Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Жуленев, О больших отклонениях, I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 34–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 05:57:33

© 1999 г.

ЖУЛЕНЕВ С. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ, I

Предлагается новый взгляд на идею Крамера, которой в 1998 г. исполнилось 60 лет: использовать преобразование меры для получения так называемого представления типа больших уклонений. Этот несколько иной подход позволяет понять, что старая идея даже в одномерном случае оказывается заметно более эффективной, чем это могло казаться до сих пор.

Ключевые слова и фразы: обобщенное преобразование Крамера, независимые разнораспределенные слагаемые, неасимптотическая постановка проблемы больших уклонений.

Введение. Когда за первоначальной работой [1] последовали многочисленные статьи и монографии [2], [3], сама идея Крамера ассоциировалась в них с возможностью получения представлений вида

$$P\{\xi > x\} = (1 - \Phi(x)) Q \exp(L) \quad (1)$$

для «правого хвоста» распределения случайной величины (с.в.) ξ , где $\Phi(x)$ — функция распределения (ф.р.) стандартного нормального закона, а Q и L — некоторые величины, зависящие от x и ξ . Именно этой, старой, постановке и посвящается настоящая работа. Только основным предлагается считать не x , а параметр, с помощью которого формулируются условия на распределение с.в. ξ . При этом в первых двух частях, ч. I и ч. II, рассматриваются лишь одномерные с.в., а в роли ξ в основном выступают нормированные суммы некоторой заданной последовательности независимых и разнораспределенных с.в.

Представляется, что первые две части работы в одинаковой степени характеризуют реальную эффективность идеи Крамера, хотя и с разных сторон. В первой рассматривается случай, когда выполняется условие Крамера, а во второй изучается общая ситуация, т.е. когда это условие заменяется на существование некоторого момента у слагаемых. Дело здесь в том, что в первой части дается определение так называемой естественной области определения представления (1) и строится фундамент получения любых таких представлений в так называемой

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

«неасимптотической» постановке. А во второй устанавливается возможность получать «почти» такие же представления и при нарушении условия Крамера.

Теперь несколько слов о целях (подробнее об этом в пп. 5, 10) и структуре именно первой части работы. Напрашивается подчеркнуть следующие два момента. Во-первых, здесь предлагается простое доказательство известного представления. Это лемма 1, которая является аналогом, например, теоремы 2 из [2, гл. VIII]. Во-вторых, при записи величин Q , L из (1) предлагается уйти от использования семиинвариантов с.в. ξ , чтобы расширить область определения возникающих представлений. А для этого предлагается записывать указанные величины не с помощью параметра x , как это сейчас принято, а в терминах некоторого вспомогательного параметра λ , с помощью которого формулируются условия на с.в. ξ , — т.е. считать, что $Q = Q(\lambda)$, $L = L(\lambda)$, $x = x(\lambda)$.

По структуре первую часть работы естественно разбить на 3 раздела. Первый из них охватывает пп. 1–3. Здесь вводится так называемое обобщенное преобразование Крамера (по-настоящему реализуемое лишь в следующей ч. II работы), предлагается концепция вывода представлений типа (1) в общем случае и доказывается утверждение (лемма 1), которое можно считать как бы основой всех дальнейших представлений. Второй раздел охватывает пп. 4–6. Его основная цель: показать, что традиционная форма записи показателя L с помощью ряда Крамера заметно сужает естественную область его определения. В этом разделе также предлагается «каноническая» форма ряда Крамера, говорится о взаимоотношениях используемых здесь функций с функцией уклонений и по существу объясняется вторая цель работы. Наконец, в третьем разделе (пп. 7–10) собственно и предлагается новый подход, в котором удастся даже открыть неожиданные вещи. В частности, оказывается, что известное асимптотическое соотношение $Q = 1 + O((x+1)/\sqrt{n})$, по сути, является неточным (см., например, [2, с. 270], а также следствие 4 из п. 8 работы).

1. Обобщенное преобразование Крамера. Пусть некоторая с.в. ξ и некоторая неотрицательная функция $g_\lambda(y)$ таковы, что

$$E\xi = 0, \quad D\xi = 1, \quad (2)$$

$$0 < E g_\lambda(\xi) = \varphi(\lambda) < \infty \quad (3)$$

при некотором значении вспомогательного параметра λ . Тогда равенство

$$dP\{\zeta < y\} = \frac{g_\lambda(y)}{\varphi(\lambda)} dP\{\xi < y\} \quad (4)$$

определяет распределение некоторой с.в. ζ , которую естественно назвать обобщенным преобразованием Крамера с.в. ξ . Можно сказать, таким образом, что в условиях (2), (3), (5.1) обобщенное преобразование Крамера

ζ — это с.в., принимающая те же значения, что и с.в. ξ , но с несколько измененным распределением, определяемым равенством (4).

Если при том же λ помимо (3) выполняются условия

$$1. g_\lambda(y) > 0 \text{ на множестве значений } \xi, \quad 2. 0 < D\zeta < \infty, \quad (5)$$

то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} P\{\xi > x\} &= \varphi(\lambda) \int_x^\infty g_\lambda^{-1}(y) dP\{\zeta < y\} \\ &= \varphi(\lambda) \int_{x-E\zeta}^\infty g_\lambda^{-1}(y + E\zeta) dP\{\zeta - E\zeta < y\} \\ &= \varphi(\lambda) \int_0^\infty g_\lambda^{-1}(x + y) dP\{\zeta - E\zeta < y\} \\ &= \varphi(\lambda) \int_0^\infty g_\lambda^{-1}(x + \sigma y) dP\{H < y\}; \end{aligned} \quad (6)$$

здесь и ниже $\sigma^2 = D\zeta$, $H = (\zeta - E\zeta)/\sigma$, $g_\lambda^{-1}(y) = 1/g_\lambda(y)$ и, кроме того, в нижней строчке предполагается, что $x = E\zeta$. Последнее равенство в (6) и лежит в основе всех предлагаемых далее представлений. Например, в первой части настоящей работы использовано оно будет с функцией $g_\lambda(y) = e^{\lambda y}$. В этом случае с.в. ζ называется преобразованием Крамера (ПК) с.в. ξ . В следующей, второй части это будет функция $g_\lambda(y) = \sum_0^{2n} (\lambda y)^k / k!$, и тогда величину ζ естественно будет называть обобщенным преобразованием Крамера (ОПК) с.в. ξ с функцией $g_\lambda(y)$. Но в любом случае, как нетрудно видеть из (6), для «хвоста» распределения с.в. ξ получается представление

$$P\{\xi > x\} = \varphi(\lambda) E(g_\lambda^{-1}(\zeta) I(\zeta > x)), \quad (6a)$$

в котором $I(A)$ — индикаторная функция события A .

З а м е ч а н и е 1. Эшер в [4], т.е. за 6 лет до Крамера, действительно, использовал преобразование (4) с $g_\lambda(y) = e^{\lambda y}$ для расчета вероятности $P\{\sum_1^\eta \xi_k \leq x\}$ при независимых одинаково распределенных с.в. $\xi_k = \xi$ и независимой от них пуассоновской с.в. η . Но можно ли на основании этого менять название преобразования (4)? Особенно, если дано оно не за форму этого преобразования, а за идею связать его с большими отклонениями, оказавшуюся столь плодотворной.

2. Некоторые вспомогательные обозначения. Ниже мы предпочитаем вместо отношения Миллса $\psi(x)$ использовать функцию

$$J(x) = \frac{x(1 - \Phi(x))}{\Phi'(x)} = x e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du,$$

которая при $x > 1$ фактически «представляет» единицу ($J(x) = x\psi(x)$). Особенно при $x \rightarrow \infty$, поскольку при $x > 0$ $x^2/(x^2 + 1) < J(x) < 1$, $1 < 1/J(x) < 1 + x^{-2}$, $1 - (1 + y^2)^{-1} < J(y)/J(x) < 1 + x^{-2}$. Также всюду ниже через θ и δ , с индексом или без него, будем обозначать, вообще говоря, разные величины, но всегда такие, что $|\theta| \leq 1$, а $0 \leq \delta \leq 1$.

3. Представление при условии Крамера. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi} < \infty, \quad |\lambda| < \Delta, \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\varphi''(\lambda) \text{ определена и конечна в том же интервале } |\lambda| < \Delta; \quad (8)$$

штрих без указания аргумента здесь и ниже означает производную по λ . Тогда, поскольку в силу (4) $\mathbf{E}\zeta = (\ln \varphi(\lambda))'$, $\sigma^2 = \sigma^2(\lambda) \equiv \mathbf{D}\zeta = (\ln \varphi(\lambda))''$, то ясно, что в рассматриваемой ситуации условия (3), (5) с функцией $g_\lambda(y) = e^{\lambda y}$ выполняются при любых λ из интервала $(-\Delta, \Delta)$, если $\mathbf{D}\xi > 0$ (чтобы $\mathbf{D}\zeta > 0!$). Таким образом, при выполнении условий (2), (7), (8) цепочка (6) имеет место при всех допустимых λ .

Предположим, что всюду ниже $\mathbf{P}\{H < y\} = H(y)$, запишем последнее равенство из (6) в виде

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} = (\varphi(\lambda) e^{-\lambda^2/2}) e^{(x-\lambda)^2/2} \left\{ e^{-x^2/2} \int_0^\infty e^{-\lambda\sigma y} dH(y) \right\} \quad (9)$$

и покажем, что ему можно придать форму (1), в которой обе искомые величины Q и L весьма просто выражаются через одну и ту же функцию

$$\kappa(\lambda) = \ln \varphi(\lambda) - \frac{\lambda^2}{2}.$$

Утверждение это будет для нас основным.

Лемма 1. Если выполнены условия (2), (7), (8), то при всех $|\lambda| < \Delta$ и соответствующих им

$$x = x(\lambda) \equiv \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \lambda + \kappa'(\lambda) \quad (10)$$

справедливо представление (1) с

$$L = \kappa(\lambda) + \frac{1}{2}(\kappa'(\lambda))^2, \quad (11)$$

$$Q = \frac{xJ(\lambda\sigma)}{\lambda\sigma J(x)} + \frac{2\theta\alpha x\sqrt{2\pi}}{J(x)} = \frac{\psi(\lambda\sigma) + 2\theta\alpha\sqrt{2\pi}}{\psi(x)}, \quad (12)$$

$$\sigma^2 = 1 + \kappa''(\lambda), \quad \alpha = \sup_y |H(y) - \Phi(y)|;$$

функции J, ψ и величина θ определены в п. 2.

При этом функция $\sigma^2 > 0$ при всех $|\lambda| < \Delta$, и потому уравнение (10) имеет единственное решение $\lambda = \lambda(x)$ при любом x из области значений функции $x(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приравняем выражение вне фигурных скобок из правой части (9) величине e^L , а выражение из фигурных скобок — величине $Q(1 - \Phi(x))$. Тогда станет ясно: нам осталось показать лишь, что

$$e^{-x^2/2} \int_0^\infty e^{-\lambda\sigma y} dH(y) = (1 - \Phi(x)) \left\{ \frac{xJ(\lambda\sigma)}{\lambda\sigma J(x)} + \frac{2\theta\alpha x\sqrt{2\pi}}{J(x)} \right\}, \quad (12a)$$

а $\sigma^2 = \sigma^2(\lambda) > 0$ при всех $|\lambda| < \Delta$ (в этом случае уравнение (10) имеет единственное решение, поскольку $\sigma^2 = x'(\lambda)$ и потому функция $x(\lambda)$ строго возрастает). Но первое вытекает из простых соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zy} dG(y) &= \int_0^\infty e^{-zy} d\Phi(y) + \int_0^\infty e^{-zy} d(G(y) - \Phi(y)) \\ &= e^{z^2/2}(1 - \Phi(z)) + (\Phi(0) - G(0)) + \theta\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

связывающих произвольную ф.р. $G(y)$ с нормальной $\Phi(y)$ при любом $z > 0$ ($\beta = \sup_{y>0} |G(y) - \Phi(y)|$), и того, что $e^{-x^2/2} = (1 - \Phi(x))x\sqrt{2\pi}/J(x)$ в силу определения функции $J(x)$. А $\sigma^2 \equiv D\zeta \neq 0$, так как $D\xi = 1 \neq 0$ и в силу (4), (5, условие 1) множества возможных значений ξ и ζ совпадают при любом λ . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства леммы 1 (цепочка соотношений (13)) вытекает, что форму (1) представления для «хвоста» распределения с.в. ξ и форму (12) записи коэффициента Q можно считать естественными для ситуаций, в которых с.в. ξ сближается со стандартной нормальной величиной $\mathcal{N}(0, 1)$ по распределению. Кроме того, если $\xi = \mathcal{N}(0, 1)$, то $L = 0$, $Q = 1$. В самом деле, $L = 0$, поскольку $\varphi(\lambda) = e^{\lambda^2/2}$ и, следовательно, $\varkappa(\lambda) \equiv 0$. А $Q = 1$, поскольку в силу (4) $\zeta = \mathcal{N}(\lambda, 1)$ и потому $E\zeta = \lambda \doteq x$, $D\zeta = 1$, $H = \mathcal{N}(0, 1)$, $\alpha = 0$.

З а м е ч а н и е 3. Как выяснится ниже, разницу между параметрами x и λ в определенных ситуациях естественно описывать функцией $\rho(u)$ «малого» параметра $u = \lambda/\Delta$, определяя ее равенством

$$x = \lambda(1 + \rho(u)). \quad (10a)$$

В этом случае для показателя L возникает представление

$$L = \lambda^2 \left\{ u^{-2} \int_0^u y \rho(y) dy + \frac{1}{2} \rho^2(u) \right\}; \quad (11a)$$

при этом $\rho(y) = \varphi'(\Delta y)/\Delta y \varphi(\Delta y) - 1$. В самом деле, из (10), (10a) вытекает, что $\rho(y) = \varkappa'(\lambda)/\lambda = (\varphi'/\varphi - \lambda)/\lambda$. Но $\varkappa(0) = 0$, и потому

$$\varkappa(\lambda) = \int_0^\lambda \varkappa'(y) dy = \Delta^2 \int_0^\lambda \frac{y}{\Delta} \rho\left(\frac{y}{\Delta}\right) d\left(\frac{y}{\Delta}\right) = \Delta^2 \int_0^u y \rho(y) dy.$$

З а м е ч а н и е 4. В случае конкретной с.в. ξ в качестве «естественной» области определения представления (1) напрашивается рассматривать интервал (λ_-, λ_+) , где $\lambda_- = \inf\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$. Однако для общего утверждения, каким является лемма 1, нам представляется логичным использовать для этой цели интервал $|\lambda| < \Delta$, как «максимальный» в условиях (7), (8).

Нормированные суммы

Предположим теперь, что есть некоторая совокупность независимых с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$, с конечными моментами всех порядков, причем

$$EX_l = 0, \quad 1 \leq l \leq n, \quad (14)$$

$$\exists K_n < \infty: |\alpha_k(l)| \leq k! K_n^{k-2} \sigma_l^2, \quad 1 \leq l \leq n, \quad k = 3, 4, \dots; \quad (15)$$

здесь и ниже $\alpha_k(l) = \mathbf{E} X_l^k$, $\alpha_2(l) = \sigma_l^2$, а $n \geq 1$ — произвольное, но пока фиксированное число. Введем сразу и другие обозначения, которые нам понадобятся ниже:

$$S_n = \sum_1^n X_l, \quad s_n^2 = \sum_1^n \sigma_l^2,$$

$$\Delta_n = \frac{s_n}{K_n}, \quad u = \frac{\lambda K_n}{s_n} = \frac{\lambda}{\Delta_n}, \quad v = \frac{x}{\Delta_n}, \quad z = \frac{\lambda}{s_n}, \quad w = \frac{x}{s_n},$$

$$\varphi_{ln}(\lambda) = \mathbf{E} \exp\left(\frac{\lambda X_l}{s_n}\right) = 1 + \sum_2^\infty \alpha_k(l) \frac{z^k}{k!} = 1 + b_l,$$

$$\ln \varphi_{ln}(\lambda) = \sum_2^\infty \gamma_{kl} \frac{z^k}{k!},$$

γ_{kl} — семиинвариант k -го порядка с.в. X_l , $\Gamma_{kn} = n^{-1} \sum_1^n \gamma_{kl}$, $\mathfrak{S}_{kn} = s_n^{-2} \sum_1^n \gamma_{kl}$, $\Lambda = \{\lambda: |\lambda| < \Delta_n\} = \{\lambda: |u| < 1\}$.

В рассматриваемых условиях очевидно, что производящая функция моментов $\varphi_n(\lambda) = \mathbf{E} \exp(\lambda S_n/s_n)$ аналитична в области Λ . В самом деле, в силу (14) и неравенства Йенсена $\varphi_{ln}(\lambda) \geq \exp(\lambda \mathbf{E} X_l/s_n) = 1$, а с другой стороны, $\varphi_{ln}(\lambda) = 1 + \lambda^2 \sigma_l^2 / 2s_n^2 + \sum_3^\infty \alpha_k(l) z^k / k!$. Поэтому, используя (15) и неравенство $\ln(1+x) \leq x$, $x \geq -1$, получаем, что при $\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall l$

$$0 \leq \ln \varphi_{ln}(\lambda) \leq \frac{\lambda^2 \sigma_l^2}{s_n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{|u|}{1-|u|} \right), \quad \ln \varphi_n(\lambda) \leq \lambda^2 \frac{1+|u|}{2(1-|u|)}. \quad (7a)$$

Таким образом, с.в. $\xi = S_n/s_n$ удовлетворяет условиям (2), (7), (8) леммы 1 с $\Delta = \Delta_n$ и, следовательно, представления (1), (11), (12) имеют место при всех $\lambda \in \Lambda$. Снабдим ниже все элементы этих представлений индексом n и будем записывать равенство (1) в виде

$$\mathbf{P}\{S_n > s_n x\} = (1 - \Phi(x)) Q_n \exp(L_n). \quad (1a)$$

4. Канонический ряд Крамера. В рассматриваемой ситуации оказывается, что нормированный показатель $s_n^{-2} L_n$ представляет собой некоторый ряд по степеням w^k , $k \geq 3$, величин w , а его коэффициенты сравнительно просто выражаются через семиинварианты исходных величин X_l . Таким образом, возникает представление (17), в котором ряд

$$\tau_n(w) = \mathfrak{S}_{3n} \frac{1}{3!} + (\mathfrak{S}_{4n} - 3\mathfrak{S}_{3n}^2) \frac{w}{4!} + (\mathfrak{S}_{5n} - 10\mathfrak{S}_{4n}\mathfrak{S}_{3n} + 15\mathfrak{S}_{3n}^3) \frac{w^2}{5!} + \dots \quad (16)$$

содержит уже степени w^k при всех $k \geq 0$. Этот ряд мы и предлагаем называть каноническим рядом Крамера. Ранее он рассматривался в [5].

Теорема 1. В условиях (14), (15) представление (1a) с L_n, Q_n из (11), (12) имеет место при любых x из области значений функции

$x_n(\lambda) \equiv \varphi'_n(\lambda) \varphi_n(\lambda)$, $|\lambda| < \Delta_n$. При этом в некоторой окрестности точки $w = 0$

$$L_n = x^2 w \tau_n(w), \quad (17)$$

где $\tau_n(w)$ — так называемый ряд Крамера, первые члены которого указаны в (16).

Доказательство. О том, что представление (1а) существует, мы уже знаем. Нам осталось убедиться лишь в справедливости указанного выше факта. Отметим для этого, что есть следующие эквивалентные способы записи равенства (10):

$$x = (\ln \varphi_n(\lambda))' = s_n^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_2^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-2}}{(k-1)!}. \quad (10b)$$

Откуда

$$w = z + \sum_3^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (18)$$

Но, с другой стороны, ясно, что

$$\begin{aligned} s_n^{-2} \kappa_n(\lambda) &= s_n^{-2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{kl} \frac{z^k}{k!} - \frac{z^2}{2} = \sum_3^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^k}{k!}, \\ \frac{1}{2} s_n^{-2} (\kappa'_n(\lambda))^2 &= \frac{1}{2} s_n^{-2} ((\ln \varphi_n(\lambda))' - \lambda)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_3^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \right\}^2, \\ s_n^{-2} L_n &= \sum_3^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^k}{k!} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_3^{\infty} \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \right\}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь увидеть справа в (19) ряд по степеням w^k , $k \geq 3$, нетрудно. Достаточно заметить, что единственное решение z уравнения (18) в некоторой окрестности точки $w = 0$ имеет вид

$$z = w - \mathfrak{S}_{3n} \frac{w^2}{2} - (\mathfrak{S}_{4n} - 3\mathfrak{S}_{3n}^2) \frac{w^3}{3!} + \dots \quad (20)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Теорема 1 приведена не только для того, чтобы предложить более простой вывод представления (17), чем в теореме 2 ([2, гл. VIII, § 2]). Ее формулировкой мы хотим подчеркнуть, что запись показателя L_n с помощью ряда Крамера заметно сужает область определения этого показателя. Дело здесь в том, что семиинварианты γ_{kl} определяются через моменты $\alpha_k(l)$ с помощью формального соотношения

$$\sum_2^{\infty} \gamma_{kl} \frac{z^k}{k!} = \ln(1 + b_l) = - \sum_1^{\infty} \frac{(-b_l)^k}{k}.$$

Иными словами, они заданы, если $b_l < 1$. А это бывает не всегда при всех $|u| < 1$.

В заключение сравним канонический ряд Крамера с классическим. Допустим, что вместо w и $\mathfrak{F}_{kn}$ мы хотим использовать величины $t = x/\sqrt{n}$ и Γ_{kn} . Тогда вместо уравнения (18) получим равенство $t\sqrt{\Gamma_{2n}} = \sum_2^\infty \Gamma_{kn} z^{k-1}/(k-1)!$, если обе части (18) умножим на s_n^2/n и заметим, что $s_n^2 = n\Gamma_{2n}$. Соответственно, равенства (16), (17) перейдут при этом в (см. [2, гл. 8, (2.6), (2.23), (2.27)])

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) &= \frac{\Gamma_{3n}}{6\Gamma_{2n}^{3/2}} + \frac{\Gamma_{4n}\Gamma_{2n} - 3\Gamma_{3n}^2}{24\Gamma_{2n}^3}t \\ &\quad + \frac{\Gamma_{5n}\Gamma_{2n}^2 - 10\Gamma_{4n}\Gamma_{3n}\Gamma_{2n} + 15\Gamma_{3n}^3}{120\Gamma_{2n}^{9/2}}t^2 + \dots, \\ L_n &= x^2 t \lambda_n(t),\end{aligned}$$

где $\lambda_n(t)$ и есть классический ряд Крамера–Петрова (сам В. В. Петров называет его обобщенным рядом Крамера). Ясно, что вид ряда $\tau_n(w)$ проще за счет равенства $\mathfrak{F}_{2n} = 1$. Но рекуррентные соотношения, определяющие их коэффициенты (см., например, [3, § 2.1]), фактически одинаковы.

5. О взаимоотношениях с функцией уклонений. Напомним теперь определение функции уклонений [11] и приведем некоторые соотношения, позволяющие судить о связи этой функции с используемыми в настоящей работе. Причем сделаем это прежде, чем дадим ответы на некоторые естественные вопросы. Например, почему говорить о ее взаимоотношениях с рассматриваемыми здесь функциями надо? И почему она здесь не используется — точнее говоря, не используется явно?

Пусть с.в. ξ взята из пп. 1–3. Тогда ее функция уклонений — это

$$\Lambda(x) = \sup_{\lambda} (x\lambda - \ln \varphi(\lambda)),$$

т.е. преобразование Лежандра над логарифмом ее преобразования Лапласа. Основными же функциями в настоящей работе можно считать три функции — $L = L(\lambda)$, $x = x(\lambda)$ и обратную к ней $\lambda = \lambda(x)$ — из леммы 1, а также функцию $\rho(y)$ из (10а) в замечании 3. Покажем сначала, что они связаны с $\Lambda(x)$ соотношениями

$$\begin{aligned}L(\lambda) &= \hat{L}(x(\lambda)), \quad \hat{L}(x) = \frac{x^2}{2} - \Lambda(x), \quad \lambda(x) = \Lambda'(x), \\ \Lambda(x) &= \frac{x^2}{2} - L(\lambda(x)), \quad \Lambda(x) = x\lambda(x) - \frac{\lambda(x)^2}{2} - \Delta^2 \int_0^{\lambda(x)/\Delta} y\rho(y) dy.\end{aligned}$$

В самом деле, по определению $\lambda(x)$ — решение уравнения (10). А следовательно, и точка, в которой достигается максимум функции $x\lambda - \ln \varphi(\lambda)$ по λ . Но это означает, что $\Lambda(x) = x\lambda(x) - \ln \varphi(\lambda(x))$ и потому $\Lambda'(x) = \lambda(x) + x\lambda'(x) - (\varphi'/\varphi)\lambda'(x) = \lambda(x)$. Таким образом, получаем

$\hat{L}(x) = \ln \varphi(\lambda(x)) - \frac{1}{2}\lambda^2(x) + \frac{1}{2}(x - \lambda(x))^2 = \frac{1}{2}x^2 - \Lambda(x)$, а указанная связь $\Lambda(x)$ с функцией $\rho(y)$ вытекает из замечания 3.

Перейдем к вопросам. На первый ответить легко. Известно, что при изучении больших уклонений функция $\Lambda(x)$ является стержневой, можно даже сказать, что «обращаться к ней приходится с неизбежностью» (выражение рец.). В самом деле, функцию уклонений, отвечающую одному слагаемому ξ_i в сумме $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных с.в., можно определить как (см., например, [11])

$$\Lambda(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \varepsilon \right\}.$$

Поэтому рассматриваемая в работе вероятность представляется в виде

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{n} > x \right\} = \exp \left\{ -n \inf_{y > x} \Lambda(y) + o(n) \right\}.$$

Ответ на второй вопрос тесно связан с другой основной целью работы. Дело в том, что существует (во всяком случае у автора) и некоторая неудовлетворенность от «необходимости использовать функцию уклонений». И это несмотря на то, что она представляет суть дела и, кроме того, обладает хорошими свойствами. Отметим три момента, вызывающих эту неудовлетворенность.

Во-первых, функция $\Lambda(x)$ в общем случае задается с помощью $\sup$, а не определяется явно, как функция L в (11). Во-вторых, при попытке записать ее в виде абсолютно сходящегося ряда по степеням x мы фактически получаем ряд Крамера (см. теорему 1 и классический ряд Крамера в п. 4, учитывая связь функций $\hat{L}(x)$ и $\Lambda(x)$), т.е. оптимальную запись его коэффициентов с помощью семиинвариантов. Автору же хотелось бы по определенным причинам, отмеченным ниже, уйти от вполне обоснованного, но «засилья семиинвариантов» (см. [2], [3], [14]) в проблеме больших уклонений и получать также альтернативные представления с оптимальной записью коэффициентов с помощью моментов. Например, как в теореме 2 (п. 7 далее). Именно поэтому в работе предлагается «изучать функцию уклонений» через посредство двух функций $L(\lambda)$ и $\lambda(x)$, определяющих ее: $\Lambda(x) = x^2/2 - L(\lambda(x))$. Наконец, в-третьих, представляется, что настоящая работа все-таки ориентирована больше на неасимптотический случай, где роль функции уклонений меньше и потому «есть право» предлагать другие варианты, особенно в ситуации разнораспределенных с.в.

Что же касается семиинвариантов, то у них помимо известного «приятного» свойства аддитивности по отношению к суммированию независимых с.в. есть и другие стороны, объясняющие отрицательное к ним отношение. Например: использование семиинвариантов может сократить область определения имеющегося выражения (об этом говорится в замечании 5), при формулировке конкретных условий все-таки

более естественно использовать моменты, а не семиинварианты (как, например, в [14]).

В заключение подчеркнем еще один момент во взаимоотношениях функции уклонений с предлагаемым подходом. Можно подумать, что форма (1) выражения для $p = P\{\xi > x\}$ как бы изначально накладывает ограничения на класс «возможных ситуаций». То есть, скажем, что вне рассмотрения остается случай асимптотического соотношения

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n \xi_k > x\sqrt{n}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda(x)}\sigma(x)} \exp\{-n\Lambda(x)\},$$

в котором ξ_k — независимые одинаково распределенные с.в., имеющие распределение с.в. ξ из пп. 1–3; здесь $\sigma^2(x) = 1/\lambda'(x)$. Покажем, что это не так и указанное соотношение легко вытекает из (1).

В самом деле, из (1) при $x \rightarrow \infty$ следует, что

$$p \sim \frac{Q}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \hat{L}(x)\right\} \sim \frac{1}{\lambda\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\Lambda(x)\},$$

поскольку $1 - \Phi(x) \sim (x\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}$, $Q \sim x/(\lambda\sigma)$ (если еще и $\alpha x \rightarrow 0$, где α из леммы 1). Поэтому, если в (1) перейти от величин ξ, x к $\bar{\xi} = (\sqrt{n})^{-1} \sum_1^n \xi_k$, $\bar{x} = x\sqrt{n}$, то легко показать, что $\bar{\lambda} = \lambda\sqrt{n}$, $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \sigma(x)$, $\bar{L}(\bar{x}) - \bar{x}^2/2 = n(\hat{L}(x) - x^2/2)$, $\bar{\Lambda}(\bar{x}) = n\Lambda(x)$. Что и требовалось. Ну а $\sigma^2 = D\zeta = (\ln \varphi(\lambda))'' = x'(\lambda) = 1/\lambda'(x)$.

6. Некоторые уточнения. Предположим далее, что помимо основных условий (14), (15) выполняется и неравенство (с той же постоянной K_n)

$$\sup_{l \leq n} \sigma_l^2 \leq K_n^2. \quad (21)$$

Тогда у ряда Крамера, по-видимому, появляется «достойный соперник». Во всяком случае, оказывается, что показатель L_n в половине своей области определения

- представим в виде некоторого абсолютно сходящегося ряда, и
- для его коэффициентов не только существует точная формула, но и «хорошая» оценка сверху.

Точнее говоря, имеет место

Следствие 1. При выполнении условий (14), (15), (21)

$$L_n = \lambda^2 \sum_3^\infty c_k (2u)^{k-2}, \quad |u| < \frac{1}{2}, \quad (22)$$

где (как и обычно, мы полагаем $\sum_1^0 = 0$)

$$c_k = a^{2-k} \left\{ \frac{\mathfrak{F}_{kn}}{k!} + \sum_{i=1}^{k-3} \frac{\mathfrak{F}_{(i+2)n} \mathfrak{F}_{(k-i+1)n}}{(i+1)!(k-i-1)!} \right\}, \quad k \geq 3, \quad a = 2K_n.$$

При этом $|c_k| \leq \beta_k \equiv (k^3 + 6k^2 - 25k + 6)/12$, $k \geq 3$; иными словами, ряд в (22) абсолютно сходится в указанной области.

Доказательство. Из (19) вытекает, что

$$\begin{aligned} L_n &= \lambda^2 \left\{ \sum_3^\infty \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-2}}{k!} + \frac{1}{2} \left[\sum_3^\infty \mathfrak{S}_{kn} \frac{z^{k-2}}{(k-1)!} \right]^2 \right\} \\ &= \lambda^2 \left\{ \frac{\mathfrak{S}_{3n} z}{3!} + \sum_4^\infty z^{k-2} \left[\frac{\mathfrak{S}_{kn}}{k!} + \frac{1}{2} \sum_1^{k-3} \frac{\mathfrak{S}_{(i+2)n}}{(i+1)!} \frac{\mathfrak{S}_{(k-i)n}}{(k-i-1)!} \right] \right\} \\ &= \lambda^2 \sum_3^\infty c_k (2u)^{k-2}, \end{aligned}$$

если учесть, что $2K_n z = 2u$. Итак, представление (22) и формула для его коэффициентов установлены.

С другой стороны, по теореме 3.1 [3] в условиях (14), (15), (21) имеем $\Gamma_k(S_n/s_n) \leq k!(2/\Delta_n)^{k-2}$, где $\Gamma_k(\xi)$ — семиинвариант k -го порядка с.в. ξ . Но $\Gamma_k(S_n/s_n) = s_n^{-k} \sum_1^n \gamma_{kl} = s_n^{2-k} \mathfrak{S}_{kn}$. Поэтому

$$\frac{|\mathfrak{S}_{kn}|}{k!} \leq a^{k-2}, \quad k \geq 3. \quad (23)$$

Таким образом, $|c_k| \leq 1 + \frac{1}{2} \sum_1^{k-3} (i+2)(k-i)$. Остается учесть, что $\sum_1^{k-3} (i+2)(k-i) = \sum_1^{k+1} i(k-i+2) - 2(3k+1)$ и воспользоваться формулой $\sum_1^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Следствие доказано.

Поскольку $u = K_n z$, то сходимость ряда в (22) при $|u| < \frac{1}{2}$ эквивалентна сходимости ряда в (19) при $|z| < \frac{1}{2} K_n$. Но рассматривать сходимость в такой области «неудобно» по крайней мере по двум причинам. Во-первых, полезно иметь возможность сразу сопоставить найденную область с областью естественного задания самой функции L_n . Во-вторых, если $n \rightarrow \infty$, то при $K_n \rightarrow \infty$ указанная выше область вырождается. Однако еще более «неподходящим» для определения области сходимости представляется параметр ряда Крамера $w = (x/\lambda K_n) u$. Возможно именно это и не позволяло до сих пор говорить о точной области сходимости этого ряда.

Выше мы показали, что параметр u в каком-то смысле все же предпочтительнее параметра w (следствие 1). Дадим теперь и конкретный пример того, насколько с параметром w «неудобно работать».

Следствие 2. При выполнении условий (14), (15), (21) область абсолютной сходимости ряда (20) включает в себя интервал (если $x < \lambda K_n$) $0 < w < u_0 x / \lambda K_n$, где $u_0 = 5 - \sqrt{13}/12 \approx 0,117$.

Доказательство. Воспользуемся методом мажорантных рядов (см. [6, п. 450]). В соответствии с ним, если мы хотим оценить область сходимости ряда $z = w + \sum_2^\infty a_k w^k$, являющегося решением уравнения $z = w + \sum_2^\infty b_k z^k$, то достаточно подобрать такое вспомогательное уравнение $z = w + \sum_2^\infty \beta_k z^k$, чтобы $|b_k| \leq \beta_k$, $k \geq 2$, а ряд

$z = w + \sum_2^\infty \alpha_k w^k$, являющийся его решением, имел бы положительный радиус сходимости. В этом случае оказывается, что $|a_k| \leq \alpha_k$, а следовательно, радиус сходимости искомого ряда не меньше радиуса для вспомогательного.

Поскольку у нас $b_k = -\Im_{(k+1)n}/k!$, можно положить $\beta_k = (k+1)(2K_n)^{k-1}$. И пусть нас интересуют лишь $w > 0$. Тогда в силу (23) имеем $|b_k| \leq \beta_k$. Но $\sum_2^\infty \beta_k z^k = z \sum_2^\infty (k+1)(2u)^{k-1} = 2zu(3-4u)(1-2u)^{-2}$. Таким образом, формальную сумму ряда-решения $z = w + \sum_2^\infty \alpha_k w^k \equiv f(w)$ можно получить из равенства $z = w + 2zu(3-4u)(1-2u)^{-2}$: $f(w) = z = w(1-2u)^2(1-10u+12u^2)^{-1}$. Ясно, что эта сумма имеет смысл (т.е. разлагается в абсолютно сходящийся ряд) при $u < u_0$, где u_0 — минимальное положительное решение уравнения $1-10u+12u^2=0$. Остается заметить, что $u = (\lambda/x) K_n w$.

7. Предлагаемый подход. Откажемся теперь от использования семиинвариантов не только в условиях, но и при записи всех выражений. Как мы увидим ниже, это позволит не только не «урезать» естественную область Λ определения величин L_n, Q_n , но и предложить для них формулы, приспособленные для вычислений, по-видимому, не хуже прежних. Введем для этого еще несколько обозначений:

$$b_{kl} = \frac{\alpha_k(l)}{K_n^k k!}, \quad l_{kn} = \Delta_n^{-2} \sum_1^n b_{kl}, \quad k \geq 2;$$

$$\beta = \mathbf{E} \sum_1^n |Y_l - m_l|^3, \quad m_l = \mathbf{E} Y_l,$$

Y_l — преобразование Крамера с.в. X_l/s_n , т.е.

$$d\mathbf{P}\{Y_l < y\} = \frac{e^{\lambda y}}{\varphi_{ln}(\lambda)} d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}, \quad \varphi_{ln}(\lambda) = 1 + b_l,$$

$$b_l = \sum_2^\infty \alpha_k(l) \frac{z^k}{k!} = \sum_2^\infty b_{kl} u^k, \quad b(u) = \sum_1^n b_l \frac{m_l}{m},$$

$$m = \sum_1^n m_l = x, \quad l(y) = y - \ln(1+y), \quad y > -1.$$

Причем будем считать, что с.в. Y_l не только имеют указанное распределение, но и независимы в совокупности (это возможно!).

Для упрощения формулировок, но без снижения общности, ниже предлагается также считать, что $x > 0$ и, следовательно (в соответствии с леммой 1), $\lambda > 0$. Таким образом, нас будет интересовать не весь интервал Λ , а правая его половина $0 < u < 1$. Кроме того, предлагается «понимать» этот интервал двояко, в зависимости от ситуации: как множество на оси λ или как интервал на оси u .

Теорема 2. Если выполнены условия (14), (15), то при всех $0 < \lambda < \Delta_n$, а следовательно, при всех $0 < u < 1$ и соответствующих им

$$x = \lambda(1 + \rho(u)) \quad (24)$$

справедливо представление (1а) с

$$L_n = \lambda^2 \left\{ u^{-2} \int_0^u y \rho(y) dy + \frac{1}{2} \rho^2(u) \right\}, \quad (25)$$

$$Q_n = c(u) J_n + \frac{4\theta x \beta}{J(x) \sigma_n^3(u)}, \quad (26)$$

$$\rho(u) = \left\{ \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-2} - b(u) \right\} (1 + b(u))^{-1}, \quad (27)$$

$$l_{2n} = \frac{1}{2}, \quad |l_{kn}| \leq 1, \quad k \geq 3; \quad b_l \geq 0, \quad m_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq n; \quad (28)$$

здесь $c(u) = (1 + \rho(u))/\sigma_n(u)$, $\sigma_n^2(u) \equiv \mathbf{D} \zeta_n = 1 + \rho(u) + u \rho'_u(u)$, $J_n = J(\lambda \sigma_n(u))/J(x)$, функция J и величина θ определены в п. 2, а $b(u)$ и β — в начале п. 7.

Доказательство. В силу замечания 3 равенство (11) переходит в (25). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \kappa_n(\lambda) &= \sum_1^n (\varphi_{ln}(\lambda) - 1) - \frac{\lambda^2}{2} - \sum_1^n (\varphi_{ln}(\lambda) - 1 - \ln \varphi_{ln}(\lambda)) \\ &= \Delta_n^2 \sum_3^\infty l_{kn} u^k - \sum_1^n l(b_l), \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \kappa'_n(\lambda) &= \Delta_n \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-1} - \sum_1^n \frac{b_l b'_l}{1 + b_l} = \lambda \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-2} - \sum_1^n b_l m_l \\ &= \lambda \left\{ \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-2} - \frac{x}{\lambda} \sum_1^n b_l \frac{m_l}{m} \right\}, \end{aligned}$$

поскольку $m_l = b'_l/(1 + b_l)$. Таким образом, возникает уравнение $\rho(u) = \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-2} - [1 + \rho(u)] b(u)$, приводящее к выражению (27).

Далее, первые слагаемые в (12), (26), очевидно, совпадают, а вторые отличаются лишь тем, что α_n из (12) мы заменили с помощью неравенства $|\alpha_n| \leq A M_n$ ([2, гл. V, § 2]), где $M_n = \beta \sigma_n^{-3}(u)$, используя неравенства $A \leq 0,7915$ [7] и $2A\sqrt{2\pi} < 4$. Наконец, ясно, что $\sigma_n^2(u) = 1 + \kappa''_n(\lambda) = 1 + (\lambda \rho(u))' = 1 + \rho(u) + u \rho'_u(u)$. Поэтому нам осталось лишь убедиться в справедливости свойств (28) и показать, что выражение (27) действительно существует при всех $u < 1$. Но последнее как раз и вытекает из свойств (28), поскольку благодаря им $b(u) \geq 0$. Что же касается самих свойств, то первые из них прямо следуют из определения, неотрицательность величин b_l установлена выше (перед п. 4), а $m_l \geq 0$

в силу (14), поскольку при $\lambda > 0$ из равенства $\int y d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\} = 0$, очевидно, вытекает, что $\int y e^{\lambda y} d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\} \geq 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6. Функция $l(y) = y - \ln(1 + y)$, используемая при доказательстве теоремы 2, всюду в области определения $y > -1$ выпукла вниз и аналитична. Напоминает функцию уклонений $\Lambda(x)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \ln(1 + y) &= \ln\left(\frac{1 + y_0 + y - y_0}{1 + y_0}\right)(1 + y_0) \\ &= \ln(1 + y_0) + \ln(1 + \bar{y}), \quad \bar{y} = \frac{y - y_0}{1 + y_0}, \quad y_0 > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $l(y) = l(y_0) + y_0 \bar{y} + l(\bar{y})$. С другой стороны ясно, что $l(y) = \sum_2^\infty (-y)^k/k$, т.е. она абсолютно сходится в интервале $|y| < 1$.

Высказанное соображение означает, что функцию $\kappa_n(\lambda) = \lambda^2(\sum_3^\infty l_{kn} u^{k-2} - \lambda^{-2} \sum_1^n l(b_l))$ можно попытаться представить в виде абсолютно сходящегося ряда и независимо (от теоремы 2, выбирая переменную этого ряда каким-нибудь «подходящим» образом). А вместе с ней и показатель L . Но это направление выходит за рамки настоящей работы.

Представление (27) в конкретной ситуации может быть хорошим в том смысле, что приводит к разложению $\rho(u)$ в некоторый абсолютно сходящийся ряд. Причем с коэффициентами, определяемыми по точной (а не рекуррентной) и простой формуле. Но, с другой стороны, можно считать, что «стоимость» представления (27) несколько падает из-за функции $b(u)$. Хотя величина эта, вообще говоря, «очень мала», поскольку представляет собой «средневзвешенное» величин $b_l = O(u^2)$, $u \rightarrow 0$. И, кроме того, в большей части Λ она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд, ничуть не более сложный, чем ряд Крамера. Причем ряд этот сходится в значительно большей области, а рекуррентные формулы для определения его коэффициентов также получаются без труда.

Следствие 3. В условиях (14), (15), (21) функция $b(u)$ представляема в виде ряда, абсолютно сходящегося в интервале

$$u < u_0 = \frac{(\sqrt{1350} + 35)^{1/3} - (\sqrt{1350} - 35)^{1/3} - 1}{3} = 0,6507.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что $b_l \leq u^2(1 + u)/2(1 - u) \equiv \beta(u)$, $\forall l$. Следовательно, представление $(1 + b_l)^{-1} = \sum_0^\infty (-b_l)^k$ можно считать рядом относительно u^k , абсолютно сходящимся при всех u , для которых $\beta(u) < 1$, т.е. при $u < u_0$ (единственный действительный корень уравнения $\beta(u) = 1$). Остается заметить, что каждое из n слагаемых $b_l t_l$ функции $tb(u)$ является произведением трех рядов: вышеуказанного ряда и рядов для b_l и b'_l , абсолютно сходящихся при $u < 1$.

8. Асимптотическое соотношение для Q_n . Предположим теперь, что существует последовательность $\{X_l\}_{l \geq 1}$, для которой условия (14), (15), (21) выполняются при всех $n \geq 1$. Договоримся обозначать выполнение этих условий в новой форме штрихом (например, (15')) и предположим, что

$$1. \Delta_n \rightarrow \infty, \quad 2. x = o(\Delta_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

В этом случае ясно, что $v \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, $\lambda \sim x$, и, следовательно, можно говорить вместо x , v о λ , u и наоборот. По этой же причине первое слагаемое в (26) расшифровывается просто, и потому как первая естественно возникает проблема: каковы условия, обеспечивающие максимальную скорость убывания величин α_n или $\beta \sigma_n^{-3}(u)$, которой (по порядку) является величина Δ_n^{-1} ? Как показывает нижеследующее утверждение, эту скорость обеспечивает первое из дополнительных условий

$$a \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \frac{\mathbf{E}|X_l|^3}{K_n s_n^2} < \infty, \quad (30)$$

$$\sup_{1 \leq l \leq n} m_l = o(\Delta_n^{-1}). \quad (31)$$

Следствие 4. Если выполняются условия (14'), (15'), (21'), (29), (30), то при всех достаточно больших n имеет место представление (1a), в котором

$$Q_n = \left(1 - \delta_1[x^2 + 1 + O(v^2)]^{-1} + \delta_2 x^{-2}\right) (1 + O(v^2)) + 4\theta av(1 + \delta x^{-2})(1 + O(v)). \quad (32)$$

Здесь $x > 0$ может быть фиксированным числом или изменяться вместе с n любым допустимым образом, постоянные O -больших не зависят от x , и их несложно определить.

Доказательство. Указанный в (32) вид первого слагаемого в (26) объясняется тем, что: 1) $1 + x^{-2} \geq J_n \geq 1 - (1 + \lambda^2 \sigma_n^2)^{-1} = 1 - {}^2(u)(x^2 + c^2(u))^{-1}$ в силу неравенств п. 2 и того, что $x^2 = \lambda^2 \sigma_n^2 c^2(u)$; 2) из выражений для c^2, σ_n^2, ρ теоремы 2 вытекает, что $c^2(u) = 1 + O(u^2)$, и потому $c(u) = 1 + O(u^2)$ при $u \rightarrow 0$. Что же касается второго слагаемого из (26), то его элемент $1/J(x) = 1 + \delta x^{-2}$, а $\sigma_n^{-3}(u) = 1 + O(u)$, поскольку $\rho(u) = O(u)$. Таким образом, нам осталось показать, что $\beta = \{\delta a(1 + o(1)) + O(u)\} \Delta_n^{-1}$ при больших n , и учесть, что постоянная 4 в (26) не является точной (из-за этого множитель $1 + o(1)$ при можно опустить).

Разобьем произвольное слагаемое суммы β на три части следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|Y_l - m_l|^3 &= \int |y - m_l|^3 d\mathbf{P}\{Y_l < y\} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} -2 \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^m \right) \right] (y - m_l)^3 \frac{e^{\lambda y}}{\varphi} d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}, \quad (33) \end{aligned}$$

и запишем первые два интеграла из правой части (33), соответственно, в виде

$$\frac{\varphi''' - 3m\varphi'' + 3m^2\varphi' - m^3\varphi}{\varphi}, \quad (34)$$

$$\int_{-\infty}^0 [y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3] \frac{e^{\lambda y}}{\varphi} dP\{X_l < s_n y\},$$

полагая временно, что $\varphi_{ln}(\lambda) = \varphi$, $m_l = m$. Оценим сначала их первые слагаемые.

Поскольку $\varphi = 1 + \lambda^2 \sigma_l^2 / 2s_n^2 + \sum_3^\infty \lambda^k \alpha_k(l) / k! s_n^k$, то

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\lambda \sigma_l^2}{s_n^2} \left(1 + \theta_1 \sum_3^\infty k u^{k-2} \right), \\ \varphi'' &= \frac{\sigma_l^2}{s_n^2} \left(1 + \theta_2 \sum_3^\infty k(k-1) u^{k-2} \right), \\ \varphi''' &= s_n^{-3} \left[\alpha_3(l) + \theta_3 K_n \sigma_l^2 \sum_4^\infty k(k-1)(k-2) u^{k-3} \right] \\ &= s_n^{-3} [\alpha_3(l) + K_n \sigma_l^2 O(u)] \end{aligned} \quad (35)$$

и, следовательно,

$$\varphi = 1 + O(u^2), \quad \varphi' = \frac{\lambda \sigma_l^2}{s_n^2} (1 + O(u)), \quad \varphi'' = \frac{\sigma_l^2}{s_n^2} (1 + O(u)),$$

причем O -большие не зависят от l . В частности, это означает: можно считать, что $\varphi = 1$. Далее, поскольку $e^x \geq 1 + x$, то $0 \geq e^{\lambda y} - 1 \geq \lambda y$ при $\lambda \geq 0$, $y \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} -2 \int_{-\infty}^0 y^3 e^{\lambda y} dP\{X_l < s_n y\} &= -2 \left[\int_{-\infty}^0 y^3 + \delta \int_{-\infty}^0 \lambda y^4 \right] dP\{X_l < s_n y\} \\ &= \frac{2}{s_n^3} [\mathbf{E}(X_l^-)^3 - \delta 4! u K_n \sigma_l^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_l(m) &\equiv \varphi^{(m)} - 2 \int_{-\infty}^0 y^m e^{\lambda y} dP\{X_l < s_n y\} \\ &= s_n^{-3} [\mathbf{E}|X_l|^3 + K_n \sigma_l^2 O(u)] \quad \text{при } m = 3, \\ \beta_1 &= \sum_1^n d_l(3) = \left\{ \delta a(1 + o(1)) + O(u) \right\} \Delta_n^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, на этот раз нам осталось показать, что сумма $\beta_2 = \beta - \beta_1$ не рассмотренных слагаемых из (33), (34) имеет вид $\{o(1) + O(u)\} \Delta_n^{-1}$. Напоминаем, что мы считаем $\varphi = 1$.

Но в этом нетрудно убедиться, используя условие (31), очевидно, вытекающее из (35) и условий (21'), (29.2). В самом деле, с одной стороны, ясно, что

$$\beta_2 = \sum_1^n \{ -3m_l d_l(2) + 3m_l^2 d_l(1) - m_l^3 + 2\delta_l m_l^3 \}.$$

С другой, поступая по аналогии, можно получить, что

$$d_l(2) = s_n^{-2} \left\{ \left[\mathbf{E}(X_l^+)^2 - \mathbf{E}(X_l^-)^2 \right] + \sigma_l^2 O(u) + 2\delta u \frac{\mathbf{E}(X_l^-)^3}{K_n} \right\},$$

$$d_l(1) = \lambda \sigma_l^2 s_n^{-2} (1 + O(u)) + 2s_n^{-1} \mathbf{E}X_l^- - 2s_n^{-2} \lambda \delta \mathbf{E}(X_l^-)^2.$$

Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 7. Правую часть условий (30), (31) можно было бы записать одинаково

$$s_n^{-3} \sum_1^n \mathbf{E}|X_l|^3 = O(\Delta_n^{-1}), \quad \sup_{1 \leq l \leq n} m_l = O(\Delta_n^{-1}),$$

если бы не одно «но». В самом деле, первое равенство здесь, очевидно, эквивалентно (30). С другой стороны, из проведенного доказательства ясно, что условие (31) можно было бы ослабить, заменив в нем o -малое на O -большое, если бы не первое из трех слагаемых в представлении для $d_l(2)$. Но об этом же можно сказать и по-другому: o -малое в (31) можно заменить на O -большое, если добавить условие $\sup_{1 \leq l \leq n} m_l [\mathbf{E}(X_l^+)^2 - \mathbf{E}(X_l^-)^2] \sigma_l^{-2} = o(\Delta_n^{-1})$. В частности, это означает, что O -большое в (31) можно оставить для неодинаково распределенных, но симметричных слагаемых или «асимптотически симметричных определенным образом».

9. Одинаково распределенные слагаемые. Три примера.

Попробуем теперь проиллюстрировать на конкретных примерах, насколько удачно в действительности исполняет свою роль предлагаемая основная функция $\rho(u)$. Точнее говоря, нас будет прежде всего интересовать представление для $\rho(u)$ в виде сходящегося ряда, радиус его сходимости и соответствующие выражения для L_n и функции $\sigma_n^2(u)$, вместе с $\rho(u)$ определяющей вид коэффициента Q_n . Но, конечно, в каждом из примеров будет 1) выявлена область существования (на осях λ, u) указанных выше функций, а следовательно, и представления (1а), а также 2) приведена функция $x(\lambda)$ из (10), позволяющая определить диапазон значений параметра x , для которых это представление имеет место.

Поскольку все три примера — а это будет равномерное, показательное и бернуллиевское распределение у с.в. X_l — относятся к случаю одинаково распределенных слагаемых X_l , то естественно использовать упрощенные обозначения

$$\varphi_{ln}(\lambda) = \varphi, \quad \varphi_n(\lambda) = \varphi^n, \quad b = b(u) \equiv b_l = \varphi - 1,$$

$$\mathbf{E}\zeta_n = x = n(\ln \varphi)', \quad \mathbf{D}\zeta_n = n(\ln \varphi)''.$$

1. $X_l = R(-a, a)$; $a > 0$ — произвольное фиксированное число.

В случае независимых и одинаково равномерно распределенных с.в. X_l

$$\rho(u) = 3 \sum_2^{\infty} \varphi_m(-3u^2)^{m-1}, \quad |u| < \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad (27.1)$$

$$\sigma_n^2(u) = 1 + 3 \sum_2^{\infty} (2m-1) \varphi_m(-3u^2)^{m-1} = 3 \sum_1^{\infty} (2m-1) \varphi_m(-3u^2)^{m-1},$$

$$L_n = \frac{\lambda^2}{2} \sum_1^{\infty} l_m(-3u^2)^m, \quad (25.1)$$

где

$$l_m = \frac{3\varphi_{m+1}}{m+1} + 9 \sum_1^{m-1} \varphi_{l+1} \varphi_{m-l+1}, \quad \varphi_m = \frac{2}{\pi^{2m}} \sum_1^{\infty} l^{-2m}, \quad m \geq 1, \quad u = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$$

(отметим также, что $\varphi_1 = \frac{1}{3}$, $\varphi_2 = \frac{1}{45}$, $\varphi_3 = \frac{2}{945}$). Сама же функция $\rho(u)$ определена при всех u и задается равенством (36) ниже при $u \neq 0$. Кроме того,

$$x(\lambda) = \sqrt{3n} h(u\sqrt{3}), \quad h(u) = \operatorname{ch} u - \frac{1}{u}, \quad (10.1)$$

причем $h'_u(u) = (\operatorname{sh}^2 u - x^2)/(x^2 \operatorname{sh}^2 u) > 0$, $\forall u$, $h(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = 1$ и, следовательно, интервал допустимых значений параметра x — это интервал $(0, \sqrt{3n})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$\alpha_{2m}(l) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a y^{2m} dy = \frac{a^{2m}}{2m+1}, \quad \alpha_{2m-1}(l) \equiv 0, \quad m \geq 1,$$

т.е. $\sigma_l^2 = a^2/3$, $s_n^2 = na^2/3$, $z = \lambda\sqrt{3}/(a\sqrt{n})$. Ясно также, что можно положить $K_n^2 = \sup_{l \leq n} \sigma_l^2 = a^2/3$ (условие (15) выполняется, поскольку сводится к равенству $3^m \leq (2m+1)!$). Таким образом, $\Delta_n^2 = n$, $u = \lambda/\sqrt{n}$, $b_{(2m)l} = l_{(2m)n} = 3^m/(2m+1)!$,

$$\varphi = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{zy} dy = \frac{\operatorname{sh} \bar{u}}{\bar{u}}, \quad \bar{u} = u\sqrt{3} = az, \quad b = \frac{\operatorname{sh} \bar{u}}{\bar{u}} - 1 = \sum_2^{\infty} \frac{(3u^2)^{m-1}}{(2m-1)!}.$$

а) $\rho(u)$; ясно, что

$$1 + \rho(u) = \frac{(A+1)\bar{u}}{\operatorname{sh} \bar{u}}, \quad A \equiv \sum_3^{\infty} l_{kn} k u^{k-2} = 3 \sum_2^{\infty} \frac{2m}{(2m+1)!} (3u^2)^{m-1}.$$

Но $\sum_1^{\infty} t^{2m+1}/(2m+1)(2m-1)! = \int_0^t y \operatorname{sh} y dy = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$, и потому $A+1 = 3 \sum_1^{\infty} \bar{u}^{2m-2}/(2m+1)(2m-1)! = 3(\bar{u} \operatorname{ch} \bar{u} - \operatorname{sh} \bar{u})/\bar{u}^3$. Итак,

$$1 + \rho(u) = \frac{3}{\bar{u}} \left(\operatorname{cth} \bar{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right). \quad (36)$$

С другой стороны, известно, что (см. [8, с. 444]; здесь z — комплексное число) $\operatorname{ctg} z - z^{-1} = -\sum_1^{\infty} \varphi_m z^{2m-1} \equiv C(z)$. Но $\operatorname{cth} t - t^{-1} = C(-it)/i$, и потому $1 + \rho(u) = 3 \sum_1^{\infty} \varphi_m (-3u^2)^{m-1}$.

б) $\sigma_n^2(u)$; поскольку $u\rho'_u(u) = 3 \sum_2^\infty 2(m-1) \varphi_m(-3u^2)^{m-1}$, то $\sigma_n^2(u) \equiv 1 + \rho(u) + u\rho'_u(u) = 1 + 3 \sum_2^\infty (2m-1) \varphi_m(-3u^2)^{m-1}$.

в) L_n ; легко видеть, что $u^{-2} \int_0^u y \rho(y) dy = 3 \sum_2^\infty \varphi_m(-3u^2)^{m-1}/2m$, а $r_k = \sum_1^{k-1} \varphi_{l+1} \varphi_{k-l+1}$, если положить $\rho^2(u) = 9 \sum_2^\infty r_k(-3u^2)^k$. Поэтому искомое выражение вытекает из (25).

г) $x(\lambda)$; в силу (10) имеем $x = n\varphi'/\varphi = \sqrt{3n}\varphi'_u/\varphi = \sqrt{3n}(\operatorname{ch} \bar{u} - 1/\bar{u})$, что позволяет получить не только (10.1), но и (36) другим способом.

Отметим также, что, как следует из (36), функцию $\rho(u)$ можно считать определенной при всех u , если положить $\rho(0) = 0$. Областью же абсолютной сходимости рассматриваемых рядов является, очевидно, интервал $|u| < \pi/\sqrt{3}$.

2. $dP\{X_l < t\} = e^{-(t+1)} dt$, $t \geq -1$.

В случае этого частного варианта показательного распределения [9]

$$1 + \rho(u) = \frac{b'_u}{(1+b)u} = \sum_3^\infty e_k(-1) k u^{k-2} \left(\sum_0^\infty e_k(-1) u^k \right)^{-1},$$

$$L_n = \frac{\lambda^2}{2} \{ 2u^{-2} \ln(1+b) - [1 - \rho^2(u)] \},$$

где $b = \sum_2^\infty e_k(-1) u^k$, $e_k(y) = \sum_0^k y^l/l!$, $k \geq 0$. Кроме того,

$$x(\lambda) = \sqrt{n} h(u), \quad h(u) = \sum_2^\infty e_k(-1) k u^{k-1} \left(\sum_0^\infty e_k(-1) u^k \right)^{-1},$$

причем $h'_u(u) > 0$, $h(0) = 0$, $\lim_{u \uparrow 1} h(u) = \infty$ и потому допустимыми являются все $x > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\alpha_k(l) = k! e_k(-1)$, поскольку $\int_0^\infty y^k e^{-y} dy = k!$, и, следовательно,

$$\alpha_k(l) = \int_{-1}^\infty y^k e^{-(y+1)} dy = \int_0^\infty (y-1)^k e^{-y} dy = \sum_0^k C_k^l l! (-1)^{k-l}$$

$$= k! \sum_0^k \frac{(-1)^l}{l!}.$$

Выбор $K_n = 1$, очевидно, опять возможен, и потому имеем $\Delta_n^2 = n$, $u = \lambda/\sqrt{n}$,

$$b_{kl} = l_{kn} = e_k(-1), \quad b_l = b(u) = \sum_2^\infty e_k(-1) u^k,$$

$$A \equiv \sum_3^\infty l_{kn} k u^{k-2} = \sum_3^\infty e_k(-1) k u^{k-2} = \frac{b'}{u} - 1.$$

Остается заметить, что $1 + \rho(u) = (A+1)/(1+b)$, а $x = \lambda(1 + \rho(u))$.

3. $P\{X_l = 1\} = P\{X_l = -1\} = \frac{1}{2}$; в этом случае

$$x(\lambda) = \lambda u^{-1} \operatorname{th} u, \quad \rho(u) = u^{-1} \operatorname{th} u - 1,$$

$$L_n = n \left\{ \ln(\operatorname{ch} u) - \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 u + u \operatorname{th} u \right\} = \lambda^2 \left\{ \frac{\ln(\operatorname{ch} u)}{u^2} - \frac{\operatorname{th}^2 u}{2u^2} + \frac{\operatorname{th} u}{u} \right\},$$

$$\sigma_n^2(u) = 1 - \operatorname{th}^2 u;$$

указанные функции определены при всех λ , u , представляющие их известные ряды абсолютно сходятся при $|u| \leq \pi/2$, а допустимыми являются значения $x < \sqrt{n}$.

Доказательство. Ясно, что (штрих означает производную по λ) $\alpha_{2m}(l) = 1$, $m \geq 1$; $\varphi = \operatorname{ch} z$, $E\zeta_n = x = n(\ln \varphi)' = \frac{n}{s_n} \operatorname{th} z$. Полагая далее $K_n = 1$, получаем $z = u$, $\Delta_n^2 = n = s_n^2$. Таким образом, величины λ , x связаны равенством $\operatorname{th} u = v$. Поэтому $1 + \rho(u) = u^{-1} \operatorname{th} u$, и, следовательно, $x(\lambda) = \Delta_n \operatorname{th} u$. Для нахождения же показателя L_n воспользуемся формулой (11) и равенствами $\kappa_n(\lambda) = n \ln(\operatorname{ch} u) - \lambda^2/2$, $\kappa_n(\lambda)' = \Delta_n \operatorname{th} u - \lambda$.

10. Заключение. Отметим еще ряд моментов, служивших стимулом при написании данной работы. Во-первых, как ни удивительно, но похоже на то, что за прошедшие 60 лет так и не появилось достаточно простого и понятного текста в монографиях, позволяющего неспециалисту быстро «войти» в тематику больших уклонений типа (1). Во всяком случае его нет в монографиях [2], [3] на русском языке. Именно поэтому автор счел возможным заметно упростить уровень изложения (особенно первых трех пунктов) по сравнению с принятым в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Во-вторых, представляется, что развиваемая в настоящее время асимптотическая теория больших уклонений (см., например, [10]–[12]) исключительно эффективна и красива с математической точки зрения, но оставляет вопрос точности допредельных выражений в стороне. В том смысле, что основные усилия все-таки направлены на исследование асимптотических вопросов. Предлагаемый подход как раз и представляет собой попытку несколько расширить возможности получения (и особенно использования) представлений типа (1) при конечных n .

Наконец, в-третьих, здесь (как и ранее в [13]) высказывается сомнение в том, что «без семиинвариантов нельзя жить». А именно они фактически «заполонили» единственные монографии [2], [3] по большим уклонениям на русском языке и успешно продолжают использоваться в последнее время (см., например, [14]). В связи с этим предлагается альтернативный подход, позволяющий в результате записывать «основную часть» абсолютно сходящихся рядов для имеющихся выражений с помощью моментов. Чего мы этим добиваемся? Вообще говоря, расширяется область определения соответствующих рядов. Но, с другой стороны, просто возникает другой вариант записи. И если он лучше имеющихся хотя бы иногда, то эта запись оправдана (сейчас представляется, что он

чаще «не хуже»). Ну а как же с платой за переход от естественного параметра x к λ ? Возможно, она и есть. Используя предлагаемый подход, мы будем обязаны вместо одной величины, например, $L_n(x)$, рассчитывать две, $L_n(\lambda)$ и $x(\lambda)$. Однако мощности современных компьютеров таковы, что никак не позволяют считать эту плату большой, даже если последняя пара и окажется «сложнее» одного числа $L_n(x)$.

В заключение хотелось бы поблагодарить рецензента за внимание к работе. Оно позволило автору самому лучше понять цели работы и заметно улучшить изложение некоторых ее частей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cramer H.* Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. — Actual. Sci. et Ind. Paris, 1938, f. 736. (Рус. перев.: *Крамер Г.* Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. — Успехи матем. наук, 1944, в. X, с. 166–178).
2. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с.
3. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989. 208 с.
4. *Esscher F.* On the probability function in the collective theory of risk. — Skand. Aktuarietidskrift, 1932, v. 15, № 1–2, p. 175–195.
5. *Жуленев С. В.* Альтернатива для ряда Крамера–Петрова. — В сб.: Вероятностные задачи дискретной математики. М.: МИЭМ, 1990, с. 12–20.
6. *Физтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. 800 с.
7. *Шиганов И. С.* Об уточнении верхней оценки константы в остаточном члене ЦПТ. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1986, с. 109–115.
8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 1. М.: Наука, 1967. 488 с.
9. *Жуленев С. В.* Большие отклонения при экспоненциальных слагаемых. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1991, с. 113–117.
10. *Deuschel J.-D., Stroock D. W.* Large Deviations. New York: Academic Press, 1989. 328 p.
11. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992. 224 с.
12. *Вентцель А. Д.* Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986. 176 с.
13. *Жуленев С. В.* Об оценке больших отклонений без помощи ряда Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 780–782.
14. *Статулявичус В. А., Алешкявичене А. К.* О больших отклонениях в пуассоновской аппроксимации. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 460–470.

Поступила в редакцию
1.VII.1997