Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Кнутова, С. Я. Шатских, Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 374–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:56:15

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2006 г.

КНУТОВА Е. М.*, ШАТСКИХ С. Я.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
СИММЕТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Работа посвящена изучению асимптотических свойств условных распределений для одного класса симметрических мер, заданных на пространстве $\mathbf{R}^\infty$. Для распределений этого класса получены явные формулы бесконечномерных условных квантилей.

Ключевые слова и фразы: симметрические меры, теорема де Финетти, условные распределения, преобразования независимости, условные квантили, сходимость почти наверное.

1. Введение. Формулировка результатов. В этой работе мы исследуем свойства условных распределений для симметрических мер, заданных на пространстве $\mathbf{R}^\infty$. Напомним, что такие меры, в силу теоремы де Финетти, порождаются бесконечными последовательностями перестановочных случайных величин.

Наш интерес к условным распределениям вероятностей связан с двумя обстоятельствами.

Во-первых, условные распределения могут быть использованы для построения преобразований независимости конечных и бесконечных семейств случайных величин. Подобного рода преобразования в последнее время находят все более широкое применение (см., например, [1]–[6]). В теореме 1, описывая условные распределения симметрических мер в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, мы приводим (см. п. 2°) явную формулу преобразования независимости для одного семейства перестановочных случайных величин.

Во-вторых, условные квантили (как поверхности постоянного уровня условных распределений вероятностей) используются в «безмоментных» вариантах статистической теории регрессии и теории фильтрации случайных процессов вместо условных математических ожиданий (см. обзор [7]). Для конечномерных распределений задачи явного вычисления условных медиан и квантилей, за редкими исключениями, практически неразрешимы. Однако для бесконечномерных аналогов конечномерных распределений нахождение явных формул условных квантилей в ряде случаев оказывается возможным. В примерах 1 и 2 для некоторых конкретных типов симметрических мер в пространстве $\mathbf{R}^\infty$ мы приводим явные формулы бесконечномерных условных квантилей. Оставляя задачу статистического оценивания бесконечномерных условных квантилей для будущих публикаций, тем не менее, в теореме 2 мы рассматриваем вопрос о почти наверное сходимости конечномерных условных квантилей к бесконечномерным.

Рассмотрим на пространстве $\mathbf{R}^\infty$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ вероятностную σ -аддитивную меру μ , определяемую последовательностью конечномерных распределений

$$W(x_1, \dots, x_n) = \mu\{z = (z_1, \dots, z_n, \dots): z_1 \leq x_1, \dots, z_n \leq x_n\}.$$

* Самарский государственный университет, ул. Акад. Павлова, 1, 443011 Самара, Россия; e-mail: knutova@ssu.samara.ru; shatskih@ssu.samara.ru

Будем считать, что конечномерные распределения задаются соотношениями

$$W(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{k=1}^n F(x_k | y) g(y) dy, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $g(y)$ — положительная на полуоси $(0, +\infty)$ плотность распределения вероятностей, а $F(x | y)$ — условная функция распределения, обладающая следующими свойствами.

1°. Существует положительная условная плотность $f(x | y)$, непрерывная по $x \in \mathbf{R}$ при любом $y > 0$.

2°. Если $y_1 \neq y_2$, то $F(x | y_1) \neq F(x | y_2)$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

Введем на пространстве $\mathbf{R}^\infty$ систему линейных «координатных» функционалов:

$$e_k(z) = z_k, \quad z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in \mathbf{R}^\infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следуя Е. Б. Дынкину [8], положим

$$F_n^*(x; z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{z: e_i(z) \leq x\}}(z), \quad z \in \mathbf{R}^\infty, \quad x \in \mathbf{R},$$

где $I_A(z)$ — индикатор множества A .

Для формулировки основных результатов данной работы (теоремы 1 и 2) нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Существуют множество $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ -измеримый функционал $s_\infty(z)$ такие, что*

1°. $\mu\{\Gamma\} = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x; z) = F(x | s_\infty(z)) \quad \forall z \in \Gamma, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

2°. $\mu\{s_\infty(z) \leq v\} = \int_0^v g(y) dy$.

З а м е ч а н и е 1. Эта лемма представляет собой одну из возможных версий «теоремы де Финетти» о перестановочных случайных величинах. Как известно, бесконечные последовательности таких случайных величин обладают свойством условной независимости (см. [9], [10]). Вводимая нами случайная величина $s_\infty(z)$ порождает σ -алгебру, относительно которой имеет место условная независимость.

Лемма 2. *Для любого $x_i \in \mathbf{R}$*

$$\mu\{e_i(z) \leq x_i \mid \sigma(e_1(z), \dots, \widehat{e_i(z)}, \dots, e_n(z), s_\infty(z))\} = F(x_i \mid s_\infty(z)),$$

где $\sigma(\dots)$ — σ -алгебра, порожденная соответствующими случайными величинами, знак $\widehat{}$ над элементом означает пропуск этого элемента.

Введем обозначения для условных функций распределения, которые соответствуют конечномерным распределениям $W(x_1, \dots, x_n)$ меры μ :

$$W_{i|1\dots i\dots n}(x_i \mid x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = \mu\{e_i(z) \leq x_i \mid e_1(z) = x_1, \dots, \widehat{e_i(z)} = x_i, \dots, e_n(z) = x_n\}.$$

Из формулы (1) стандартным образом получаем:

$$W_{i|1\dots i\dots n}(x_i \mid x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = \int_0^\infty F(x_i \mid y) \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n f(x_k \mid y) g(y)}{\int_0^\infty \prod_{k=1, k \neq i}^n f(x_k \mid t) g(t) dt} dy. \quad (2)$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. $\mu\{x \in \mathbf{R}^\infty: \lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n}(x_i \mid x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = F(x_i \mid s_\infty(x))\} = 1$;

2°. относительно меры $\mu\{\cdot\}$ случайная величина $F(e_i(x) \mid s_\infty(x))$ не зависит от семейства случайных величин

$$e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x), \dots, \quad x \in \mathbf{R}^\infty.$$

З а м е ч а н и е 2. В пространстве $\{\mathbf{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty), \mu\}$ случайную величину $F(e_i(x) | s_\infty(x))$ естественно называть преобразованием независимости величины $e_i(x)$ относительно семейства $\{e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x), \dots\}$.

Для условных функций распределения $W_{i|1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ рассмотрим семейство условных квантилей, проходящих через отмеченную точку $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ, \dots) \in \mathbf{R}^\infty$, т.е. семейство

$$\{q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n), n = 1, \dots, \infty\}$$

условных квантилей, определяемых уравнениями

$$\begin{aligned} W_{i|1\dots i\dots n}(\dot{q}_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \\ \equiv W_{i|1\dots i\dots n}(x_i^\circ | x_1^\circ, \dots, \widehat{x_i^\circ}, \dots, x_n^\circ), \quad n = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Ввиду формулы (2) и свойства 1° функции $F(x|y)$ каждое из этих уравнений для произвольной фиксированной точки $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$ имеет единственное решение для любого вектора $(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$.

З а м е ч а н и е 3. Соотношения (3) определяют условные квантили как поверхности уровня $p^\circ(n) = W_{i|1\dots i\dots n}(x_i^\circ | x_1^\circ, \dots, \widehat{x_i^\circ}, \dots, x_n^\circ)$, $n = 1, \dots, \infty$. При этом разным n , вообще говоря, соответствуют различные значения $p^\circ(n)$.

Аналогично, для условного (бесконечномерного) распределения $F(x_i | s_\infty(x))$ рассмотрим условную квантиль $q_{i|1\dots i\dots \infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots)$, проходящую через отмеченную точку $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$:

$$F(q_{i|1\dots i\dots \infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots) | s_\infty(x)) \equiv F(x_i^\circ | s_\infty(x^\circ)) \quad (4)$$

для любого $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{R}^\infty$.

Рассмотрим условные квантили $q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$. Для изучения предельного поведения сделаем дополнительные предположения о виде функции $F(u|v)$. Пусть

$$F(u|v) = \int_{\{t \leq \psi(u,v)\}} h(t) dt = H(\psi(u,v)), \quad (5)$$

где $H(t)$ — функция распределения вероятностей с плотностью $h(t) > 0$ на $\mathbf{R}$, а функция $\psi(u,v)$, $\psi: \mathbf{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, непрерывно дифференцируема, причем $\psi'_u(u,v) > 0$, $\psi'_v(u,v) \neq 0$ для всех $u \in \mathbf{R}$ и всех $v > 0$. Кроме того, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u,v) = +\infty$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} \psi(u,v) = -\infty$ для всех $v > 0$.

В новых обозначениях п. 1° теоремы 1 принимает вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = H(\psi(x_i, s_\infty(x))) \quad (6)$$

для μ -почти всех $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{R}^\infty$.

Теорема 2. Для μ -почти всех $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$

$$\mu\left\{x \in \mathbf{R}^\infty: \lim_{n \rightarrow \infty} q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = q_{i|1\dots i\dots \infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots)\right\} = 1.$$

В качестве иллюстрации теоремы 2 приведем следующие примеры.

П р и м е р 1. Пусть $F(u|v) = H(u/v)$, $v > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 h(t) dt < +\infty$.

Класс задаваемых таким образом распределений включает в себя, в частности, распределения Стюдента и Коши (см. [5]). Можно показать (см. замечание 4 в п. 2), что функционал $s_\infty(z)$ μ -почти наверное совпадает со случайной величиной

$$\zeta_\infty(z) = \frac{1}{m_h} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k^2(z) \right)^{1/2},$$

где $e_k(z)$ — функционалы, введенные ранее, а $m_h^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 h(t) dt$.

В силу теоремы 1 (с учетом специального вида функции $F(x|y)$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = H\left(\frac{x_i}{\zeta_\infty(x)}\right) \quad (\mu\text{-п.н.}).$$

Утверждение теоремы 2 принимает вид: для μ -почти всех $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = x_i^\circ \frac{\zeta_\infty(x)}{\zeta_\infty(x^\circ)} \quad (\mu\text{-п.н.}).$$

Пример 2. Пусть

$$F(u|v) = \begin{cases} H\left(\frac{\ln u}{\ln(v+1)}\right), & u > 0, \\ 0, & u \leq 0 \end{cases} \quad (v > 0).$$

Рассмотрим случайную величину

$$\xi_\infty(z) = \exp \left\{ \frac{1}{m_h} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln^2 |e_k(z)| \right)^{1/2} \right\} - 1.$$

Аналогично примеру 1 можно показать, что $s_\infty(z)$ μ -п.н. совпадает со случайной величиной $\xi_\infty(z)$. В этом случае утверждение теоремы 1 выглядит следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = H\left(\frac{\ln x_i}{\ln \xi_\infty(x)}\right) \quad (\mu\text{-п.н.}).$$

А утверждение теоремы 2 принимает вид: для μ -почти всех $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = [\xi_\infty(x)]^{(\ln x_i^\circ / \ln \xi_\infty(x^\circ))} \quad (\mu\text{-п.н.}).$$

2. Доказательства вспомогательных утверждений.

Доказательство леммы 1. 1°. Рассмотрим меру μ_y на пространстве $(\mathbf{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty))$, определяемую последовательностью конечномерных распределений

$$\mu_y\{z = (z_1, \dots, z_n, \dots): z_1 \leq x_1, \dots, z_n \leq x_n\} = \prod_{i=1}^n F(x_i | y),$$

где $y > 0$ — фиксированное число. Относительно этой меры последовательность функционалов $\{e_k(z)\}_{k=1}^\infty$ ($z \in \mathbf{R}^\infty$) и последовательность индикаторов $\{I_{\{z: e_i(z) \leq x\}}(z)\}_{k=1}^\infty$ являются последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}_y\{I_{\{z: e_i(z) \leq x\}}(z)\} = \mu_y\{z: e_i(z) \leq x\} = F(x | y).$$

На основе усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова [11, гл. IV, § 3, п. 3, теорема 3] можно утверждать, что для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $y > 0$

$$\mu_y\left\{z: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{z: e_k(z) \leq x\}}(z) = F(x | y)\right\} = 1,$$

т.е.

$$\mu_y\left\{z: \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x; z) = F(x | y)\right\} = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall y > 0. \quad (7)$$

Отсюда в силу критерия фундаментальности почти наверное [11, гл. II, § 10, п. 2, теорема 1], для любых $y > 0$, $\varepsilon > 0$ будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_y\left\{z: \sup_{k \geq 0} |F_{n+k}^*(x; z) - F_n^*(x; z)| > \varepsilon\right\} = 0. \quad (8)$$

Покажем, что из фундаментальности μ_y -п.н. последовательности $\{F_n^*(x; z)\}_{n=1}^\infty$ следует ее фундаментальность μ -п.н. В самом деле, из представления (1) нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ z: \sup_{k \geq 0} |F_{n+k}^*(x; z) - F_n^*(x; z)| > \varepsilon \right\} \\ &= \int_0^\infty \mu_y \left\{ z: \sup_{k \geq 0} |F_{n+k}^*(x; z) - F_n^*(x; z)| > \varepsilon \right\} g(y) dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в силу сходимости (8) из равенства (9) получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \sup_{k \geq 0} |F_{n+k}^*(x; z) - F_n^*(x; z)| > \varepsilon \right\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно, в силу критерия Коши [11, гл. II, § 10, п. 4, теорема 3] существуют $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ -измеримая случайная величина $F_\infty^*(x; z)$ и множество сходимости $\Gamma_1 \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ такие, что $\mu\{\Gamma_1\} = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x; z) = F_\infty^*(x; z) \quad \forall z \in \Gamma_1. \quad (10)$$

Из равенства (7) следует, что

$$\mu_y \{z: F_\infty^*(x; z) = F(x | y)\} = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall y > 0.$$

Введем множество

$$B_{[x|y]} := \{z \in \mathbf{R}^\infty: F_\infty^*(x; z) = F(x | y)\}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y > 0.$$

Тогда $B_{[x|y]} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ как множество уровня $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ -измеримой функции $F_\infty^*(x; z)$. Из свойства 2° функции $F(x | y)$ следует, что если $y_1 \neq y_2$, то

$$B_{[x|y_1]} \cap B_{[x|y_2]} = \emptyset \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (11)$$

Рассмотрим множество $B_{[x]} := \bigcup_{y>0} B_{[x|y]}$. Покажем, что $B_{[x]} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$. В самом деле, по свойству 2° взаимной однозначности функции $F(x | y)$ множество

$$F_{[x; (0, +\infty)]} := \{F(x | y): y \in (0, +\infty)\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

для любого $x \in \mathbf{R}$ [12, § 39, п. V, теорема 1]. Осталось заметить, что

$$B_{[x]} = \{z: F_\infty^*(x; z) \in F_{[x; (0, +\infty)]}\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

как прообраз борелевского множества $F_{[x; (0, +\infty)]}$ при $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ -измеримом отображении $F_\infty^*(x; z)$. При этом

$$\begin{aligned} \mu\{B_{[x]}\} &= \mu \left\{ \bigcup_{y>0} B_{[x|y]} \right\} = \int_0^\infty \mu_\tau \left\{ \bigcup_{y>0} B_{[x|y]} \right\} g(\tau) d\tau \\ &\geq \int_0^\infty \mu_\tau \{B_{[x|\tau]}\} g(\tau) d\tau = 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mu\{B_{[x]}\} = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

На множестве $B_{[x|y]}$ определим функцию $\beta_x(z)$ следующим образом:

$$\beta_x(z) \equiv y \quad \forall z \in B_{[x|y]}, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (13)$$

Далее, ввиду (11) функция $\beta_x(z)$ может быть определена на $B_{[x]}$, т.е. функция $\beta_x(z)$ определена, в силу (12), для μ -почти всех $z \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$.

Так как

$$\{z: \beta_x(z) \leq t\} = \bigcup_{0 < y \leq t} B_{[x|y]} = \{z: F_\infty^*(x; z) \in F_{[x; (0, +\infty)]}\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty) \quad \forall t > 0,$$

то функция $\beta_x(z)$ является $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ -измеримой. Ввиду (12)

$$\begin{aligned}\mu\{z: F_\infty^*(x; z) = F(x | \beta_x(z))\} &= \mu\{z \in B_{[x]}: F_\infty^*(x; z) = F(x | \beta_x(z))\} \\ &= \mu\left\{\bigcup_{y>0} \{z \in B_{[x|y]}: F_\infty^*(x; z) = F(x | y)\}\right\} = \mu\left\{\bigcup_{y>0} B_{[x|y]}\right\} = 1.\end{aligned}$$

Докажем существование функции $s_\infty(z)$ (не зависящей от x), совпадающей μ -почти всюду с каждой функцией из семейства $\{\beta_x(z)\}_{x \in \mathbf{R}}$:

$$\mu\{z: \beta_x(z) = s_\infty(z)\} = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (14)$$

В самом деле, по определению (13) при $x_1 \neq x_2$

$$\beta_{x_1}(z) \equiv \beta_{x_2}(z) \quad \forall z \in B_{[x_1]} \cap B_{[x_2]},$$

причем $\mu\{B_{[x_1]} \cap B_{[x_2]}\} = 1$. Выбирая в качестве $s_\infty(z)$, например, $\beta_{x_0}(z)$ ($x_0 \in \mathbf{R}$ — произвольное фиксированное число), а в качестве $\Gamma = \Gamma_1 \cap B_{[x_0]}$ ($\mu\{\Gamma\} = 1$), получаем утверждение п. 1° леммы.

2°. По определению функции $s_\infty(z)$, а также в силу того, что $\mu_y\{B_{[x_0|y]}\} = 1$ для любого $y > 0$, имеем

$$\begin{aligned}\mu\{z: s_\infty(z) \leq v\} &= \int_0^\infty \mu_y\{z: s_\infty(z) \leq v\} g(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mu_y\{z \in B_{[x_0|y]}: \beta_{x_0}(z) \leq v\} g(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mu_y\{z \in B_{[x_0|y]}: y \leq v\} g(y) dy \\ &= \int_0^v \mu_y\{B_{[x_0|y]}\} g(y) dy = \int_0^v g(y) dy.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 4. В лемме 1 установлено лишь существование функционала $s_\infty(z)$. В условиях же примера 1 при дополнительных предположениях о виде функции $F(u|v)$ этот функционал вычисляется в явном виде. Действительно, в силу свойств функционалов $e_k(z)$ и усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова $\mu_y\{z: \zeta_\infty(z) = y\} = 1$ для любого $y > 0$. Отсюда, используя соотношения (13) и (14), будем иметь:

$$\mu\{z: s_\infty(z) = \zeta_\infty(z)\} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Найдем совместное распределение случайных величин $e_1(z), \dots, e_n(z), s_\infty(z)$ (проводя рассуждения аналогично тому, как это было сделано при доказательстве п. 2° леммы 1):

$$\begin{aligned}\mu\{z: e_1(z) \leq x_1, \dots, e_n(z) \leq x_n, s_\infty(z) \leq v\} \\ &= \int_0^\infty \mu_y\{z: e_1(z) \leq x_1, \dots, e_n(z) \leq x_n, s_\infty(z) \leq v\} g(y) dy \\ &= \int_0^\infty \mu_y\{z \in B_{[x_0|y]}: e_1(z) \leq x_1, \dots, e_n(z) \leq x_n, y \leq v\} g(y) dy \\ &= \int_0^v \mu_y\{z: e_1(z) \leq x_1, \dots, e_n(z) \leq x_n\} g(y) dy = \int_0^v \prod_{k=1}^n F(x_k | y) g(y) dy.\end{aligned}$$

Поэтому совместная плотность распределения вероятностей случайных величин $e_1(z), \dots, e_n(z), s_\infty(z)$ есть функция $\prod_{k=1}^n f(x_k | v) g(v)$. Отсюда следует, что условная плотность распределения случайной величины $e_i(z)$ относительно $e_1(z), \dots, \widehat{e_i(z)}, \dots, e_n(z), s_\infty(z)$ есть $f(x_i | v)$.

Таким образом,

$$\mu\{e_i(z) \leq x_i | \sigma(e_1(z), \dots, \widehat{e_i(z)}, \dots, e_n(z), s_\infty(z))\} = F(x_i | s_\infty(z)) \quad \forall x_i \in \mathbf{R}.$$

Лемма доказана.

3. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Введем вспомогательные обозначения для σ -алгебр ($i < n$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{1\dots n}^i &= \sigma(e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x)), \\ \mathcal{F}_{1\dots n, \infty}^i &= \sigma(e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x), s_\infty(x)), \\ \mathcal{F}_{n\dots\infty} &= \sigma(e_n(x), e_{n+1}(x), \dots), \\ \mathcal{F}_\infty &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n\dots\infty} \text{ («остаточная» } \sigma\text{-алгебра)}.\end{aligned}$$

1°. Из определения (10) функции $F_\infty^*(x; z)$ следует, что для любого $x \in \mathbf{R}$ эта функция измерима по z относительно «остаточной» σ -алгебры $\mathcal{F}_\infty$ и множество сходимости Γ_1 принадлежит $\mathcal{F}_\infty$. Покажем, что случайная величина $s_\infty(z)$ также является $\mathcal{F}_\infty$ -измеримой. Для этого вначале отметим, что $s_\infty(z) = \beta_{x_0}(z)$ при $z \in B_{[x_0]}$, а

$$\{z: \beta_{x_0}(z) \leq t\} = \bigcup_{0 < y \leq t} B_{[x_0 | y]} = \{z: F_\infty^*(x; z) \in F_{[x; (0, t)]}\},$$

где $F_{[x; (0, t)]} := \{F(x | y): y \in (0, t]\}$. Далее, для любого $t > 0$ множество $\{z: \beta_{x_0}(z) \leq t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_\infty$, поскольку $\{z: F_\infty^*(x; z) \in F_{[x; (0, t)]}\}$ принадлежит $\mathcal{F}_\infty$ как прообраз борелевского множества $F_{[x; (0, t)]}$ при измеримом относительно $\mathcal{F}_\infty$ отображении $F_\infty^*(x; z)$. Аналогично можно показать, что $B_{[x_0]} \in \mathcal{F}_\infty$, следовательно, $\Gamma = \Gamma_1 \cap B_{[x_0]} \in \mathcal{F}_\infty$.

Ввиду $\mathcal{F}_\infty$ -измеримости случайной величины $s_\infty(z)$ будем иметь:

$$\sigma\left(\bigcup_{n=i+1}^{\infty} \mathcal{F}_{1\dots n}^i\right) = \sigma\left(\bigcup_{n=i+1}^{\infty} \mathcal{F}_{1\dots n, \infty}^i\right). \quad (15)$$

Теперь можно применить теорему П. Леви о сходимости условных математических ожиданий [11, гл. VII, § 4, п. 3, теорема 3]: μ -почти наверное

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{e_i(z) \leq x_i | \mathcal{F}_{1\dots n}^i\} &= \mu\left\{e_i(z) \leq x_i \left| \sigma\left(\bigcup_{n=i+1}^{\infty} \mathcal{F}_{1\dots n}^i\right)\right.\right\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{e_i(z) \leq x_i | \mathcal{F}_{1\dots n, \infty}^i\} &= \mu\left\{e_i(z) \leq x_i \left| \sigma\left(\bigcup_{n=i+1}^{\infty} \mathcal{F}_{1\dots n, \infty}^i\right)\right.\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 2 и соотношение (15), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{i | 1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = F(x_i | s_\infty(x))$$

для μ -почти всех $x \in \mathbf{R}^\infty$.

2°. Доказательство этого утверждения следует из того известного факта, что условная функция распределения $W_{1\dots i\dots n}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$ является преобразованием независимости случайной величины $e_i(x)$ относительно системы случайных величин $e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x)$. Именно, это означает, что относительно меры μ случайная величина $W_{1\dots i\dots n}(e_i(x) | e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x))$ не зависит от системы случайных величин $e_1(x), \dots, \widehat{e_i(x)}, \dots, e_n(x)$ (см., например, [1], [2], [4]). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу свойств функции $\psi(u, v)$ существуют функции $u = \kappa(t, v)$ и $v = \nu(u, t)$ такие, что: 1) $\psi(\kappa(t, v), v) \equiv t$ для любого $v > a$; 2) $\psi(u, \nu(u, t)) \equiv t$ для любого $u \in \mathbf{R}$, т.е. функция $\psi(u, v)$ обратима по обоим аргументам. Используя предположения, сделанные относительно функции $F(u | v)$, можно указать явный вид функционала $s_\infty(z)$: $s_\infty(z) = \nu(x, H^{-1}(F_\infty^*(x; z)))$, $z \in \mathbf{R}^\infty$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Причем $s_\infty(z)$ μ -почти наверное не зависит от $x \in \mathbf{R}$ (см. доказательство леммы 1).

Выберем точку $x^\circ \in \mathbf{R}^\infty$, для которой выполняется соотношение (6). Ввиду монотонности функции $H(\cdot)$, из (6) следует, что

$$\psi\left(q_{i|1\dots i\dots\infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots), s_\infty(x)\right) = \psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ)).$$

Откуда, ввиду обратимости функции $\psi(\cdot, \cdot)$

$$q_{i|1\dots i\dots\infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots) = \kappa(\psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ)), s_\infty(x)). \quad (16)$$

Из формул (3) и (6) следует, что для μ -почти всех $x \in \mathbf{R}^\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n} \left(q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} W_{i|1\dots i\dots n}(x_i^\circ \mid x_1^\circ, \dots, \widehat{x}_i^\circ, \dots, x_n^\circ) = H(\psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ))). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим случай, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) = Q$, $|Q| < +\infty$. Ввиду монотонности условной функции распределения по первому аргументу (при фиксированном условии) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $n > N$

$$\begin{aligned} W_{i|1\dots i\dots n}(Q - \varepsilon \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \\ \leq W_{i|1\dots i\dots n} \left(q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n \right) \\ \leq W_{i|1\dots i\dots n}(Q - \varepsilon \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Переходя в (18) к пределу при $n \rightarrow \infty$, ввиду (6) и (17) получаем:

$$H(\psi(Q - \varepsilon, s_\infty(x))) \leq H(\psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ))) \leq H(\psi(Q + \varepsilon, s_\infty(x))),$$

откуда, ввиду монотонности функции $H(\cdot)$

$$\psi(Q - \varepsilon, s_\infty(x)) \leq \psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ)) \leq \psi(Q + \varepsilon, s_\infty(x)).$$

Тогда по свойствам функций $\psi(\cdot, \cdot)$ и $\kappa(\cdot, \cdot)$

$$\kappa(\psi(Q - \varepsilon, s_\infty(x)), s_\infty(x)) \leq \kappa(\psi(x_i^\circ, s_\infty(x^\circ)), s_\infty(x)) \leq \kappa(\psi(Q + \varepsilon, s_\infty(x)), s_\infty(x)),$$

откуда в силу (16) $Q - \varepsilon \leq q_{i|1\dots i\dots\infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots) \leq Q + \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем равенство

$$q_{i|1\dots i\dots\infty}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots) = Q.$$

Аналогично доказывается случай, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i|1\dots i\dots n}^{(x^\circ)}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) = \pm\infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Ранее в работах [4], [5] были изучены асимптотические свойства условных распределений студентовых и устойчивых эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве. В этих работах вместо леммы 1 («теорема де Финетти») использовалась формула Шёнберга, а вместо леммы 2 применялся метод Лапласа нахождения асимптотики интегралов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 470–472.
2. Шатских С. Я. Об одном варианте преобразования независимости. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 815–816.
3. Shatskih S. Ya. Multivariate Cauchy distributions as locally gaussian distributions. — J. Math. Sci. (New York), 1996, v. 78, № 1, p. 102–108.

4. Шатский С. Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 1999, № 3, с. 43–81.
5. Кнутава Е. М. Асимптотические свойства условных распределений мер Стюдента в гильбертовом пространстве. — Вестник СамГУ, естественнонауч. сер., 2001, № 4, с. 42–55.
6. Rüschendorf L., de Valk V. On regression representation of stochastic processes. — Stochastic Process. Appl., 1993, v. 46, № 2, p. 183–198.
7. Poiraud-Casanova S., Thomas-Agnan Ch. Quantiles conditionnels. — J. Société Française de Statistique, 1998, v. 139, № 4, p. 31–44.
8. Дынкин Е. Б. Классы эквивалентных случайных величин. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, № 2, с. 125–130.
9. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
10. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 264 с.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
12. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966, 594 с.

Поступила в редакцию
21.V.2001

Исправленный вариант
10.II.2006

© 2006 г.

КРУГЛОВ В. М.*

РОСТ СУММ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С БЕСКОНЕЧНЫМИ СРЕДНИМИ¹⁾

Доказано, что $P\{|S_n| > a_n \text{ бесконечно часто}\} = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\}$, где $S_n = X_1 + \dots + X_n$ — сумма одинаково распределенных, попарно независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, $a_n > 0$, для некоторого t последовательность $\{a_n\}_{n \geq t}$ строго возрастает и выпукла.

Ключевые слова и фразы: случайная величина, попарная независимость.

Приводимая ниже теорема доказана В. Феллером [1] для одинаково распределенных, независимых случайных величин в предположении, что последовательность $\{a_n/n\}_{n \geq 1}$ возрастает. Б. Фристедт [2] дал простое доказательство теоремы Феллера при более ограничительном условии, что $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $a_0 = 0$, — строго возрастающая, выпуклая последовательность. Мы обобщаем теорему Феллера–Фристедта на случай попарно независимых случайных величин и слегка ослабляем требования к последовательности $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Теорема. Пусть случайные величины X_n , $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, одинаково распределены, попарно независимы, $E|X_n| = \infty$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и для некоторого $t \in \mathbb{N}$ последовательность a_n , $n \geq t$, строго возрастает и выпукла. Тогда $P\{|S_n| > a_n \text{ б.ч.}\} = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\}$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 05-01-00535, 05-01-00583.