Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Ермаков, Метод существенной выборки для моделирования вероятностей умеренных и больших уклонений оценок и критериев, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 319–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:23:22

© 2006 г.

ЕРМАКОВ М. С.*

МЕТОД СУЩЕСТВЕННОЙ ВЫБОРКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ И БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОЦЕНОК И КРИТЕРИЕВ

В работе изучается эффективность метода существенной выборки для вычисления вероятностей больших и умеренных отклонений статистических оценок и тестовых статистик. В отличие от прямого моделирования объем моделирования рассмотренных эффективных процедур существенной выборки не имеет экспоненциального роста. Результаты применяются к моделированию вероятностей умеренных отклонений критериев типа омега-квадрат.

Ключевые слова и фразы: метод существенной выборки, вероятности больших отклонений, вероятности умеренных отклонений, эмпирическая мера.

1. Введение. При непосредственном моделировании редких событий вероятность появления событий мала. Поэтому для решения этой задачи довольно часто применяются специальные методы моделирования. Наиболее распространенным из них является метод существенной выборки (см. [4], [16], [10]). Для вычисления вероятности редкого события случайные величины в этом методе моделируются в соответствии с некоторым другим вероятностным распределением. После этого наблюдениям приписываются веса обусловленные переходом к новой вероятностной мере моделирования.

Задача выбора оптимальной меры в процедуре существенной выборки была исследована для широкого круга приложений (см. [15], [4], [5], [14], [6], [13], [12], [2], [16]). Оптимальные меры моделирования находились на основе методов теории вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин. Статистические процедуры обычно имеют только приближенно линейный или даже нелинейный характер и не могут изучаться на основе такой техники без привлечения какого-либо дополнительного аппарата. Как следствие, подобные результаты в статистике получены только для специальных моделей (см. [15], [14], [2]).

Как известно, статистические оценки и тестовые статистики обычно могут быть представлены в виде функционалов от эмпирической

* Институт проблем машиноведения РАН, Большой просп. В.О., 61, 199178 С.-Петербург, Россия; e-mail: ermakov@random.ipme.ru

меры. Поэтому представляется естественным проанализировать эффективность метода существенной выборки на основе теорем о вероятностях больших и умеренных отклонений эмпирических мер (см. [9], [3], [8]). Этому вопросу и посвящена настоящая работа. Результаты для процедуры эффективного моделирования вероятностей больших отклонений получены в терминах информационных чисел Кульбака–Лейблера и допускают наглядную интерпретацию: вероятностные меры для моделирования методом существенной выборки являются решением экстремальной задачи минимизации информационных чисел Кульбака–Лейблера на соответствующих множествах больших отклонений вероятностных мер. Хотя непосредственное вычисление информационных чисел Кульбака–Лейблера и соответствующих вероятностных мер для эффективного моделирования представляет существенную трудность, эти результаты могут быть использованы для получения приближенных решений.

Трудности, возникающие при эффективном моделировании вероятностей больших отклонений, стали одной из причин исследования аналогичной задачи в зоне умеренных отклонений. Зоны умеренных отклонений статистик обычно могут быть аппроксимированы полупространствами или выпуклыми множествами в множестве всех вероятностных мер. Как следствие, в приложениях проверка условий теорем об эффективном моделировании вероятностей умеренных отклонений не представляет таких серьезных трудностей, как в случае больших отклонений. Естественно, задача моделирования умеренных отклонений имеет также и независимый интерес для приложений. Результаты для этой задачи выражены в терминах расстояния Хеллингера и функционала, допускающего интерпретацию в статистических задачах как функционал информационного количества Фишера.

Отметим, что интересные результаты по эффективному моделированию на основе метода существенной выборки были получены в [11] и [10]. В этих работах задача моделирования рассматривалась в зоне $O(n^{-1/2})$ -отклонений.

2. Метод существенной выборки для вероятностей больших отклонений. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностную меру P , заданную на сигма-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{F}$ в топологическом пространстве Хаусдорфа S . Обозначим $\hat{P}_n$ эмпирическую меру $X_1, \dots, X_n$. Определим множество Λ всех вероятностных мер на $(S, \mathfrak{F})$.

Для любых $P, Q \in \Lambda$ информационное число Кульбака–Лейблера задается равенством

$$K(Q, P) = \int_S q \ln q \, dP, \quad q = \frac{dQ}{dP},$$

если Q абсолютно непрерывна относительно P , и $K(Q, P) = \infty$ в про-

тивном случае. Для любых $P \in \Lambda$ и $\Omega \subset \Lambda$ обозначим $K(\Omega, P) = \inf\{K(Q, P): Q \in \Omega\}$.

Определим τ -топологию слабой сходимости в Λ такую, что последовательность вероятностных мер $Q_n \in \Lambda$ сходится к вероятностной мере $Q \in \Lambda$ в τ -топологии, если и только если $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f dQ_n = \int_S f dQ$ для каждой ограниченной измеримой функции $f: S \rightarrow \mathbf{R}^1$. В дальнейшем все топологические свойства в Λ (сходимость, замкнутость, компактность и т.д.) будут рассматриваться относительно τ -топологии. Замкнутые и открытые множества $\Omega \subset \Lambda$ в τ -топологии будут обозначаться $\text{cl}(\Omega)$ и $\text{int}(\Omega)$ соответственно.

Пусть дан функционал $T: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^1$. Для каждого $b > 0$ определим множество $\Omega(b) = \{Q: T(Q) > b, Q \in \Lambda\}$.

Дальнейшие рассуждения будут базироваться на следующих теоремах (см. лемму 2.3, теоремы 3.1 и 3.2) в [9].

Теорема 2.1. Для любой вероятностной меры $P \in \Lambda$ и множества $\Omega \subset \Lambda$ справедлив принцип больших уклонений

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(\hat{P}_n \in \Omega) \geq -\dot{K}(\text{int}(\Omega), P), \quad (2.1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(\hat{P}_n \in \Omega) \leq -K(\text{cl}(\Omega), P). \quad (2.2)$$

Существует вероятностная мера $Q \in \text{cl}(\Omega)$ такая, что Q абсолютно непрерывна относительно P и $K(Q, P) = K(\text{cl}(\Omega), P)$.

Теорема 2.2. Пусть функционал $T: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^1$ непрерывен в τ -топологии, и пусть функция $t \rightarrow K(\Omega(t), P)$ непрерывна справа в точке $t = b$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln P(T(\hat{P}_n) > b) = -K(\Omega(b), P). \quad (2.3)$$

Существует вероятностная мера $Q_b \in \text{cl}(\Omega(b))$ такая, что $K(\Omega(b), P) = K(Q_b, P)$.

Мы рассматриваем следующий класс процедур существенной выборки. Возьмем вероятностные меры $Q_1, \dots, Q_l \in \Lambda$, абсолютно непрерывные относительно вероятностной меры P , и неотрицательные целые числа $p_1, \dots, p_l$ такие, что $p_1 + \dots + p_l = 1$. Осуществим моделирование t независимых выборок $Y_1^{(i)}, \dots, Y_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$, независимых случайных величин, имеющих вероятностную меру $Q = p_1 Q_1 + \dots + p_l Q_l$. Отметим, что вероятностная мера Q может моделироваться на основе моделирования вероятностной меры Q_ν , где ν — случайный индекс, $P(\nu = j) = p_j$, $1 \leq j \leq l$.

Обозначим $\hat{Q}_n^{(i)}$ эмпирическую меру $Y_1^{(i)}, \dots, Y_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$.

Оценка метода существенной выборки для $P(T(\hat{P}_n) > b)$ равна

$$\hat{V}_{nt} = t^{-1} \sum_{i=1}^t \chi(T(\hat{Q}_n^{(i)}) > b) w_{ni}^{-1}, \quad (2.4)$$

где

$$w_{ni} = \sum_{j=1}^l p_j u_{nij}, \quad u_{nij} = \prod_{s=1}^n q_j(Y_s^{(i)})$$

и $q_j = dQ_j/dP$, $1 \leq j \leq l$.

Задание вероятностной меры Q как смеси вероятностных мер будет необходимо в дальнейшей постановке задачи.

Непосредственными вычислениями получаем

$$E_Q \hat{V}_{nt} = E_Q \hat{V}_{n1} = P(T(\hat{P}_n) > b) \quad (2.5)$$

и

$$\begin{aligned} D_Q \hat{V}_{nt} &= t^{-1} (E_Q \hat{U}_n - (E_Q \hat{V}_{n1})^2) \\ &= t^{-1} \left(E_P [w_{n1}^{-1} \chi(T(\hat{Q}_n^{(1)}) > b)] - (P(T(\hat{P}_n) > b))^2 \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\hat{U}_n = \chi(T(\hat{Q}_n^{(1)}) > b) w_{n1}^{-2}$.

Из (2.5) следует, что процедура метода существенной выборки является несмещенной и дает оценку искомой вероятности.

По теореме 2.2 и (2.5) получаем

$$E_Q \hat{V}_{n1} = \exp \{ -nK(\Omega(b), P)(1 + o(1)) \} \quad (2.7)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Из (2.1), (2.5)–(2.7) вытекает следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть функционал $T: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^1$ непрерывен в τ -топологии и $K(\text{cl}(\Omega_b), P) = K(\text{int}(\Omega_b), P)$. Тогда для любых $Q_1, \dots, Q_l \in \Lambda$ и неотрицательных чисел $p_1, \dots, p_l$ таких, что $p_1 + \dots + p_l = 1$, выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln E_Q \hat{U}_n \geq -2K(\Omega(b), P). \quad (2.8)$$

Утверждение леммы 2.1 позволяет ввести естественное определение асимптотической эффективности процедур существенной выборки. Скажем, что процедура существенной выборки $\hat{V}_{nt}$ является асимптотически эффективной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln E_Q \hat{U}_n = -2K(\Omega(b), P). \quad (2.9)$$

Аналогичное понятие асимптотической эффективности в несколько других терминах использовалось в [4] и [14]. Грубо говоря, для асимптотически эффективной процедуры существенной выборки объем вычислений растет медленнее, чем экспоненциально.

Для множества $\Omega \subset \Lambda$ оценки $P(\hat{P}_n \in \Omega)$ определяются аналогично:

$$\hat{V}_{nt} = t^{-1} \sum_{i=1}^t \chi(\hat{Q}_n^{(i)} \in \Omega) w_{ni}^{-1}. \quad (2.10)$$

Для этой постановки также справедлив аналог леммы 2.1 в следующих обозначениях: $\hat{U}_n = w_{n1}^{-2} \chi(\hat{Q}_n^{(1)} \in \Omega)$ и $\Omega(b) = \Omega$. Следовательно, для этой

задачи может быть введено аналогичное определение асимптотической эффективности. Естественно, процедура существенной выборки для вычисления вероятностей больших уклонений $P(T(\hat{P}_n) > b)$ может рассматриваться как частный случай (2.10). Достаточно положить $\Omega = \Omega(b)$.

Предположим, что вероятностная мера $R \in \Lambda$ абсолютно непрерывна относительно вероятностной меры $P \in \Lambda$, и обозначим $r = dR/dP$. Положим $\Gamma_R = \{Q: \int_S \ln r dQ > K(\Omega, P), Q \in \Lambda\}$.

Теорема 2.3. Пусть $\Omega \subset \Lambda$ и $P \in \Lambda$. Пусть $K(\text{cl}(\Omega), P) = K(\text{int}(\Omega), P)$. Предположим, что существует только конечное число вероятностных мер $R_1, \dots, R_m$ таких, что $R_i \in \text{cl}(\Omega)$ и $K(R_i, P) = K(\Omega, P)$ для всех $1 \leq i \leq m$. Обозначим $r_i = dR_i/dP$ и предположим, что $C > r_i(x) > c > 0$ для всех $x \in S$, $1 \leq i \leq m$. Предположим также, что $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m \Gamma_{R_i}$. Тогда процедура существенной выборки (2.4) является асимптотически эффективной для данных вероятностных мер $Q_1, \dots, Q_l$, если и только если множество вероятностных мер $Q_1, \dots, Q_l$ содержит множество $R_1, \dots, R_m$ и $p_j \neq 0$ для всех $1 \leq j \leq l$ таких, что $Q_j = R_{i_j}$ при некотором i_j , $1 \leq i_j \leq m$.

Предположим, что функционал $T: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^1$ непрерывен в τ -топологии. Тогда $K(\text{cl}(\Omega(b)), P) = K(\text{int}(\Omega(b)), P)$, если отображение $t \rightarrow K(\Omega(t), P)$ непрерывно справа в точке $t = b$. Следовательно, если множество $\Omega = \Omega(b)$ удовлетворяет всем остальным условиям теоремы, то ее утверждение для него выполнено.

Доказательство теоремы 2.3 опускается. Аналогичные рассуждения проведены в доказательстве теоремы 3.2 (п. 4) для случая вероятностей умеренных уклонений. Доказательство теорем использует как технику анализа вероятностей больших уклонений вероятностных мер (см. [9], [7], [8]), так и методы, развитые для доказательства асимптотической эффективности процедуры существенной выборки (см. [14], [13] и ссылки в этих работах).

3. Метод существенной выборки для вероятностей умеренных уклонений. Будем предполагать, что функционал $T: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^1$ непрерывен в τ -топологии и вероятностная мера P является предельной точкой последовательности множеств $\Omega_n \subset \Lambda$, причем $P \notin \Omega_n$. Пусть $T(P) = 0$, и пусть $b_n > 0$, $b_n \rightarrow 0$, $nb_n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В этом пункте мы найдем эффективные процедуры для оценивания вероятностей умеренных уклонений $P(T(\hat{P}_n) > b_n)$ и $P(\hat{P}_n \in \Omega_n)$.

Для любых $P, Q \in \Lambda$ определим расстояние Хеллингера

$$\rho(Q, P) = \left(\int_S \left(\left(\frac{dQ}{dR} \right)^{1/2} - \left(\frac{dP}{dR} \right)^{1/2} \right)^2 dR \right)^{1/2}, \quad R = \frac{1}{2} (P + Q).$$

Для любого $\Omega \subset \Lambda$ обозначим $\rho(\Omega, P) = \inf\{\rho(Q, P): Q \in \Omega\}$.

Определим пространство Λ_0 всех зарядов G на $(S, \mathfrak{F})$, имеющих ограниченную вариацию и таких, что $G(S) = 0$. Определим τ -топологию в Λ_0 аналогично ее определению для Λ . Все топологические свойства в Λ_0 будут рассматриваться относительно τ -топологии.

Для любого $G \in \Lambda_0$ и $P \in \Lambda$ определим функционал

$$\rho_0^2(G : P) = \int_S g^2 dP, \quad g = \frac{dG}{dP}, \quad (3.1)$$

если G абсолютно непрерывна относительно P , и $\rho_0^2(G : P) = \infty$ в противном случае. Для любого $\Omega_0 \subset \Lambda_0$ обозначим $\rho_0^2(\Omega_0 : P) = \inf\{\rho_0^2(G : P), G \in \Omega_0\}$. С точки зрения статистических приложений функционал ρ_0^2 может рассматриваться как естественный аналог информационного количества Фишера.

Сделаем следующее предположение.

А. Существуют открытое множество $\Omega_0 \subset \Lambda_0$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, такие, что

1) для любой последовательности зарядов $G_n \in \Omega_0$, $P + b_n G_n \in \Lambda$, существует последовательность вероятностных мер $Q_n \in \Omega_n$ такая, что $\rho(Q_n, P + b_n G_n) < \omega(\rho(P, P + b_n G_n))$;

2) для любой последовательности вероятностных мер $Q_n \in \Omega_n$ существует последовательность зарядов $G_n \in \Omega_0$, $P + b_n G_n \in \Lambda$, такая, что $\rho(Q_n, P + b_n G_n) < \omega(\rho(Q_n, P))$.

Таким образом, множества $P + b_n \Omega_0$ допускают интерпретацию как «линейные аппроксимации» множеств Ω_n в метрике Хеллингера. Легко видеть, что $\rho(\Omega_n, P) = \frac{1}{2} b_n \rho_0(\Omega_0 : P)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3.1, приведенная ниже, является некоторым вариантом теоремы 3.2 [3] и теоремы 3.1 [8].

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие А и пусть $\rho_0(\text{int}(\Omega_0) : P) = \rho_0(\text{cl}(\Omega_0) : P)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \rho^2(\Omega_n, P))^{-1} \ln P(\hat{P}_n \in \Omega_n) = -1. \quad (3.2)$$

Найдутся заряд $G \in \text{cl}(\Omega_0)$ и последовательность $G_n \in \Omega_0$, сходящаяся к G в τ -топологии, такие, что $P + b_n G_n \in \Lambda$ и при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \rho(\Omega_n, P) &= \rho(P + b_n G_n, P)(1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{2} b_n \rho_0(\Omega_0 : P)(1 + o(1)) = \frac{1}{2} b_n \rho_0(G : P)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Определим процедуру существенной выборки аналогично п. 2, заменив в этом определении (см. (2.4)) число b на последовательность b_n , вероятностные меры $Q_1, \dots, Q_l$ на последовательности вероятностных мер $Q_{n1}, \dots, Q_{nl}$ и вероятностную меру Q на $Q_n = p_1 Q_{n1} + \dots + p_l Q_{nl}$, а также в (2.10) множество Ω на последовательность множеств Ω_n .

Приводимая ниже лемма 3.1 является аналогом леммы 2.1.

Лемма 3.1. Пусть выполнено условие А и пусть $\rho_0(\Omega_0: P) = \rho_0(\text{cl}(\Omega_0): P)$. Тогда для любой последовательности процедур существенной выборки

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (2n\rho^2(\Omega_n, P))^{-1} \ln E\hat{U}_n \geq -2, \quad (3.3)$$

или, в других терминах,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (nb_n^2)^{-1} \ln E\hat{U}_n \geq -\rho_0^2(\Omega_0: P). \quad (3.4)$$

Лемма 3.1 непосредственно следует из (2.6) и теоремы 3.1.

Мы будем говорить, что последовательности вероятностных мер $Q_{n1}, \dots, Q_{nl}$ и неотрицательные числа $p_1, \dots, p_l \in \mathbf{R}^1$, $p_1 + \dots + p_l = 1$, порождают последовательность асимптотически эффективных процедур существенной выборки, если в (3.3) (соответственно (3.4)) достигается равенство.

Сделаем дополнительные предположения.

С1. Существует только конечное число зарядов $G_1, \dots, G_m \in \text{cl}(\Omega_0)$ таких, что $\rho_0(G_j: P) = \rho_0(\Omega_0: P)$, $1 \leq j \leq m$.

Обозначим $g_j = dG_j/dP$, $1 \leq j \leq m$. Определим множества $\Psi_j = \Psi_{G_j} = \{G: \rho_0(G + G_j: P) < 2\rho_0(\Omega_0: P), G \in \Lambda_0\}$ для всех $1 \leq j \leq m$. Множество Ψ_j содержит все заряды G , имеющие плотности $g = \frac{dG}{dP}$, из шара в $L_2(P)$ с центром $-g_j$ и радиусом $2\rho_0(\Omega_0: P)$. Положим $\Psi = \bigcap_{j=1}^m \Psi_j$.

С2. $\Omega_0 \cap \Psi = \emptyset$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq m$, определим множество $\bar{\Gamma}_{G_j} = \{H: \int_S g_j dH < \rho_0^2(\Omega_0: P), H \in \Lambda_0\}$. Ясно, что $\bar{\Gamma}_{G_j} \supset \Psi_j$. Таким образом, С2 может быть заменено более сильным предположением.

С3. $\Omega_0 \subset \Lambda_0 \setminus \text{cl}(\bigcap_{j=1}^m \bar{\Gamma}_{G_j})$.

Предположение типа С3 было сделано в теореме 2.3 и является стандартным при моделировании больших уклонений (см. [14]). Это предположение обычно не выполнено для множеств Ω_0 , порожденных нелинейными статистическими функционалами, в частности, тестовыми статистиками критерия омега-квадрат. Приведенное выше условие С2 до некоторой степени позволяет обойти эту трудность. Ясно, что С3 влечет С2.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия А, С1 и С2 или А, С1 и С3. Пусть $\rho_0(\Omega_0: P) = \rho_0(\text{cl}(\Omega_0): P)$. Тогда последовательность вероятностных мер Q_{nj} , $1 \leq j \leq l$, имеющих плотности

$$q_{nj} = \lambda_{nj} + b_n h_j \chi(|h_j| < c_n b_n^{-1}), \quad (3.5)$$

где $c_n b_n^{-1} \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow 0$ и $\lambda_{nj} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, порождает асимптотически эффективные процедуры существенной выборки $\hat{V}_{nt}$ (см. (2.4), (2.10)), если и только если множество h_j , $1 \leq j \leq l$, содержит множество всех плотностей g_i , $1 \leq i \leq m$, и $p_j \neq 0$ для всех j таких, что $h_j = g_i$.

То же самое утверждение справедливо и для последовательности вероятностных мер $Q_{nj}^{(1)}$, имеющих плотности

$$q_{nj}^{(1)} = c(b_n) \exp\{b_n h_j\} \chi(|h_j| < c_n b_n^{-1}), \quad (3.6)$$

где $c_n b_n^{-1} \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $c(b_n)$ является нормирующей константой.

Доказательство теоремы 3.2 будет приведено в п. 4.

З а м е ч а н и е 3.1. Если функционал T нелинейный, может оказаться, что условие С2 не выполнено. В некоторых случаях тогда может быть применена следующая модификация предложенной процедуры. Предположим, что существует конечное число зарядов $G_{m+1}, \dots, G_{m+a} \in \text{cl}(\Omega_0)$ таких, что $\bigcap_{j=1}^{m+a} \Psi_{G_j} \cap \Omega_0 = \emptyset$. Рассмотрим процедуру существенной выборки, основанную на вероятностных мерах Q_{nj} , имеющих плотности q_{nj} или $q_{nj}^{(1)}$, таких, что $h_j = g_j = \frac{dG_j}{dP}$, $1 \leq j \leq m+a$. Тогда анализ доказательства теоремы 3.2 показывает, что подобная модификация процедуры асимптотически эффективна. Таким образом, u_{nij} , $j > m$, могут интерпретироваться как дополнительные слагаемые регуляризации.

П р и м е р. Пусть $T(\hat{P}_n)$ является тестовой статистикой критерия типа омега-квадрат и задается функционалом $T(Q) = \int_0^1 (F(x) - x)^2 r(x) dx$, где $F(x)$ обозначает функцию распределения Q , $S = [0, 1]$, r — весовая функция, непрерывная на $[0, 1]$. Мы предполагаем здесь, что P является мерой равномерного распределения на $[0, 1]$.

Множество Ω_0 равно

$$\Omega_0 = \left\{ G: \int_0^1 H^2(x) r(x) dx \geq 1, H(x) = G((0, x]), G \in \Lambda_0 \right\}.$$

Заряды G , удовлетворяющие условию $\rho_0(G: P) = \rho_0(\Omega_0: P)$, $G \in \text{cl}(\Omega_0)$, определяются уравнением (см. [1])

$$H'' + \lambda_1 r H = 0, \quad H(0) = H(1) = 0, \quad (3.7)$$

где $H(x) = G(0, x)$, $x \in (0, 1)$, и λ_1 — наибольшее собственное число уравнения (3.7).

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ — собственные числа (3.7), и пусть $k = \max\{i: 4\lambda_i \geq \lambda_1\}$. Предположим, что для каждого λ_j , $1 \leq j \leq k$, существует единственная собственная функция H_j . Тогда заряды G_j , $G_j((0, x)) = H_j(x)$ и $G_{k+j}((0, x)) = -H_j(x)$, $1 \leq j \leq k$, удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Заряды $G_2, \dots, G_k, G_{k+2}, \dots, G_{2k}$ при этом играют ту же самую роль, что и в замечании 3.1.

4. Доказательство теоремы 3.2. Рассуждения основаны на стандартной технике доказательства теорем о больших отклонениях эмпирических мер (см. [9]) и ее модификации на случай вероятностей умеренных отклонений (см. [7], [8]). Естественно, методы, развитые для до-

казательства асимптотической эффективности процедур существенной выборки (см. [14], [5]), также играют значительную роль.

Начнем с доказательства достаточности. Положим $q_{nj} = \lambda_{nj} + b_n g_j \chi(g_j > -c_n b_n^{-1})$, $1 \leq j \leq l = m$. Обозначим $\Pi = \Pi_k = \{S_i\}_1^k$ разбиение S , состоящее из конечного числа борелевских множеств S_i , $1 \leq i \leq k$. Скажем, что разбиение Π лучше, чем разбиение $\bar{\Pi}$ ($\Pi \geq \bar{\Pi}$), если для каждого $A \in \Pi$ найдется множество $B \in \bar{\Pi}$ такое, что $A \subseteq B$.

Для любых $Q \in \Lambda$, $G \in \Lambda_0$ и разбиения $\Pi = \{S_i\}_1^k$ множества S обозначим

$$\rho^2(Q, P | \Pi) = \sum_{i=1}^k (P^{1/2}(S_i) - Q^{1/2}(S_i))^2, \quad \rho_0^2(G : P | \Pi) = \sum_{i=1}^k \frac{G^2(S_i)}{P(S_i)}. \quad (4.1)$$

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что $P(S_i) \neq 0$ для всех $1 \leq i \leq k$.

Известно, что (см. [8])

$$\rho(Q, P) = \sup \rho(Q, P | \Pi), \quad \rho_0(G : P) = \sup \rho_0(G : P | \Pi), \quad (4.2)$$

где супремум берется по всем разбиениям Π множества S .

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2.4 в [9], нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \rho(\text{cl}(\Omega_n), P) &= \sup_{\Pi} \rho^2(\text{cl}(\Omega_n), P | \Pi), \\ \rho_0^2(\text{cl}(\Omega_0), P) &= \sup_{\Pi} \rho_0^2(\text{cl}(\Omega_0), P | \Pi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где супремум также берется по всем разбиениям Π .

Для любых $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ найдутся $C_1 = C_1(\delta_1) > 1$ и разбиение $\Pi_{C_1, \delta, \delta_1} = \{W_i\}_1^k$ такие, что

$$\inf_{y \in W_k} \max_{1 \leq j \leq m} |g_j(y)| > C_1, \quad \max_{1 \leq j \leq m} \int_{W_k} g_j^2 dP < \delta_1,$$

и для любых $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq k-1$ для всех $y \in W_i$ имеет место

$$\max_{x \in W_i} g_j(x) \leq g_j(y) \leq \min_{x \in W_i} g_j(x) + \delta.$$

Обозначим $\Xi = \{\Pi : \Pi \geq \Pi_{C_1, \delta, \delta_1}\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только разбиения Π , принадлежащие Ξ .

Пусть $\Pi = \{S_i\}_{i=1}^k \in \Xi$. Для всех i , $1 \leq i \leq k$, и всех j , $1 \leq j \leq m$, обозначим $q_{nji} = Q_{nj}(S_i)$, $g_{ji} = E[g_j(X_1) \chi(X_1 \in S_i, g_j(X_1) > -c_n b_n^{-1})]$. Ясно, что $\lambda_{nj} = 1 - b_n \int_S g_j \chi(g_j > -c_n b_n^{-1}) dP = 1 + b_n \xi_{nj} = 1 + o(b_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что

$$q_{nji} = \lambda_{nj} p_i + b_n g_{ji} + o(b_n) = p_i + b_n g_{ji} + o(b_n). \quad (4.4)$$

Рассмотрим сначала случай $m = 1$ и $P + b_n G_1 \in \Lambda$, если $n > n_0$. Случай произвольного m будет позже сведен к данной постановке. Для всех i ,

$1 \leq i \leq k$, обозначим $r_i = \int_{S_i} g_1^2 dP$, $d_{ni} = \int_{S_i} q_{n1}^{-1} dP$. Положим $\gamma_n^2 = \frac{1}{4} b_n^2 \sum_{i=1}^k g_{1i}^2 / p_i$.

Применяя формулу Тейлора, получаем для $1 \leq i \leq k$

$$d_{ni} = (2 - \lambda_{n1}) p_i - b_n g_{1i} + b_n^2 r_i (1 + o(1)) = p_i - b_n g_{1i} + b_n^2 r_i + o(b_n^2). \quad (4.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_{Q_n} \hat{U}_n &= E[w_{n1}^{-1} \chi(\hat{P}_n \in \Omega_n)] \\ &\leq E[w_{n1}^{-1} \chi(\rho^2(\hat{P}_n + b_n G_1, P | \Pi) > \rho^2(\Omega_n + b_n G_1, P | \Pi))] \\ &\leq E[w_{n1}^{-1} \chi(\rho^2(\hat{P}_n + b_n G_1, P | \Pi) > 4\beta\gamma_n^2) \doteq \bar{I}_n(\Pi), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\beta = \beta(\delta)$, $\beta(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$. Заметим, что правая часть (4.6) зависит только от значений p_i, g_{1i}, d_{ni} , $1 \leq i \leq k$, и $\beta\gamma_n^2$.

Применяя формулу Стирлинга, получаем

$$\begin{aligned} \bar{I}_n(\Pi) &< \sum' \frac{n!}{(nz_{n1})! \dots (nz_{nk})!} \prod_{i=1}^k d_{ni}^{nz_{ni}} \\ &\leq C(2\pi)^{-k/2} \sum' \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2} \right) \ln n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \ln z_{ni} \right. \\ &\quad \left. - n \sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{z_{ni}}{p_i} + n \sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{d_{ni}}{p_i} \right\} \doteq I(Z_n^{(1)}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь суммирование $\sum'$ проводится по множеству $Z_n^{(1)}$ всех $z = (z_{n1}, \dots, z_{nk})$ таких, что $nz_{n1}, \dots, nz_{nk}$ — неотрицательные целые числа, $z_{n1} + \dots + z_{nk} = 1$ и

$$J_{n1}(z) = \sum_{i=1}^k ((z_{ni} + b_n g_{1i})^{1/2} - p_i^{1/2})^2 > 4\beta\gamma_n^2 (1 + b_n^{1/2}). \quad (4.8)$$

Определим также множество $Z_n^{(2)}$ всех $z = (z_{n1}, \dots, z_{nk})$ таких, что $nz_{n1}, \dots, nz_{nk}$ — неотрицательные целые числа, $z_{n1} + \dots + z_{nk} = 1$ и

$$J_{n2}(z) = \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 > \beta\gamma_n^2. \quad (4.9)$$

Ясно, что $Z_n^{(1)} \subset Z_n^{(2)}$ для всех $n > n_0(\delta, C_1)$ и, следовательно, $I(Z_n^{(1)}) \leq I(Z_n^{(2)})$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для $s = 0, 1, 2, \dots$ определим множества $Z_{ns}^{(2)} = \{z: (1 + \varepsilon s) \gamma_n^2 < J_{n2}(z) \leq (1 + \varepsilon(s+1)) \gamma_n^2, z \in Z_n^{(2)}\}$. Асимптотика числа элементов $Z_{ns}^{(2)}$ совпадает с аналогичной асимптотикой для $U_{ns}^{(2)} = \{u: 4(1 + \varepsilon s) \gamma_n^2 \leq \sum_{i=1}^k u_i^2 / p_i \leq 4(1 + \varepsilon(s+1)) \gamma_n^2, u = (u_1, \dots, u_k), nu_1, \dots, nu_k \text{ — целые числа, } u_1 + \dots + u_k = 0\}$ и равна (см. [8])

$$C\varepsilon \left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \right)^{-1} (2\pi)^{\zeta-1} (n\gamma_n)^{2\zeta} (1 + \varepsilon s)^{\zeta-1} \prod_{i=1}^k p_i^{1/2} (1 + o(1)) \quad (4.10)$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\zeta = (k-1)/2$ и $\Gamma(k/2)$ — значение гамма-функции для $k/2$.

Разлагая $z_{ni} \ln(z_{ni}/p_i)$ и $z_{ni} \ln(d_{ni}/p_i)$ в ряд Тейлора по степеням $(z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2}) p_i^{-1/2}$ и используя (4.4), (4.5), для любого $z \in Z_{ns}^{(2)}$ получаем

$$-\sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{z_{ni}}{p_i} = -2 \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 (1 + o(1)), \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{d_{ni}}{p_i} &= \sum_{i=1}^k p_i \left(1 + 2(z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2}) p_i^{-1/2} + (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 p_i^{-1} \right) \\ &\quad \times \ln \left(1 - (\lambda_{n1} - 1) - b_n \frac{g_{1i}}{p_i} + b_n^2 \frac{r_i}{p_i} (1 + o(1)) \right) \\ &= -2b_n \sum_{i=1}^k g_{1i} (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2}) p_i^{-1/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} b_n^2 \sum_{i=1}^k \frac{g_{1i}^2}{p_i} + b_n^2 \sum_{i=1}^k r_i + o(b_n^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

При доказательстве последнего равенства в (4.12) мы использовали соотношение $\lambda_{n1} = 1 - b_n \sum_{i=1}^k g_{1i}$.

Применяя (4.4), получаем

$$-2b_n \sum_{i=1}^k g_{1i} (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2}) p_i^{-1/2} = -4 \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2}) (q_{n1i}^{1/2} - p_i^{1/2}) (1 + o(1)). \quad (4.13)$$

Так как $\Pi \in \Xi$, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} b_n^2 \sum_{i=1}^k \frac{g_{1i}^2}{p_i} + b_n^2 \sum_{i=1}^k r_i &\leq \frac{1}{2} b_n^2 \sum_{i=1}^k \frac{g_{1i}^2}{p_i} + C C_1 \delta b_n^2 + C \delta_1 b_n^2 \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^k (q_{n1i}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 + O(C_1 \delta b_n^2 + \delta_1 b_n^2) + o(b_n^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.11)–(4.14) получаем

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{z_{ni}}{p_i} + \sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{d_{ni}}{p_i} \\ &= 4 \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 + 2 \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - q_{n1i}^{1/2})^2 + O(\delta_1 b_n^2 + C_1 \delta b_n^2) + o(b_n^2) \\ &= -2(z_{ni} + 2z_{ni}^{1/2} q_{n1i}^{1/2} + q_{n1i} - 4z_{ni}^{1/2} p_i^{1/2} + 4p_i - 4q_{n1i}^{1/2} p_i^{1/2}) \\ &\quad + 4(q_{ni} - 2q_{n1i}^{1/2} p_i^{1/2} + p_i) + O(\delta_1 b_n^2 + C_1 \delta b_n^2) + o(b_n^2) \\ &= -2 \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} + q_{n1i}^{1/2} - 2p_i^{1/2})^2 \\ &\quad + 4 \sum_{i=1}^k (q_{n1i}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 + O(\delta_1 b_n^2 + C_1 \delta b_n^2) + o(b_n^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применяя (4.4), (4.5), непосредственными вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} + q_{n1i}^{1/2} - 2p_i^{1/2})^2 &= \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - (p_i - b_n g_{1i})^{1/2})(1 + o(1)) \\ &\geq \sum_{i=1}^k ((z_{ni} + b_n g_{1i})^{1/2} - p_i^{1/2})^2 (1 + o(1)) \\ &\geq (4 + 2\varepsilon s) \gamma_n^2 + o(b_n^2) = (4 + 2\varepsilon s) \sum_{i=1}^k (q_{n1i}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 + o(b_n^2), \quad (4.16) \end{aligned}$$

если $z \in Z_{ns}^{(2)} \cap Z_n^{(1)}$ и $J_{n1}(z) > \beta \gamma_n^2 ((1 + \varepsilon s)^{1/2} + 1)^2$. Доказательство первого неравенства в (4.16) основано на соотношении $z_{ni}^{1/2} - (p_i - b_n g_{1i})^{1/2} = ((z_{ni} + b_n g_{1i})^{1/2} - p_i^{1/2})^2 (1 + o(1))$, которое доказывается непосредственными вычислениями.

Из (4.15), (4.16) следует, что

$$\sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{z_{ni}}{p_i} + \sum_{i=1}^k z_{ni} \ln \frac{d_{ni}}{p_i} \leq -(4 + 2\varepsilon s) \gamma_n^2 + O(\delta_1 b_n^2 + C_1 \delta b_n^2) + o(b_n^2). \quad (4.17)$$

Отсюда и из (4.6)–(4.10), (4.15), (4.16), C2 вытекает, что

$$\begin{aligned} I(Z_n^{(1)}) &\leq \sum_{s=0}^{\infty} I(Z_{ns}^{(2)} \cap Z_n^{(1)}) \leq C \sum_{s=0}^{\infty} (1 + \varepsilon s)^{\zeta-1} \varepsilon (n \gamma_n^2)^{\zeta} \\ &\quad \times \exp \left\{ -n(4 + 2\varepsilon s) \gamma_n^2 (1 + o(1)) + O(C_1 \delta b_n^2 + \delta_1 b_n^2) \right\}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Выберем последовательность $\varepsilon = \varepsilon_n = o(1)$ такую, что $n \varepsilon_n \gamma_n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из (4.18) следует, что

$$I(Z_n^{(1)}) < \exp \left\{ -4n \gamma_n^2 (1 + o(1)) + O((C_1 \delta + \delta_1) b_n^2) \right\} \quad (4.19)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Из (4.19) и (4.3) при надлежащем стремлении $\delta \rightarrow 0$, $\delta_1 \rightarrow 0$ таким, что $C_1(\delta_1) \delta \rightarrow 0$, получаем, что

$$E_{Q_n} \hat{U}_n < \exp \left\{ -4n \rho^2(\Omega_n, P)(1 + o(1)) \right\} \quad (4.20)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Предположим, что m произвольно. Тогда

$$\begin{aligned} E_{Q_n} \hat{U}_n &= E \left\{ \left(\sum_{j=1}^l p_j u_{nj} \right)^{-1} \chi(\hat{P}_n \in \Omega_n) \right\} \\ &\leq E \left\{ \left(\sum_{j=1}^l p_j u_{nj} \right)^{-1} \chi \left(\max_{1 \leq t \leq l} \rho(\hat{P}_n + b_n G_{nt}, P \mid \Pi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \geq \frac{1}{2} \beta b_n \max_{1 \leq t \leq l} \rho_0((\Omega_0 + G_t) : P \mid \Pi) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{t=1}^l E \left\{ \left(\sum_{j=1}^l p_j u_{nj} \right)^{-1} \chi \left(\rho(\hat{P}_n + b_n G_{nt}, P \mid \Pi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \geq \frac{1}{2} \beta b_n \rho_0((\Omega_0 + G_t) : P \mid \Pi) \right) \right\} \\
&\leq \sum_{t=1}^l p_t^{-1} E \left\{ \left(u_{nt}^{-1} \chi \left(\rho(\hat{P}_n + b_n G_{nt}, P \mid \Pi) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \geq \frac{1}{2} \beta b_n \rho_0((\Omega_0 + G_t) : P \mid \Pi) \right) \right\}. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к рассмотренному выше случаю $m = 1$.

При доказательстве теоремы в части необходимости проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям в [14]. Предположим, что $p_1 = 0$ (если $p_j = 0$ для некоторого j , $2 \leq j \leq m$, рассуждения аналогичны). Тогда существуют последовательности $\kappa_l > \kappa_{1l} > 0$, $\kappa_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, и разбиения $\Pi(l) \in \Xi$ такие, что

$$\Delta_l = \left\{ G: \rho_0(G - (1 + \kappa_l) G_1 : P \mid \Pi_l) < \kappa_l \gamma_n, \quad G \in \Lambda_{0\Phi} \right\} \subset \Omega_0.$$

Здесь и в дальнейшем k , γ_n , q_{nji} , g_{1i} , $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq k$, определяются по разбиению Π_l аналогично доказательству достаточности. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
E_{Q_n} \hat{U}_n &\geq E \left[\left(\sum_{j=2}^k p_j u_{nj} \right)^{-1} \chi(\hat{P}_n \in P + b_n \Delta_l) \right] \\
&\geq k^{-1} \min_{2 \leq j \leq m} E[u_{nj}^{-1} \chi(\hat{P}_n \in P + b_n \Delta_l)] \geq CI(D_n), \quad (4.22)
\end{aligned}$$

где $I(D_n)$ задается так же, как в (4.7), а D_n — множество всех $z = (z_{n1}, \dots, z_{nk})$ таких, что $nz_{n1}, \dots, nz_{nk}$ — неотрицательные целые числа, $z_{n1} + \dots + z_{nm} = 1$ и

$$J_{n3}(z) = \sum_{i=1}^k (z_{ni}^{1/2} - (p_i + (1 + \kappa_l) b_n g_{1i})^{1/2})^2 < \kappa_l^2 \gamma_n^2. \quad (4.23)$$

Тогда число элементов D_n не превосходит $C(n\gamma_n\kappa_{1l})^{2\zeta} \prod_{i=1}^k p_i^{1/2}$. Отсюда, рассуждая аналогично (4.6)–(4.10), (4.15), (4.16), получаем

$$\begin{aligned}
I(D_n) &\geq \min_{2 \leq j \leq m} \exp \left\{ -2n \sum_{i=1}^k ((p_i + (1 + \kappa_l) b_n g_{1i})^{1/2} + q_{nji}^{1/2} - 2p_i^{1/2})^2 \right. \\
&\quad \left. + 4n \sum_{i=1}^k (q_{nji}^{1/2} - p_i^{1/2})^2 + O(n(C_1\delta + \delta_1) b_n^2) + o(nb_n^2) \right\}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Так как неравенство (4.24) имеет место для любого l и любого разбиения $\Pi > \Pi_l$, после соответствующего предельного перехода $l \rightarrow \infty$,

$\delta = \delta(n) \rightarrow 0$, $\delta_1 = \delta_1(n) \rightarrow 0$, $C_1 = C_1(n, \delta) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$E_{Q_n} \hat{U}_n > \min_{2 \leq j \leq m} \exp \left\{ -\frac{1}{2} n b_n^2 \int_S (g_1 + g_j)^2 dP (1 + o(1)) + n b_n^2 \int_S g_j^2 dP + o(n b_n^2) \right\}. \quad (4.25)$$

Таким образом, $E_{Q_n} \hat{U}_n$ имеет больший порядок, чем $I(Z_n^{(1)})$, и мы приходим к противоречию. Доказательство теоремы 3.2 закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson T. W., Darling D. A. Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 193–212.
2. Barone P., Gigli A., Piccioni M. Optimal importance sampling for some quadratic forms of ARMA process. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, v. 45, № 6, part 2, p. 1834–1844.
3. Боровков А. А., Мозульский А. А. О вероятностях больших отклонений в топологических пространствах. II. — Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 5, с. 12–26.
4. Bucklew J. A. Large Deviations Techniques in Decision, Simulation and Estimation. New York: Wiley, 1990, 270 p.
5. Bucklew J. A., Ney P., Sadowsky J. S. Monte Carlo simulation and large deviation theory for uniformly recurrent Markov chains. — J. Appl. Probab., 1990, v. 27, № 1, p. 44–59.
6. Chen J.-C., Lu D., Sadowsky J. S., Yao K. On importance sampling in digital communications. I: Fundamentals. II: Trellis coded modulation. — IEEE J. Selected Areas Commun., 1993, v. 11, № 3, p. 289–299; 300–308.
7. Ермаков М. С. Большие отклонения эмпирических мер и проверка гипотез. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1993, т. 207, с. 37–59.
8. Ермаков М. С. Асимптотическая минимаксность критериев типа Колмогорова и омега-квадрат. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 1, с. 54–67.
9. Groeneboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H. Large deviation theorems for empirical probability measures. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 4, p. 553–586.
10. Hall P. The Bootstrap and Edgeworth Expansions. New York: Springer-Verlag, 1992, 352 p.
11. Johns M. Importance sampling for bootstrap confidence intervals. — J. Amer. Statist. Assoc., 1988, v. 83, № 403, p. 709–714.
12. Lehtonen T., Nyrhinen H. On asymptotically efficient simulation of ruin probabilities in a Markovian environment. — Scand. Actuar. J., 1992, № 1, p. 60–75.
13. Sadowsky J. S. On Monte Carlo estimation of large deviations probabilities. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 6, № 2, p. 399–422.
14. Sadowsky J. S., Bucklew J. A. On large deviation theory and asymptotically efficient Monte Carlo estimation. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1990, v. 36, № 3, p. 579–588.
15. Siegmund D. Importance sampling in the Monte Carlo study of sequential tests. — Ann. Statist., 1976, v. 4, p. 673–684.
16. Srinivasan R. Importance Sampling. Applications in Communications and Detection. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

Поступила в редакцию
19.IV.2004

Исправленный вариант
24.X.2005