Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Дуади, М. Йор, А. Н. Ширяев, О вероятностных характеристиках величин “падения” в стандартном броуновском движении, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:28:54

© 1999 г. ДУАДИ Р., ЙОР М.*, ШИРЯЕВ А. Н.**

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЕЛИЧИН «ПАДЕНИЯ» В СТАНДАРТНОМ БРОУНОВСКОМ ДВИЖЕНИИ

Для броуновского движения $B = (B_t)_{t \leq 1}$ с $B_0 = 0$, $EB_t = 0$, $EB_t^2 = t$ рассматриваются вопросы о распределениях вероятностей и их характеристиках для величин

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} (B_t - B_{t'}), & \mathbb{D}_1 &= B_\sigma - \inf_{\sigma \leq t' \leq 1} B_{t'}, \\ \mathbb{D}_2 &= \sup_{0 \leq t \leq \sigma'} B_t - B_{\sigma'}, \end{aligned}$$

где σ и σ' — моменты (немарковские) абсолютного максимума и абсолютного минимума броуновского движения на $[0, 1]$ (т.е. $B_\sigma = \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t$, $B_{\sigma'} = \inf_{0 \leq t' \leq 1} B_{t'}$).

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, величины «падения» и «размаха», теорема Леви, броуновский меандр.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассматривается стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ (с $B_0 = 0$, $EB_t = 0$, $EB_t^2 = t$).

Наш основной интерес будет связан с изучением вероятностных свойств величин

$$\mathbb{D} = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} (B_t - B_{t'}), \tag{1}$$

$$\mathbb{D}_1 = B_\sigma - \inf_{\sigma \leq t' \leq 1} B_{t'}, \tag{2}$$

$$\mathbb{D}_2 = \sup_{0 \leq t \leq \sigma'} B_t - B_{\sigma'}, \tag{3}$$

*Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, 4 Place Jussieu, Tour 56, F-75252 Paris Cédex 05, France.

**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

где σ и σ' определяются ($\mathbf{P}$ -п.н. однозначно) соотношениями

$$B_\sigma = \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t, \quad (4)$$

$$B_{\sigma'} = \inf_{0 \leq t' \leq 1} B_{t'}. \quad (5)$$

Из приведенных определений ясно, что величина $\mathbb{D}$ характеризует *максимально* возможное «падение» траекторий броуновского движения на временном интервале $[0, 1]$.

Величина $\mathbb{D}_1$ показывает, насколько может «падать» траектория броуновского движения от *абсолютного* (на $[0, 1]$) *максимума* B_σ к (частичному) *минимуму* $\inf_{\sigma \leq t' \leq 1} B_{t'}$. Соответственно, величина $\mathbb{D}_2$ характеризует «падение» от (частичного) *максимума* $\sup_{0 \leq t \leq \sigma'} B_t$ к *абсолютному* (на $[0, 1]$) *минимуму* $B_{\sigma'}$.

Полезно отметить, что моменты σ и σ' являются *немарковскими*.

2. Понятно, что

$$\mathbb{D} = \begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(B_t - \inf_{t \leq t' \leq 1} B_{t'} \right) \geq \mathbb{D}_1, \\ \sup_{0 \leq t' \leq 1} \left(\sup_{0 \leq t \leq t'} B_t - B_{t'} \right) \geq \mathbb{D}_2. \end{cases}$$

Тем самым,

$$\max(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) \leq \mathbb{D}. \quad (6)$$

(Можно убедиться в том, что в (6) на самом деле имеет место знак равенства: $\max(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) = \mathbb{D}$.)

Если обозначить

$$\mathbb{R} = \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t - \inf_{0 \leq t \leq 1} B_t \quad (7)$$

— «размах» броуновского движения, то найдем, что

$$\mathbb{R} = \sup_{0 \leq t, t' \leq 1} (B_t - B_{t'})$$

и

$$\max(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) = \mathbb{D} \leq \mathbb{R}. \quad (8)$$

Хорошо известно, что рассмотрение статистики $\mathbb{R}$ полезно при *апостериорном* анализе поведения траекторий процесса B на временном интервале $[0, 1]$. В то же время, статистики $\mathbb{D}, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ дают больше информации о *текущем* поведении траекторий, что особенно важно тогда, когда надо учитывать временную упорядоченность производимых наблюдений.

3. Переходя к формулировкам результатов относительно вероятностных распределений и их характеристик статистик $\mathbb{D}, \mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$, прежде всего заметим, что по распределению величины $\mathbb{D}_1$ и $\mathbb{D}_2$ совпадают:

$$\mathbb{D}_1 \stackrel{\text{law}}{=} \mathbb{D}_2. \quad (9)$$

(Это легко следует из того, что процесс $\hat{B} = (\hat{B}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ с $\hat{B}_t = B_t - B_{1-t}$ также является броуновским движением.)

Теорема 1. Для стандартного броуновского движения

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|. \quad (10)$$

Среднее значение

$$\mathbf{E} \mathbb{D} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (= 1.2533 \dots) \quad (11)$$

и функция распределения $F_{\mathbb{D}}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{D} \leq x)$ задается формулой

$$F_{\mathbb{D}}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-x}^x [e^{-(y+4kx)^2/2} - e^{-(y+2x+4kx)^2/2}] dy. \quad (12)$$

Теорема 2. Для стандартного броуновского движения

$$\mathbb{D}_1 \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{g \leq t \leq 1} |B_t|, \quad (13)$$

где

$$g = \sup\{t \leq 1: B_t = 0\} \quad (14)$$

— момент последнего обращения в нуль процесса $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$.

Среднее значение

$$\mathbf{E} \mathbb{D}_1 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \ln 2 \quad (= 1.1061 \dots) \quad (15)$$

и функция распределения $F_{\mathbb{D}_1}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{D}_1 \leq x)$ имеет плотность (рис. 1)

$$f_{\mathbb{D}_1}(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k e^{-k^2 x^2/2}, \quad x > 0. \quad (16)$$

4. Ряд (16) весьма схож с теми рядами, которыми описываются распределение вероятностей $F_{\mathbb{K}}(x)$ в критерии согласия Колмогорова и распределение вероятностей $F_{\mathbb{R}}(x)$ статистики «размаха» $\mathbb{R}$.

Именно, функция распределения

$$F_{\mathbb{K}}(x) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |b(t)| \leq x\right), \quad (17)$$

где $b = (b(t))_{0 \leq t \leq 1}$ — броуновский мост $((b(t); t \leq 1) \stackrel{\text{law}}{=} (B_t - tB_1; t \leq 1))$, задается при $x > 0$ формулой ([7], [5], [4])

$$F_{\mathbb{K}}(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 x^2} \quad (18)$$

Рис. 1. График функции $f_{\mathbb{D}_1}(x) = \sqrt{8/\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k e^{-k^2 x^2/2}$, $x > 0$.

или, равносильно, формулой

$$F_{\mathbb{K}}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / x^2}.$$

Известно также (см., например, [6]), что распределение вероятностей $F_{\mathbb{R}}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{R} \leq x)$ имеет плотность (рис. 2)

$$f_{\mathbb{R}}(x) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-k^2 x^2/2}, \quad x > 0. \quad (19)$$

Из (18) и (19) видим, что плотность $f_{\mathbb{K}}(x) = F'_{\mathbb{K}}(x)$ определяется формулой (рис. 3)

$$f_{\mathbb{K}}(x) = 8x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-2k^2 x^2}, \quad x > 0,$$

и при этом

$$f_{\mathbb{R}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} f_{\mathbb{K}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда, в частности, заключаем, что

$$\mathbf{E} \mathbb{R} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \quad (= 1.5957 \dots)$$

(ср. с (8), (11), (15)).

Рис. 2. График функции $f_{\mathbb{R}}(x) = 8/\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-k^2 x^2/2}$, $x > 0$.

Рис. 3. График функции $f_{\mathbb{K}}(x) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 x e^{-2k^2 x^2}$, $x > 0$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

1. Если установлено, что $\mathbb{D} \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|$ (свойство (10)), то формула (12) будет следовать из известных результатов относительно распределения $\mathbf{P}(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t| \leq x)$. (См., например, [1, с. 250, ф-ла 1.1.4].)

Доказательство же требуемого свойства (10) весьма просто. Обозначим

$$M_t = \sup_{0 \leq u \leq t} B_u$$

и L_t — локальное время броуновского движения B на $[0, t]$:

$$L_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds.$$

Согласно одному из фундаментальных свойств броуновского движения,

$$(M_t - B_t, M_t; t \leq 1) \stackrel{\text{law}}{=} (|B_t|, L_t; t \leq 1) \quad (20)$$

(«теорема П. Леви» [9, с. 230]).

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} (B_t - B_{t'}) \\ &= \sup_{0 \leq t' \leq 1} \left(\sup_{0 \leq t \leq t'} B_t - B_{t'} \right) = \sup_{0 \leq t' \leq 1} (M_{t'} - B_{t'}) \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|. \end{aligned}$$

2. Формула $\mathbf{E}\mathbb{D} = \sqrt{\pi/2}$ известна, видимо, многим и может быть получена из (12).

Для полноты изложения приведем два ее вывода, не апеллирующие непосредственно к формуле (12) для распределения $F_{\mathbb{D}}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{D} \leq x)$.

Пусть $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение, $S_1 = \inf\{t \geq 0: |\beta_t| = 1\}$. Если воспользоваться свойством автомодельности: для $a > 0$

$$(\beta_{at}; t \geq 0) \stackrel{\text{law}}{=} (a^{1/2}\beta_t; t \geq 0),$$

то найдем, что для $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_t| \leq x\right) &= \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_{t/x^2}| \leq 1\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1/x^2} |\beta_t| \leq 1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(S_1 \geq \frac{1}{x^2}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} \leq x\right). \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_t| \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{\sqrt{S_1}}.$$

Из свойств нормального распределения следует, что для $\sigma > 0$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \sigma.$$

Тем самым,

$$\mathbf{E} \mathbb{D} = \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_t| = \mathbf{E} \frac{1}{\sqrt{S_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{E} e^{-x^2 S_1/2} dx.$$

Для величины S_1 хорошо известно (см., например, [9, с. 68], [10, с. 303]) преобразование Лапласа

$$\mathbf{E} e^{-\lambda S_1} = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbb{D} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^\infty \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} x \Big|_1^\infty = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Второй вывод формулы $\mathbf{E} \mathbb{D} = \sqrt{\pi/2}$ основан на том свойстве, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t| \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{R_s^{(2)}} \quad (21)$$

(см. [9, с. 250]), где $(R_s^{(2)})_{s \leq 1}$ — процесс Бесселя порядка 2, для которого

$$R_s^{(2)} = \widehat{\beta}_s + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{du}{R_u^{(2)}}, \quad (22)$$

где $\widehat{\beta} = (\widehat{\beta}_s)_{s \leq 1}$ — некоторое броуновское движение.

Из (21) и (22) непосредственно видим, что

$$\mathbf{E} \mathbb{D} = \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_t| = \mathbf{E} R_1^{(2)} = \mathbf{E} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

где ξ_1 и ξ_2 — независимые стандартные гауссовские величины с параметрами 0 и 1. Поскольку $\mathbf{E} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \sqrt{\pi/2}$, то снова приходим к требуемой формуле $\mathbf{E} \mathbb{D} = \sqrt{\pi/2}$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

1. Из теоремы Леви (20) следует, что

$$(M_t - B_t, M_t, B_t; t \leq 1) \stackrel{\text{law}}{=} (|B_t|, L_t, L_t - |B_t|; t \leq 1).$$

Отсюда можно заключить, что

$$(M_t - B_t, M_t, B_t; \sigma \leq t \leq 1) \stackrel{\text{law}}{=} (|B_t|, L_t, L_t - |B_t|; g \leq t \leq 1).$$

Значит,

$$\begin{aligned} (B_\sigma, \sup_{\sigma \leq t \leq 1} (M_t - B_t - M_t)) &\stackrel{\text{law}}{=} (L_g - |B_g|, \sup_{g \leq t \leq 1} (|B_t| - L_t)), \\ &= (L_g, \sup_{g \leq t \leq 1} |B_t| - L_g), \end{aligned}$$

поскольку $B_g = 0$ и $L_t = L_g$ для $g \leq t \leq 1$ в силу (14).

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 &= B_\sigma - \inf_{\sigma \leq t \leq 1} B_t = B_\sigma + \sup_{\sigma \leq t \leq 1} (-B_t) \\ &= B_\sigma + \sup_{\sigma \leq t \leq 1} (M_t - B_t - M_t) \stackrel{\text{law}}{=} L_g + \sup_{g \leq t \leq 1} |B_t| - L_g = \sup_{g \leq t \leq 1} |B_t|, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение (13).

2. Обратимся к доказательству формулы (16). Пусть $m = (m_u)_{0 \leq u \leq 1}$ — стандартный броуновский меандр (meander), или «броуновская извилина» ([9, с. 468], [11; 12.3.2], [2]):

$$m_u \equiv \frac{1}{\sqrt{1-g}} |B_{g+u(1-g)}|.$$

Вместе с (13) отсюда заключаем, что

$$\mathbb{D}_1 \stackrel{\text{law}}{=} \sqrt{1-g} \sup_{0 \leq u \leq 1} m_u. \quad (23)$$

Для отыскания распределения величины $\sqrt{1-g} \sup_{0 \leq u \leq 1} m_u$ заметим, прежде всего, что $g \stackrel{\text{law}}{=} 1 - g$, причем (согласно «первому закону арксинуса», [9, с. 106]) плотность

$$f_g(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1. \quad (24)$$

Известно также, что g и $\sup_{0 \leq u \leq 1} m_u$ независимы (см. [9, с. 468]).

Далее, если $\varepsilon \sim \exp(\frac{1}{2})$, т.е. ε является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\frac{1}{2}$, и не зависит от броуновского движения B , то непосредственно проверяется, что

$$\varepsilon g \stackrel{\text{law}}{=} N^2,$$

где $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т.е. N имеет стандартное гауссовское распределение с параметрами 0 и 1.

Далее, известно (см. [9, с. 484], [2, с. 3 и 6]), что

$$\mathbf{P}\left(|N| \sup_{0 \leq u \leq 1} m_u \leq x\right) = \operatorname{th} \frac{x}{2}. \quad (25)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\sqrt{\varepsilon} \mathbb{D}_1 \leq x) = \mathbf{P}\left(\sqrt{\varepsilon g} \sup_{0 \leq u \leq 1} m_u \leq x\right) = \operatorname{th} \frac{x}{2}. \quad (26)$$

Положим

$$\eta = \frac{1}{\mathbb{D}_1}, \quad f_\eta(y) = \frac{d}{dy} \mathbf{P}(\eta \leq y).$$

Тогда в силу независимости ε и η

$$\mathbf{P}(\varepsilon \leq x^2 \eta \mid \eta = y) = \mathbf{P}(\varepsilon \leq x^2 y) = 1 - e^{-x^2 y/2}.$$

Поэтому согласно (26)

$$1 - \int_0^\infty e^{-x^2 y/2} f_\eta(y) dy = \operatorname{th} \frac{x}{2},$$

или, равносильно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2 y/2} f_\eta(y) dy &= 1 - \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-(k+1)x}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $T_a = \inf\{t \geq 0: \beta_t = a\}$, где $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение. Известно (см., например, [9, с. 68], [10, с. 302, 303]), что распределение вероятностей $F_{T_a}(t) = \mathbf{P}(T_a \leq t)$, $a > 0$, имеет плотность

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)}, \quad t > 0,$$

и преобразование Лапласа $\mathbf{E} e^{-\lambda T_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\lambda > 0$. Поэтому, беря $\lambda = x^2/2$, находим, что для $x \geq 0$

$$e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} e^{-x^2 t/2} dt.$$

Отсюда и из (27) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2 y/2} f_\eta(y) dy &= 2 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-(k+1)x} \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2 y/2} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k+1}{\sqrt{2\pi y^3}} e^{-(k+1)^2/(2y)} dy \end{aligned}$$

и, значит, в силу произвольности $x > 0$,

$$f_{\eta}(y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{\sqrt{2\pi y^3}} e^{-(k+1)^2/(2y)}, \quad y > 0.$$

Наконец, для $x > 0$

$$F_{\mathbb{D}_1}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{D}_1 \leq x) = \mathbf{P}\left(\eta \geq \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\eta < \frac{1}{x^2}\right)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{D}_1}(x) &= \frac{2}{x^3} f_{\eta}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) e^{-(k+1)^2 x^2/2} \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k e^{-k^2 x^2/2}, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (16).

3. Формулу $\mathbf{E}\mathbb{D}_1 = \sqrt{8/\pi} \ln 2$ можно получить из (16):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbb{D}_1 &= \int_0^{\infty} x f_{\mathbb{D}_1}(x) dx = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k x e^{-k^2 x^2/2} \right) dx \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{\infty} k x e^{-k^2 x^2/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \ln 2. \end{aligned}$$

(В данном выводе необходимо, конечно, обосновывать возможность смены порядка интегрирования и суммирования. Подобная смена не вызывает трудностей, если вместо $\mathbf{E}\mathbb{D}_1$ оперировать с $\mathbf{E}\mathbb{D}_1 I(a < \mathbb{D}_1 < A)$, где $0 < a < A < \infty$. Затем следует воспользоваться тем, что $\mathbf{E}\mathbb{D}_1 I(a < \mathbb{D}_1 < A) \uparrow \mathbf{E}\mathbb{D}_1$ при $a \downarrow 0$, $A \uparrow \infty$.)

Требуемую формулу $\mathbf{E}\mathbb{D}_1 = \sqrt{8/\pi} \ln 2$ можно получить также из следующих соображений.

Из (23)

$$\mathbf{E}\mathbb{D}_1 = \mathbf{E} \sqrt{1-g} S_m = \mathbf{E} \sqrt{1-g} \mathbf{E} S_m, \quad (28)$$

где $S_m = \sup_{0 \leq u \leq 1} m_u$ и второе равенство следует из уже отмечавшегося выше свойства независимости величин g и S_m .

В силу (24)

$$\mathbf{E} \sqrt{1-g} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}.$$

Для нахождения в (28) математического ожидания $\mathbf{E} S_m$ воспользуемся тем, что (см. (25)) $\mathbf{P}(|N| S_m \leq x) = \text{th}(x/2)$. Тогда найдем, что

$$\mathbf{E}|N| S_m = \int_0^{\infty} \left(1 - \text{th} \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/2} dx}{\text{ch}(x/2)} = 4 \int_0^1 \frac{y dy}{1+y^2} = 2 \ln 2.$$

В силу независимости N и S_m

$$\mathbf{E} |N| S_m = \mathbf{E} |N| \mathbf{E} S_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} S_m.$$

Значит,

$$\mathbf{E} S_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{E} |N| S_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} 2 \ln 2 = \sqrt{2\pi} \ln 2,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} \mathbb{D}_1 = \mathbf{E} \sqrt{1-g} \mathbf{E} S_m = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\pi} \ln 2 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \ln 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borodin A. N., Salminen P.* Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 1996. 462 p.
2. *Carmona Ph., Petit F., Pitman J. W., Yor M.* On the laws of homogeneous functionals of the Brownian bridge. Prepublication № 441. Paris: Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI, Avril 1998.
3. *Donati-Martin C., Shi Z., Yor M.* A $[0, 1]^2$ -valued Brownian functional with arcsine marginals. Prepublication № 445. Paris: Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI, Avril 1998.
4. *Doob J. L.* Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems. — Ann. Math. Statist., 1949, v. 20, p. 393–403.
5. *Feller W.* On the Kolmogorov–Smirnov limit theorems for empirical distributions. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 177–189.
6. *Feller W.* The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, p. 427–432.
7. *Kolmogoroff A.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. — Giorn. Instit. Ital. Attuari, 1933, v. 4, p. 83–91.
8. *Pitman J. W., Yor M.* Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. Astérisque, 1996, № 236, p. 249–276.
9. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
10. *Шуряев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, т. 2. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с., 544 с.
11. *Yor M.* Some Aspects of Brownian Motion. Part I: Some Special Functionals. Part II: Some Recent Martingale Problems. Basel: Birkhäuser, 1992 (part I); 1997 (part II). 148 p.; 144 p.

Поступила в редакцию
24.VIII.1998