что для п.н. слабой абсолютной сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ достаточно показать п.н. ограниченность последовательности случайных элементов (η_i) . Это также можно показать с помощью леммы Бореля–Кантелли. Сходимость для некоторого $\delta > 0$ ряда $\sum_{k \geq 1} \mathbf{P}\{\|\eta_i\|_{l_1} > \delta\}$ проверяется так же, как в предыдущей теореме. Слабая п.н. абсолютная сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ является следствием п.н. ограниченности последовательности (η_i) в силу рассуждений, примененных при получении соотношения (24).

Условия теоремы 4 не являются необходимыми. Соответствующим примером является ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ в пространстве c_0 , где $\xi_k = e_k g$.

Приведем примеры п.н. безусловно и слабо абсолютно сходящихся нетривиальных случайных рядов в пространстве c_0 .

Пусть (g_k) — последовательность стандартных гауссовских случайных величин, (α_k) — последовательность вещественных чисел. По теореме 3 при $\alpha_k = 1/\ln(k+1)$ случайный ряд

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k e_k g_k \quad (26)$$

сходится п.н. безусловно в c_0 и, очевидно, не сходится п.н. абсолютно. А при $\alpha_k = 1/\sqrt{\ln(k+1)}$ ряд (26), согласно теореме 4, сходится п.н. слабо абсолютно, в то время как при дополнительном предположении независимости (g_k) не сходится п.н. никакая его перестановка (см. [17, с. 48]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. О субгауссовских случайных величинах. — Укр. матем. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 723–730.
2. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. Киев: ТВiМС, 1998, 290 с.
3. Вакхания Н. Н., Кварацхелия В. В., Тариеладзе В. И. Слабо субгауссовские случайные элементы в банаховых пространствах. — Укр. матем. журн., 2005, т. 57, № 9, с. 1187–1208.
4. Вакхания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
5. Кварацхелия В. В. Безусловная сходимость гауссовских случайных рядов в банаховых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 178–182.
6. Bessaga C., Pełczyński A. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. — *Studia Math.*, 1958, v. 17, № 2, p. 151–164.
7. Bagby R., Swartz Ch. Projective tensor product of l^p -valued measures. — *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied*, 1975, v. 25, № 3, p. 265–269.
8. Chobanjan S. A., Tarieladze V. I. Gaussian characterizations of certain Banach spaces. — *J. Multivariate Anal.*, 1977, v. 7, № 1, p. 183–203.
9. Dudley R. M., Pakula L. A counter-example on the inner product of measures. — *Indiana Univ. Math. J.*, 1971/72, v. 21, № 9, p. 843–845.
10. Fukuda R. Exponential integrability of sub-Gaussian vectors. — *Probab. Theory Related Fields*, 1990, v. 85, № 4, p. 505–521.
11. Kadec M. I., Pelczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p . — *Studia Math.*, 1961/62, v. 21, p. 161–176.
12. Kahane J. P. Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires. — *Studia Math.*, 1960, v. 19, № 1, p. 1–25.
13. Kvaratskhelia V. V. On unconditional convergence of random series in Banach spaces. — *Lecture Notes in Math.*, 1980, v. 828, p. 162–166.
14. Kvaratskhelia V. V. Unconditional convergence of random series and the geometry of Banach spaces. — *Georgian Math. J.*, 2000, v. 7, № 1, p. 85–96.
15. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1977, 188 p.
16. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. II. Function Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979, 243 p.
17. Vakhania N. N. Probability Distributions on Linear Spaces. New York–Amsterdam: North-Holland, 1981, 123 p.
18. Vakhania N. On subgaussian random vectors in normed spaces. — *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 2001, v. 163, № 1, p. 8–10.
19. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Absolute and unconditional convergence in l_1 . — *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 1999, v. 160, № 2, p. 201–203.
20. Vakhania N., Kvaratskhelia V. On a criterion for unconditional convergence of Hadamard series in the spaces l_p , $1 \leq p < \infty$. — *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 2000, v. 162, № 2, p. 199–202.
21. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Convergence of Sylvester series in Banach spaces l_p , $1 \leq p < \infty$. — *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 2001, v. 164, № 1, p. 7–9.

Поступила в редакцию
27.IX.2005