Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Цилевич, Стационарные случайные разбиения натурального ряда, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 55–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:18:17

© 1999 г.

ЦИЛЕВИЧ Н. В.*

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБИЕНИЯ
НАТУРАЛЬНОГО РЯДА¹⁾

В работе получено описание стационарных случайных разбиений натурального ряда (в эквивалентной постановке — стационарных когерентных последовательностей случайных подстановок) относительно естественного действия бесконечной симметрической группы. Результат дает новую характеристику распределения Пуассона–Дирихле $PD(1)$ с единичным параметром как единственного инвариантного распределения для некоторого семейства марковских операторов на бесконечномерном симплексе, а также новую характеристику меры Хаара на проективном пределе конечных симметрических групп.

Ключевые слова и фразы: случайные разбиения, случайные подстановки, стационарное распределение, марковский оператор, распределение Пуассона–Дирихле.

1. Постановка задачи и формулировка результата. Классическая теорема де Финетти описывает все *перестановочные* последовательности скалярных случайных величин (в терминологии [4] — *классы эквивалентных случайных величин*), т.е. случайные последовательности, совместные распределения нескольких членов которых не меняются при финитных подстановках элементов. Согласно этой теореме, всякая случайная перестановочная последовательность есть смесь последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин. Имеется большое число различных доказательств этой важной теоремы, среди многих работ отметим [1], [4], [9]. Удобно формулировать теорему де Финетти следующим образом: всякая эргодическая мера на бесконечном произведении $\prod_1^\infty [0, 1]$, инвариантная относительно действия группы финитных подстановок, есть мера Бернулли.

Та же группа финитных подстановок натурального ряда, т.е. бесконечная симметрическая группа S_∞ , действует естественным образом

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-15-96060.

на пространстве разбиений натурального ряда Π_∞ . А именно, образ разбиения $\xi \in \Pi_\infty$ под действием подстановки $g \in \mathfrak{S}_\infty$ есть разбиение $g\xi$ такое, что элементы i и j лежат в одной компоненте разбиения $g\xi$ тогда и только тогда, когда элементы $g^{-1}i$ и $g^{-1}j$ лежат в одной компоненте разбиения ξ . Вопрос о перестановочных случайных разбиениях натурального ряда, аналогичный вопросу о перестановочных последовательностях, был поставлен и решен Дж. Кингманом [13] (см. также [12]).

Снабдим пространство Π_∞ топологией проективного предела пространств разбиений конечных множеств $[n] = \{1, \dots, n\}$. Пусть $\mathcal{M}(\Pi_\infty)$ — множество всех борелевских распределений на пространстве Π_∞ . Распределение $\eta \in \mathcal{M}(\Pi_\infty)$ называется *перестановочным* (соответственно, случайное разбиение $\xi \in \Pi_\infty$ с распределением η называется *перестановочным*), если η инвариантно относительно описанного действия финитных подстановок.

Согласно теореме Кингмана, эргодические перестановочные разбиения натурального ряда параметризуются точками симплекса $\Sigma = \{x = (x_1, x_2, \dots): x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i \leq 1\}$ и строятся при помощи следующей конструкции [13]. Пусть $x \in \Sigma$. Рассмотрим распределение α на отрезке $[0, 1]$, имеющее счетное число различных атомов с нагрузками $x_1, x_2, \dots$ и абсолютно непрерывную составляющую полной меры, равной $1 - x_1 - x_2 - \dots$. Пусть $Z_1, Z_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением α . Эта последовательность задает случайное отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$ (а следовательно, и случайное разбиение ξ_x множества $\mathbb{N}$ на классы эквивалентности), а именно, $i \sim j \iff Z_i = Z_j$. Из конструкции следует, что построенное случайное разбиение ξ_x перестановочно. Обозначим его распределение через $\bar{P}^x$.

Теорема 1 (Кингман [13]). Пусть ξ — перестановочное случайное разбиение натурального ряда. Обозначим через ξ_n его ограничение на подмножество $[n] \subset \mathbb{N}$, и пусть $L_1(\xi_n) \geq L_2(\xi_n) \geq \dots$ — размеры компонент разбиения ξ_n в невозрастающем порядке. Тогда пределы

$$X_i(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_i(\xi_n)}{n}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

существуют с вероятностью 1. Для любого $x \in \Sigma$ условное распределение ξ при условии $(X_1, X_2, \dots) = x$ равно $\bar{P}^x$. Таким образом, распределение $\bar{\mu}$ перестановочной последовательности ξ задается формулой

$$\bar{\mu} = \int_{\Sigma} \bar{P}^x d\nu(x),$$

где ν — распределение вектора $X = (X_1, X_2, \dots)$ на симплексе Σ .

Перестановочные случайные разбиения используются во многих областях математики и приложений таких, как комбинаторика, теория

симметрических групп, популяционная генетика. Особо важную роль играет *случайное разбиение Ювенса*, тесно связанное с мерами Хаара на симметрических группах и распределением Пуассона–Дирихле на симплексе (см. пример 1), которое обладает многими дополнительными симметриями. Целью настоящей работы является новая характеристика этого случайного разбиения.

В связи с задачами теории представлений бесконечной симметрической группы оказывается полезным переформулировать теорему 1 следующим образом. Пусть $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа порядка n , т.е. группа всех подстановок множества $[n]$. *Канонической проекцией* $\pi_n: \mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ называется отображение, сопоставляющее подстановке $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ подстановку множества $[n]$, получаемую удалением элемента $n+1$ из содержащего его цикла подстановки w .

Последовательность $(w_1, w_2, \dots)$ подстановок $w_i \in \mathfrak{S}_i$ будем называть *когерентной*, если $\pi_n w_{n+1} = w_n$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через $\mathfrak{S}^\infty$ пространство когерентных последовательностей подстановок, снабженное топологией проективного предела конечных групп $\mathfrak{S}_n$ (это пространство введено в работе [11], где оно названо *пространством виртуальных подстановок*). Пусть $\mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty)$ — множество борелевских вероятностных распределений на $\mathfrak{S}^\infty$.

На пространстве $\mathfrak{S}^\infty$ определено действие группы $G = \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$. Пусть $\omega = (w_1, w_2, \dots)$ — когерентная последовательность подстановок и $(g_1, g_2) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. Положим

$$((g_1, g_2)\omega)_i = \begin{cases} g_1^{-1}w_i g_2, & \text{если } i \geq n; \\ \pi_i(g_1^{-1}w_n g_2), & \text{если } i < n. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через $K = \{(h, h), h \in \mathfrak{S}_\infty\}$ диагональную подгруппу группы G , изоморфную $\mathfrak{S}_\infty$. Распределение $\mu \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty)$ называется *центральным*, если оно инвариантно относительно действия диагональной подгруппы K .

Каждая когерентная последовательность подстановок $\omega \in \mathfrak{S}^\infty$ определяет разбиение $\xi(\omega)$ натурального ряда, а именно, i и j принадлежат одной компоненте $\xi(\omega)$, если i и j лежат в одном цикле подстановки w_n при достаточно большом n . Обозначим через $\Phi: \mathfrak{S}^\infty \rightarrow \Pi_\infty$ отображение $\omega \mapsto \xi(\omega)$. Действие группы K , изоморфной $\mathfrak{S}_\infty$, на пространстве $\mathfrak{S}^\infty$ согласовано с действием группы $\mathfrak{S}_\infty$ на пространстве Π_∞ , т.е. $g\Phi(\omega) = \Phi(g^{-1}\omega g)$. Поэтому отображение Φ переводит центральные распределения на $\mathfrak{S}^\infty$ в перестановочные распределения на Π_∞ . Причем это соответствие распределений является взаимно однозначным, поскольку центральная мера на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ полностью определяется распределением циклового разбиения.

Пусть P^x — центральное распределение на пространстве $\mathfrak{S}^\infty$, соответствующее эргодическому распределению $\overline{P}^x$ на пространстве Π_∞ . В

терминах случайных подстановок теорема Кингмана может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1'. Пусть $\omega = (w_1, w_2, \dots)$ — центральная последовательность случайных подстановок. Обозначим через $l_1(w_n) \geq l_2(w_n) \geq \dots$ длины циклов подстановки $w_n \in \mathfrak{S}_n$ в невозрастающем порядке. Тогда пределы

$$X_i(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_i(w_n)}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

существуют с вероятностью 1. Для любого $x \in \Sigma$ условное распределение ω при условии $(X_1, X_2, \dots) = x$ равно P^x . Таким образом, распределение μ центральной последовательности ω задается формулой

$$\mu = \int_{\Sigma} P^x d\nu(x), \quad (3)$$

где ν — распределение вектора $X = (X_1, X_2, \dots)$ на симплексе Σ .

Предел $X_i(\omega)$ называется *относительной длиной i -го цикла* последовательности ω . Центральное распределение μ называется *насыщенным*, если оно сосредоточено на последовательностях, у которых сумма относительных длин циклов равна единице. Обозначим через $\phi: \mathfrak{S}^\infty \rightarrow \Sigma$ отображение $\omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$.

Пример 1. Пусть $w_1 = e \in \mathfrak{S}_1$ — тождественная подстановка. Если уже построена подстановка w_n , то положим $w_{n+1} = w_n(n+1, k)$ с вероятностью $1/(n+1)$ при $k = 1, \dots, n+1$ (здесь (i, j) обозначает транспозицию, переставляющую элементы i и j). Очевидно, что полученная случайная последовательность $\omega = (w_1, w_2, \dots)$ когерентна, центральна, и подстановка w_n равномерно распределена на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Распределение построенной последовательности $\omega \in \mathfrak{S}^\infty$ называется *мерой Хаара на пространстве виртуальных подстановок*. Соответствующее случайное перестановочное разбиение натурального ряда называется *случайным разбиением Юенса*. Распределение относительных длин циклов для последовательности, распределенной по мере Хаара, есть известное *распределение Пуассона–Дирихле* $PD(1)$ ([14], см. также независимое доказательство в [8]), т.е. мера Хаара задается формулой (3), в которой нужно положить $\nu = PD(1)$. В частности, мера Хаара не эргодична. Распределение $PD(1)$ сосредоточено на последовательностях с единичной суммой, так что мера Хаара является насыщенной.

Мера Хаара на $\mathfrak{S}^\infty$ есть единственное распределение, инвариантное относительно правого (соответственно, левого) действия группы $\mathfrak{S}_\infty$ (поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$ конечномерная проекция инвариантной меры на $\mathfrak{S}_n$ инвариантна относительно всех сдвигов, и, следовательно, является мерой Хаара на $\mathfrak{S}_n$). Оказывается, условие $\mathfrak{S}_\infty$ -инвариантности

является слишком сильным, и мера Хаара на $\mathfrak{S}^\infty$ есть единственное распределение, удовлетворяющее более слабому условию *стационарности* (в классе насыщенных распределений). Опишем эту более общую постановку вопроса, предложенную А. М. Вершиком. Заметим, что образ $R_g\mu$ центрального распределения μ на $\mathfrak{S}^\infty$ под действием правого сдвига R_g на подстановку $g \in \mathfrak{S}_\infty$ уже не является центральной мерой. Однако можно определить ее проекцию $PR_g\mu$ на пространство центральных распределений (см. п. 3). Естественно поставить следующую задачу: *описать все центральные распределения μ такие, что для любой финитной подстановки $g \in \mathfrak{S}_\infty$ распределение μ сохраняется при отображении, являющемся композицией сдвига R_g и проекции P , т.е. такие, что $PR_g\mu = \mu$ для всех $g \in \mathfrak{S}_\infty$. Такие распределения будем называть стационарными. Иными словами, речь идет о центральных распределениях, инвариантных относительно некоторого семейства марковских операторов.*

Основным результатом данной работы является описание всех стационарных центральных распределений.

Теорема 3. *Эргодические центральные стационарные распределения на пространстве $\mathfrak{S}^\infty$ параметризуются точками отрезка $[0, 1]$. Для эргодической меры M^t , соответствующей точке $t \in [0, 1]$, сумма относительных длин циклов равна t с вероятностью 1, и конечномерные распределения этой меры задаются формулой*

$$M_n^t(h) = \sum_{k=0}^s \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k,$$

где s — число неподвижных точек подстановки $h \in \mathfrak{S}_n$.

В частности, в классе насыщенных распределений мера Хаара есть единственная стационарная мера.

Не входя в детали, отметим, что с помощью отображения Φ сдвиг R_g можно спроектировать на пространство Π_∞ . Полученная проекция $\bar{R}_g$ уже не является взаимно однозначным отображением, а представляет собой марковский оператор (или *полиморфизм*, см. [2]). Распределение $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\Pi_\infty)$ называется *стационарным*, если для любой финитной подстановки g мера $\bar{\mu}$ сохраняется при отображении, являющемся композицией оператора $\bar{R}_g$ и проекции на пространство $\mathcal{M}(\Pi_\infty)$ перестановочных распределений. Теорема 3, переформулированная в терминах перестановочных разбиений, дает описание всех стационарных распределений на Π_∞ . Мы не будем подробно останавливаться на соответствующих точных формулировках.

Эквивалентная постановка задачи состоит в описании распределений на симплексе Σ , инвариантных относительно некоторого семейства марковских операторов. Именно, рассмотрим оператор $\hat{T}_g$, который пе-

реводит точку $x \in \Sigma$ в точку $\phi(\omega_x g)$, где ω_x — центральная последовательность случайных подстановок с распределением P^x .

Теорема 2. *Эргодические меры на симплексе Σ для действия семейства операторов $\{\hat{T}_g\}_{g \in \mathfrak{S}_\infty}$ параметризуются точками отрезка $[0, 1]$. Эргодическое распределение, соответствующее точке $t \in [0, 1]$, сосредоточено на симплексе Σ_t монотонных последовательностей с суммой t и равно образу меры Пуассона–Дирихле $PD(1)$ под действием гомотетии $x \mapsto tx$.*

В частности, на симплексе монотонных последовательностей с единичной суммой мера Пуассона–Дирихле $PD(1)$ есть единственная инвариантная мера. Таким образом, мы получаем новую характеристику распределения $PD(1)$.

Материал распределен по пунктам следующим образом. Пункт 2 содержит необходимые сведения о пространстве виртуальных подстановок и центральных мерах на нем. В п. 3 приводятся различные формулировки основной теоремы. Доказательство основной теоремы разбито на три части. В первой части (леммы 1, 2) с помощью *эргодического метода* [1] исходная задача сводится к набору условий, формулирующихся в терминах распределений на конечных симметрических группах. В п. 5 доказан основной частный случай теоремы 3, а именно, единственность стационарного распределения в классе насыщенных мер. Основная идея доказательства состоит в рассмотрении сдвига на *случайную* подстановку $g \in \mathfrak{S}_n$. Эта дополнительная рандомизация обеспечивает хорошие равномерные свойства полученной последовательности подстановок, что позволяет доказать, что ее распределение сколь угодно близко к мере Хаара. Наконец, в п. 6 теорема 3 сводится к этому основному частному случаю.

Автор благодарит А. М. Вершика за постановку задачи, ценные советы и помощь в работе над статьей, а также С. В. Керова и М. И. Гордина за многочисленные полезные обсуждения.

2. Пространство виртуальных подстановок. В этом пункте мы подробно изложим необходимые сведения о пространстве виртуальных подстановок и центральных мерах на нем.

О п р е д е л е н и е. Для заданного подмножества $J \subset [n]$ и подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$ обозначим через $\pi_{n,J}w$ подстановку множества J , получаемую удалением из циклов подстановки w всех элементов, не принадлежащих J . Перестановка $\pi_{n,J}w$ называется *производной подстановкой* для w на подмножестве J .

Производную подстановку на множестве $J = [m]$ обозначим через $\pi_{n,m}w$. Индекс n мы будем обычно опускать, если он определен контекстом. Например, если $w = (6\ 3\ 5\ 1)(4\ 2)(7)$, то $\pi_4 w = (3\ 1)(4\ 2)$.

О п р е д е л е н и е. *Пространством виртуальных подстановок*

$\mathfrak{S}^\infty$ называется проективный предел $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$ конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$ относительно канонических проекций $\pi_{n+1,n} : \mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$.

Таким образом, виртуальная подстановка есть последовательность $\omega = (w_1, w_2, \dots) \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \dots$ такая, что w_n — производная подстановка для w_{n+1} при всех $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что проекция π_n коммутирует со сдвигами на элементы группы $\mathfrak{S}_n$, т.е. для любого $N > n$ равенство $\pi_n(g_1^{-1} h g_2) = g_1^{-1} \pi_n(h) g_2$ выполнено для любого $h \in \mathfrak{S}_N$ и произвольных $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}_n$. Таким образом, корректно определено действие группы $G = \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$ на пространстве виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$ по формуле (1).

Последовательность $\{\mu_n\}$ распределений на конечных симметрических группах $\mathfrak{S}_n$ называется *когерентной*, если она согласована относительно проекций $\pi_{n+1,n}$, т.е. $\pi_{n+1,n} \mu_{n+1} = \mu_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Каждая когерентная последовательность распределений задает борелевскую меру $\mu = \varprojlim \mu_n$ на пространстве виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$, и каждая борелевская мера на $\mathfrak{S}^\infty$ представляется в таком виде. *Далее все рассматриваемые меры предполагаются борелевскими вероятностными.* Если все меры μ_n центральны, т.е. инвариантны относительно внутренних автоморфизмов $\mathfrak{S}_n$, то предельное распределение μ инвариантно относительно действия диагональной подгруппы $K = \{(g_1, g_2) \in G : g_1 = g_2\}$. Меры на пространстве виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$, инвариантные относительно подгруппы K , называются *центральными* (они соответствуют центральным мерам графа ветвления классов сопряженности симметрических групп, см. [3], [5]). Обозначим через $\mathcal{M}^K(\mathfrak{S}^\infty)$ множество всех центральных распределений.

Теорема 1' дает полное описание центральных распределений на пространстве виртуальных подстановок. В частности, из этой теоремы следует, что для каждой борелевской меры ν на симплексе Σ существует и единственная центральная мера μ на $\mathfrak{S}^\infty$, для которой ν есть распределение вектора относительных длин циклов. Пусть $\mathcal{M}(\Sigma)$ — множество борелевских распределений на симплексе Σ . Обозначим через ρ оператор, сопоставляющий распределению $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ соответствующую центральную меру $\mu = \int P^x d\nu(x)$.

Пример 2. Простейшим описанием меры Пуассона–Дирихле $PD(1)$, которая является распределением длин циклов виртуальных подстановок относительно меры Хаара (см. пример 1), является следующий процесс ломания палки. Пусть $U_1, U_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Положим $V_n = U_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - U_i)$. Мера Пуассона–Дирихле $PD(1)$ есть распределение порядковых статистик $V_{(1)} \geq V_{(2)} \geq \dots$ последовательности $V_1, V_2, \dots$.

Опишем теперь модификацию конструкции Кингмана для построе-

ния эргодических перестановочных разбиений, с помощью которой можно построить случайную виртуальную подстановку с распределением P^x . Обозначим $x_0 = 1 - x_1 - x_2 - \dots$. Будем размещать элементы $1, 2, \dots$ последовательно в циклы и приписывать этим циклам случайные метки, причем на каждом шаге новый элемент с вероятностью x_0 будет образовывать *особый* цикл длины 1, который не имеет метки и к которому запрещено добавлять новые элементы. Итак,

(1) на первом шаге элемент 1 с вероятностью x_0 образует особый цикл и с вероятностью x_j ($j = 1, 2, \dots$) — неособый цикл длины 1 с меткой j ;

(2) если элементы $1, \dots, m$ уже размещены и образуют несколько особых циклов и k неособых циклов с метками $i_1, \dots, i_k$, то элемент $m+1$ с вероятностью x_j ($j = 1, \dots, k$) помещается на одну из возможных позиций в j -м неособом цикле, с вероятностью x_i ($i \neq i_1, \dots, i_k$) образует новый неособый цикл длины 1 с меткой i и с вероятностью x_0 образует новый особый цикл.

После n -го шага этой процедуры мы получаем случайную подстановку $w_n \in \mathfrak{S}_n$. Из конструкции следует, что последовательность $\{w_n\}$ когерентна. Нетрудно убедиться, что ее распределение есть P^x . В частности, при $x = (0, 0, \dots)$ распределение P^0 сосредоточено на последовательности, состоящей из тождественных подстановок.

Пример 3. Проекция эргодической меры P^x на симметрическую группу $\mathfrak{S}_2$ задается формулой

$$P_2^x((1)(2)) = 2 \sum_{1 \leq i < j < \infty} x_i x_j + x_0^2 + 2x_0(1 - x_0), \quad P_2^x((12)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2.$$

Заметим, что сумма относительных длин циклов виртуальной подстановки не обязательно равна единице. Простейшим примером является виртуальная подстановка $e = (e_1, e_2, \dots)$, где $e_i \in \mathfrak{S}_i$ — тождественная подстановка. Ясно, что длины всех ее циклов равны нулю.

О п р е д е л е н и е. Центральное распределение μ на пространстве виртуальных подстановок называется *насыщенным*, если сумма относительных длин циклов равна единице почти наверное относительно μ . Когерентное семейство $\{\mu_n\}$ центральных распределений на симметрических группах называется *насыщенным*, если предельная мера $\mu = \varprojlim \mu_n$ на пространстве виртуальных подстановок является насыщенной.

Задача об общих центральных распределениях на пространстве виртуальных подстановок в большинстве случаев может быть сведена к задаче для насыщенных распределений. Поясним это подробнее.

Пусть $t \in [0, 1]$. Обозначим через $\Sigma_t = \{x \in \Sigma: \sum_{i=1}^{\infty} x_i = t\}$ симплекс монотонных последовательностей с суммой t . При $t \neq 0$ стандартный симплекс Σ_1 отождествляется с Σ_t при помощи гомотетии $\Gamma_t: x \mapsto xt$. Через Γ_0 обозначим постоянное отображение из Σ_1 в

$\Sigma_0 = \{0\}$. Пусть ν — произвольное распределение на симплексе Σ . Обозначим через τ образ меры ν при отображении $x \mapsto x_1 + x_2 + \dots$, и через ν^t — условное распределение ν на симплексе Σ_t , так что $\nu = \int_0^1 \nu^t d\tau(t)$. Пусть $\bar{\nu}^t = \Gamma_t^{-1} \nu^t$. Нетрудно показать, что конечномерные распределения центральной меры μ , соответствующей ν , задаются формулой

$$\mu_n(h) = \int_0^1 \sum_{k=0}^s \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k \mu_{n-k}^t(h^k) d\tau(t), \quad (4)$$

где $\mu^t = \int_{\Sigma_1} P^y d\bar{\nu}^t(y)$ — насыщенное центральное распределение, соответствующее $\bar{\nu}^t$, s — число неподвижных точек подстановки $h \in \mathfrak{S}_n$ и h^k — подстановка, полученная из h удалением k неподвижных точек.

З а м е ч а н и е. Пространство виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$ было введено в статье [11]. В этой работе указано семейство квазиинвариантных распределений на пространстве $\mathfrak{S}^\infty$ относительно описанного действия группы $G = \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$ и изучено связанное с ним семейство унитарных представлений бесконечной симметрической группы. В серии последующих работ [6]–[8] рассмотрены различные свойства пространства виртуальных подстановок.

3. Основная теорема. Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$ действует на пространстве виртуальных подстановок двусторонними сдвигами (1). Обозначим через $R_g: \mathfrak{S}^\infty \rightarrow \mathfrak{S}^\infty$ правый сдвиг на подстановку $g \in \mathfrak{S}_\infty$.

Нетрудно показать, что образ $\mu^g = R_g \mu$ центрального распределения μ обладает тем свойством, что относительные длины циклов (2) существуют для почти всех относительно μ^g виртуальных подстановок. Поэтому можно определить проекцию сдвига R_g на симплекс Σ , которая будет являться уже марковским оператором. Этот оператор переводит точку $x \in \Sigma$ в точку $\phi(\omega_x g)$, где ω_x — случайная виртуальная подстановка с распределением P^x . Таким образом, соответствующий оператор $\hat{T}_g$ замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^K(\mathfrak{S}^\infty) & \xrightarrow{R_g} & \mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty) \\ \rho \uparrow & & \phi \downarrow \\ \mathcal{M}(\Sigma) & \xrightarrow{\hat{T}_g} & \mathcal{M}(\Sigma) \end{array}$$

Нетрудно проверить, что оператор $\hat{T}_g$ зависит только от класса сопряженности подстановки g , т.е. от ее цикловой структуры.

П р и м е р 4. Очевидно, что $\hat{T}_e$ — тождественный оператор. Простейшим нетривиальным примером является оператор, соответствующий транспозиции. Из конструкции эргодической меры P^x следует, что ограничение $T_{(1,2)}$ оператора $\hat{T}_{(1,2)}$ на симплекс Σ_1 задается следующей фор-

мулой. Обозначим через V оператор, переставляющий координаты последовательности в невозрастающем порядке. Тогда

$$T_{(1,2)}x = \begin{cases} V(x_i + x_j, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots), & i < j, \\ & \text{с вероятностью } 2x_i x_j; \\ V(t, x_i - t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots), & i = 1, 2, \dots, \\ & \text{с вероятностью } dt, t \in [0, x_i]. \end{cases}$$

Ясно, что если мера μ инвариантна относительно сдвига R_g , то распределение $\nu = \phi\mu$ инвариантно относительно оператора $\hat{T}_g$. Следовательно, при любом $g \in \mathfrak{S}_\infty$ распределение Пуассона–Дирихле $PD(1)$ $\hat{T}_g$ -инвариантно.

Нетрудно видеть, что множество $\Sigma_t = \{x \in \Sigma: \sum x_i = t\}$ инвариантно относительно $\hat{T}_g$ при любом $t \in [0, 1]$ (поскольку сдвиг на финитную подстановку не меняет сумму относительных длин циклов виртуальной подстановки). Оказывается, что эти множества являются эргодическими компонентами, и эргодическая мера, сосредоточенная на Σ_t , есть образ распределения Пуассона–Дирихле $PD(1)$ под действием гомотетии $\Gamma_t: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_t$.

Теорема 2. *Эргодические меры на симплексе Σ для действия семейства операторов $\{\hat{T}_g\}_{g \in \mathfrak{S}_\infty}$ параметризуются точками отрезка $[0, 1]$. Эргодическое распределение, соответствующее точке $t \in [0, 1]$, сосредоточено на симплексе Σ_t и равно $PD_t(1) = \Gamma_t(PD(1))$.*

Следствие. *Общий вид распределения на симплексе Σ , инвариантного относительно семейства операторов $\{\hat{T}_g\}_{g \in \mathfrak{S}_\infty}$, задается формулой*

$$\nu = \int_0^1 PD_t(1) d\tau(t),$$

где τ — произвольное борелевское распределение на отрезке $[0, 1]$.

Описанная задача допускает другую формулировку. Пусть $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma)$. Рассмотрим центральную меру $\rho(\hat{T}_g\nu)$, соответствующую распределению $\hat{T}_g\nu$. По определению оператора $\hat{T}_g$, имеем $\hat{T}_g\nu = \phi\mu^g$, где $\mu = \rho\nu$ — центральная мера на $\mathfrak{S}_\infty$, соответствующая ν , и $\mu^g = R_g\mu$. Следовательно, $\rho(\hat{T}_g\nu) = \int_\Sigma P^x d(\phi\mu^g)(x)$. Итак, распределение ν инвариантно относительно $\hat{T}_g$ тогда и только тогда, когда распределение μ удовлетворяет условию

$$\mu = \int_\Sigma P^x d(\phi\mu^g)(x). \quad (5)$$

Центральную меру μ на пространстве виртуальных подстановок будем называть *стационарной*, если она удовлетворяет условию (5) для всех $g \in \mathfrak{S}_\infty$.

Правая часть формулы (5) определяет проекцию $R\mu^g$ меры μ^g на пространство $M^K(\mathfrak{S}^\infty)$ центральных (т.е. K -инвариантных) мер, а именно, $R\mu^g$ есть единственная центральная мера, имеющая то же распределение относительных длин циклов, что и μ^g . Заметим, что группа K , изоморфная $\mathfrak{S}_\infty$, локально конечна. А. М. Вершик предложил использовать эргодический метод [1] для определения проекции R .

Лемма 1. Пусть η — распределение на пространстве виртуальных подстановок, такое что относительные длины циклов существуют почти наверное относительно η . Тогда проекция распределения η на пространство центральных мер $M^K(\mathfrak{S}^\infty)$ задается формулой

$$P\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{u \in \mathfrak{S}_N} u^{-1} \eta u. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Здесь и далее имеется в виду слабая сходимость распределений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\eta^N = (N!)^{-1} \sum_{u \in \mathfrak{S}_N} u^{-1} \eta u$. Пространство $\mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty)$ компактно, поэтому из последовательности $\{\eta^N\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\eta^{N_k}\}$. Пусть η_0 — предел этой подпоследовательности. Поскольку сопряжение не меняет длин циклов, то $\phi(u^{-1} \eta u) = \phi(\eta)$ для любого $u \in \mathfrak{S}_\infty$, следовательно, $\phi(\eta_0) = \phi(\eta)$.

Обозначим $K_n = K \cap (\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n)$, так что $K = \cup K_n$. Очевидно, что мера η^N инвариантна относительно K_n при $N \geq n$. Отсюда следует, что мера η_0 инвариантна относительно K_n при любом $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\eta_0 \in \mathcal{M}^K(\mathfrak{S}^\infty)$.

Итак, η_0 есть центральная мера, имеющая то же распределение длин циклов, что и η , т.е. $\eta_0 = P\eta$. Таким образом, каждая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\eta^N\}$ сходится к $P\eta$, откуда следует (6).

З а м е ч а н и е. Таким образом, определение стационарной меры можно записать в виде

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{u \in \mathfrak{S}_N} u^{-1} \mu^g u, \quad g \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (7)$$

Напомним, что обычное понятие стационарного распределения для группового действия определено в случае действия локально компактной группы следующим образом (см. [10]). Пусть $\mathfrak{G}$ — локально компактная группа, действующая на измеримом пространстве X , и κ — распределение на $\mathfrak{G}$. Распределение η на пространстве X называется стационарным (относительно κ), если оно удовлетворяет условию $\eta = \int_{\mathfrak{G}} \eta^a d\kappa(a)$, где η^a есть образ меры η под действием элемента $a \in \mathfrak{G}$. Формула (7) является естественным обобщением этого определения для действия локально конечной группы.

Ввиду формулы (4) теорема 2 эквивалентна следующей теореме 3.

Теорема 3. *Общий вид стационарной вероятностной меры $\mu = \varprojlim \mu_n$ на пространстве виртуальных подстановок задается формулой*

$$\mu_n(h) = \sum_{k=0}^s \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} (1-t)^k d\tau(t),$$

где s — число неподвижных точек подстановки $h \in \mathfrak{S}_n$ и τ — произвольное борелевское распределение на отрезке $[0, 1]$.

Среди насыщенных распределений (соответствующих мере τ , сосредоточенной в точке $t = 1$) единственной стационарной мерой является мера Хаара. Таким образом, в классе насыщенных распределений нет инвариантных стационарных мер.

З а м е ч а н и е. Поскольку $\{\hat{T}_g\}$ не является групповым действием $\mathfrak{S}_\infty$, естественно задать вопрос об описании инвариантных распределений относительно одного оператора $\hat{T}_{(1,2)}$, соответствующего транспозициям. Этот вопрос тем более интересен, что оператор $\hat{T}_{(1,2)}$ имеет очень простую форму (см. пример 4). Гипотеза состоит в том, что для одного оператора $\hat{T}_{(1,2)}$ запас инвариантных распределений такой же, как и для всего семейства $\{\hat{T}_g\}_{g \in \mathfrak{S}_\infty}$, однако этот вопрос пока остается открытым.

4. Сведение к конечномерным условиям. Первая часть доказательства основной теоремы состоит в сведении исходной бесконечномерной задачи к (бесконечному) набору условий, формулирующихся в терминах распределений на конечных симметрических группах.

Лемма 2. *Пусть μ — центральное распределение на пространстве виртуальных подстановок, $\{\mu_n\}$ — соответствующее когерентное семейство распределений на симметрических группах, $g \in \mathfrak{S}_k$. Тогда конечномерные проекции распределения $P\mu^g$ задаются формулой*

$$(P\mu^g)_n(u) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+k} \\ \pi_n(w)=u}} \mu_{n+k}(wg^n), \quad u \in \mathfrak{S}_n,$$

где $g^n \in \mathfrak{S}_{n+k}$ — подстановка такая, что $g^n(i) = i$ при $i = 1, \dots, n$, и $\pi_{\{n+1, \dots, n+k\}} g^n$ имеет ту же цикловую структуру, что и g .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta = P\mu^g$ и $u \in \mathfrak{S}_n$. Тогда

$$\eta_n(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_N \\ \pi_n(w)=u}} \mu_N(h^{-1}whg).$$

Обозначим через Π_n множество всех разбиений числа n . Классы сопряженности симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ параметризуются элементами $\lambda \in \Pi_n$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие

между центральными мерами на $\mathfrak{S}_n$ и распределениями на Π_n . Обозначим через $[\lambda]$ класс сопряженности, соответствующий $\lambda \in \Pi_n$, т.е. множество подстановок, длины циклов которых образуют разбиение λ , и через $|\lambda|$ — мощность этого класса. Мере η соответствует распределение

$$\bar{\eta}_n(\lambda) = \sum_{v \in [\lambda]} \eta_n(v) = |\lambda| \eta_n(u),$$

где u — произвольный представитель класса $[\lambda]$. Таким образом,

$$\bar{\eta}_n(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_N \\ \pi_n(w) \in [\lambda]}} \mu_N(h^{-1}whg).$$

Обозначим допредельное выражение через σ_N . Заметим, что σ_N можно записать в виде

$$\sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \frac{1}{N!} \# \{h \in \mathfrak{S}_N: \pi_n(hvg^{-1}h^{-1}) \in [\lambda]\} = \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) q(v, \lambda),$$

где $q(v, \lambda)$ — переходные вероятности марковского оператора, действующего из $\mathfrak{S}_N$ в Π_n и переводящего подстановку $v \in \mathfrak{S}_N$ в разбиение, соответствующее классу подстановки $\pi_n(w)$, где w — случайная подстановка, равномерно распределенная на классе, содержащем vg^{-1} . Заметим, что рассмотрение производной подстановки на множестве $[n]$ случайного представителя класса, содержащего vg^{-1} , равносильно рассмотрению производной подстановки vg^{-1} на случайном подмножестве $J \subset [N]$ мощности n , т.е.

$$q(v, \lambda) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \# \{J \subset [N]: \#J = n, \pi_J(vg^{-1}) \in [\lambda]\}.$$

Обозначим через δ_λ характеристическую функцию класса $[\lambda]$. Тогда

$$\sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) q(v, \lambda) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{\substack{J \subset [N] \\ \#J = n}} \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \delta_\lambda(\pi_J(vg^{-1})).$$

Пусть $N \geq n+k$. Поскольку $P\mu^g$ зависит только от цикловой структуры подстановки g , можно считать, что $g \in \mathfrak{S}[n+1, \dots, n+k]$. Пусть $J = \{j_1, \dots, j_n\}$. Предположим, что

$$\{j_1, \dots, j_n\} \cap \{n+1, \dots, n+k\} = \emptyset. \quad (8)$$

Вероятность того, что случайное подмножество мощности n множества $[N]$ обладает этим свойством, равна $\binom{N-k}{n} / \binom{N}{n}$. Рассмотрим подстановку $h \in \mathfrak{S}_N$ такую, что

$$h(j_1) = 1, \dots, h(j_n) = n \quad \text{и} \quad h(i) = i$$

при $i \notin J$. Очевидно, что h коммутирует с g . В силу центральности меры μ_N отсюда следует, что сумма

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \delta_\lambda(\pi_J(vg^{-1})) &= \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \delta_\lambda(\pi_J(hvh^{-1}g^{-1})) \\ &= \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \delta_\lambda(\pi_J(hvg^{-1}h^{-1})) = \sum_{v \in \mathfrak{S}_N} \mu_N(v) \delta_\lambda(\pi_n(vg^{-1})) \end{aligned}$$

не зависит от выбора подмножества J , если оно удовлетворяет условию (8). Кроме того, поскольку $g \in \mathfrak{S}[n+1, \dots, n+k]$, последняя сумма равна $\sum_{v \in \mathfrak{S}_{n+k}} \mu_{n+k}(v) \delta_\lambda(\pi_n(vg^{-1}))$. Следовательно,

$$\sigma_N = \frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} \sum_{v \in \mathfrak{S}_{n+k}} \mu_{n+k}(v) \delta_\lambda(\pi_n(vg^{-1})) + R_N,$$

где $|R_N| \leq 1 - \binom{N-k}{n} / \binom{N}{n} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, откуда следует утверждение леммы.

5. Основная лемма. Как было отмечено выше, утверждения об общих центральных мерах на пространстве виртуальных подстановок обычно сводятся к случаю насыщенных мер. В соответствии с этим принципом, мы докажем сначала, что в классе насыщенных распределений мера Хаара есть единственная стационарная мера. Точнее, имеет место даже более сильное утверждение. Приведем две эквивалентные формулировки.

Теорема 4. Пусть T_g — ограничение оператора $\hat{T}_g$ на инвариантное подмножество Σ_1 . Обозначим через T_n ($n = 1, 2, \dots$) усреднение операторов T_g по симметрической группе $\mathfrak{S}_n$:

$$T_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} T_g.$$

Мера Пуассона–Дирихле $PD(1)$ есть единственное распределение на симплексе Σ_1 , инвариантное относительно $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Теорема 5. Пусть R_n — марковский оператор сдвига на случайную подстановку, равномерно распределенную на группе $\mathfrak{S}_n$. Мера Хаара на пространстве виртуальных подстановок есть единственная центральная мера, удовлетворяющая условию $\mu = P(R_n\mu)$, $n \in \mathbb{N}$.

В силу леммы 2 теоремы 4 и 5 следуют из основной леммы 3. Для фиксированных $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathfrak{S}^k = \mathfrak{S}[n+1, \dots, n+k]$.

Основная лемма 3. Пусть $\{\mu_n\}$ — насыщенное когерентное семейство центральных распределений на симметрических группах $\mathfrak{S}_n$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+k} \\ \pi_n(w)=u}} \frac{1}{k!} \sum_{g \in \mathfrak{S}^k} \mu_{n+k}(wg) = \mu_n(u) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathfrak{S}_n. \quad (9)$$

Тогда распределение μ_n совпадает с мерой Хаара t_n на $\mathfrak{S}_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что условие (9) можно переписать в виде $\mu_n(u) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+k}} \mu_{n+k}(w) P(w, u)$, где $P(w, u)$ — переходные вероятности марковского оператора, действующего из $\mathfrak{S}_{n+k}$ в $\mathfrak{S}_n$ и переводящего подстановку $w \in \mathfrak{S}_{n+k}$ в подстановку $\pi_n(wg)$, где g равномерно распределена на $\mathfrak{S}^k$. Переходя к соответствующему распределению $\bar{\mu}_{n+k}$ на пространстве разбиений Π_{n+k} , получаем

$$\mu_n(u) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+k}} \mu_{n+k}(w) P(w, u) = \sum_{\lambda \in \Pi_{n+k}} \bar{\mu}_{n+k}(\lambda) \bar{P}(\lambda, u),$$

где $\bar{P}(\lambda, u) = (|\lambda|)^{-1} \sum_{w \in [\lambda]} P(w, u)$.

Следующая лемма показывает, что если n фиксировано, $N = n + k$ достаточно велико и разбиение $\lambda \in \Pi_N$ содержит мало единичных слагаемых, то переходная вероятность $\bar{P}(\lambda, u)$ близка к мере Хаара $t_n(u) = 1/n!$

Лемма 4. Пусть $\lambda \in \Pi_N$. Обозначим через $b(\lambda)$ число единичных слагаемых в разбиении λ . Для любой подстановки $u \in \mathfrak{S}_n$

$$\bar{P}(\lambda, u) = t_n(u) + R(\lambda, u),$$

где

$$|R(\lambda, u)| \leq 1 - \frac{(N - b(\lambda))(N - b(\lambda) - 2) \cdots (N - b(\lambda) - 2(n - 1))}{N(N - 1) \cdots (N - (n - 1))}.$$

Доказательство. Будем называть *младшими* элементы $1, \dots, n$ множества $[N]$ и *старшими* — оставшиеся элементы $n+1, \dots, N$. Рассмотрим множество D всех подстановок из $\mathfrak{S}_N$ таких, что прообразы младших элементов являются старшими:

$$D = \{w \in \mathfrak{S}_N: w^{-1}(i) \in \{n+1, \dots, n+k\}, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $w \in D$. Обозначим $j_1 = w^{-1}(1), \dots, j_n = w^{-1}(n)$. Зафиксируем изоморфизм групп $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{S}[j_1, \dots, j_n]$, отождествляющий i и j_i . Очевидно, что он отождествляет $\pi_n(w)$ с $\pi_{\{j_1, \dots, j_n\}}(w)$. Более того, для любой подстановки $g \in \mathfrak{S}^k$ имеет место равенство $(wg)^{-1}(i) = w^{-1}(i)$ при всех $i = 1, \dots, n$, поскольку младшие элементы $1, \dots, n$ являются неподвижными точками подстановки g . Поэтому $\pi_n(wg)$ отождествляется с $\pi_{\{j_1, \dots, j_n\}}(wg)$ при всех $g \in \mathfrak{S}^k$. Таким образом, распределение производной подстановки $\pi_n(wg)$ на группе $\mathfrak{S}_n$ совпадает в смысле выбранного изоморфизма с распределением подстановки $\pi_{\{j_1, \dots, j_n\}}(wg)$ на $\mathfrak{S}[j_1, \dots, j_n]$. Но очевидно, что если подстановка g равномерно распределена на $\mathfrak{S}^k$, то подстановка $\pi_{\{j_1, \dots, j_n\}}(wg)$ равномерно распределена на $\mathfrak{S}[j_1, \dots, j_n]$.

Мы показали, что $P(w, u) = m_n(u)$ при $w \in D$. Отсюда

$$\overline{P}(\lambda, u) = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{w \in [\lambda]} P(w, u) = \frac{\#(D \cap |\lambda|)}{|\lambda|} m_n(u) + r(\lambda, u),$$

где $r(\lambda, u) = (|\lambda|)^{-1} \sum_{w \in [\lambda] \setminus D} P(w, u) \leq 1 - \#(D \cap |\lambda|)/|\lambda|$. Следовательно,

$$|R(\lambda, u)| \leq \left| r(\lambda, u) - m_n(u) \left(1 - \frac{\#(D \cap |\lambda|)}{|\lambda|} \right) \right| \leq 1 - \frac{\#(D \cap |\lambda|)}{|\lambda|}.$$

Таким образом, нам осталось оценить вероятность того, что случайная подстановка $w \in [\lambda]$ принадлежит множеству D .

Для получения равномерно распределенной подстановки $w \in [\lambda]$ мы применяем следующую процедуру. Рассмотрим диаграмму Юнга разбиения λ и будем размещать элементы $1, \dots, n$ последовательно в клетках этой диаграммы, полагая на каждом шаге, что все пустые (незаполненные) клетки имеют равные вероятности. Строчки заполненной диаграммы интерпретируем как циклы. Таким образом, мы получаем случайную подстановку $w \in [\lambda]$. Очевидно, что она равномерно распределена на классе $[\lambda]$.

На первом шаге процедуры назовем *плохими* клетки диаграммы, составляющие строки длины 1. Напомним, что количество таких клеток обозначалось $b(\lambda)$, так что вероятность того, что элемент 1 попадет в хорошую (т.е. не плохую) клетку, есть $(N - b(\lambda))/N$. После того, как элемент 1 размещен, назовем плохой клетку, расположенную непосредственно слева от 1 в циклическом порядке. Таким образом, на втором шаге имеется $(N - 1)$ свободная клетка и не более $(b(\lambda) + 1)$ плохих, так что вероятность того, что и 1, и 2 попадут в хорошие клетки, по крайней мере

$$\frac{N - b(\lambda)}{N} \cdot \frac{N - b(\lambda) - 2}{N - 1}.$$

Продолжим процедуру, после каждого шага добавляя к плохим клеткам левого соседа только что занятой клетки. Поскольку каждый раз число плохих клеток увеличивается не более чем на единицу, то вероятность того, что все элементы $1, \dots, n$ попадут в хорошие клетки, по крайней мере

$$\frac{N - b(\lambda)}{N} \cdot \frac{N - b(\lambda) - 2}{N - 1} \cdot \dots \cdot \frac{N - b(\lambda) - 2(n - 1)}{N - (n - 1)}.$$

Но в этом случае, во-первых, элементы $1, \dots, n$ не лежат в строках длины 1 (так как клетки 1-строк заведомо плохие) и, во-вторых, прообразы этих элементов лежат в множестве $\{n + 1, \dots, n + k\}$ (так как клетки, находящиеся слева по циклу от клеток, содержащих младшие элементы,

являются плохими, и, следовательно, заняты старшими элементами), т.е. соответствующая подстановка лежит в множестве D . Отсюда

$$\frac{\#(D \cap |\lambda|)}{|\lambda|} \geq \frac{N - b(\lambda)}{N} \cdot \frac{N - b(\lambda) - 2}{N - 1} \dots \frac{N - b(\lambda) - 2(n - 1)}{N - (n - 1)},$$

что и требовалось доказать.

Чтобы воспользоваться оценкой леммы 4, нужно показать, что в случае насыщенных мер вероятность того, что случайная подстановка имеет много неподвижных точек, асимптотически равна нулю.

Лемма 5. *Обозначим $A_N(\delta) = \{\lambda \in \Pi_N: b(\lambda)/N < \delta\}$, $0 < \delta < 1$. Если $\{\mu_N\}$ — насыщенное когерентное семейство центральных распределений на симметрических группах, то для любого $\delta \in (0, 1)$*

$$\bar{\mu}_N(A_N(\delta)) \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta \in (0, 1)$ и обозначим $A_n = A_n(\delta)$. Рассмотрим вектор $\phi_N(w) = (l_1(w)/N, l_2(w)/N, \dots) \in \Sigma$ нормированных длин циклов подстановки $w \in \mathfrak{S}_N$ в невозрастающем порядке. Пусть ν_N — образ меры μ_N под действием отображения ϕ_N . Тогда последовательность мер ν_N слабо сходится к распределению ν вектора относительных длин циклов виртуальных подстановок относительно предельной меры $\mu = \varprojlim \mu_N$. По определению насыщенных мер, распределение ν сосредоточено на симплексе Σ_1 последовательностей с единичной суммой.

Обозначим через $F_N: \Sigma \rightarrow [0, 1]$ функцию $F_N(x) = \sum_{i: x_i \geq 2/N} x_i$. Ясно, что $F_N(x) \nearrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ при $N \rightarrow \infty$, так что $F_N(x) \nearrow 1$ почти наверное относительно меры ν . Пусть $B_N = \{x \in \Sigma: F_N(x) \geq 1 - \delta\}$. Поскольку $B_N \nearrow B = \{x: \sum x_i \geq 1 - \delta\}$, то $\nu B_N \nearrow 1$.

Нетрудно видеть, что $\lambda \in A_N$ тогда и только тогда, когда $\phi_N(w) \in B_N$ для любой подстановки $w \in [\lambda]$, откуда $\bar{\mu}_N A_N = \nu B_N$. Но поскольку распределения ν_N слабо сходятся к мере ν , последовательность множеств B_N возрастает и $\nu B_N \nearrow 1$, то мы получаем, что $\nu_N B_N \rightarrow 1$, откуда следует утверждение леммы.

Теперь мы можем завершить доказательство основной леммы 3. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для разбиения $\lambda \in \Pi_N$, обозначим

$$f(\lambda) = \frac{(N - b(\lambda))(N - b(\lambda) - 2) \cdots (N - b(\lambda) - 2(n - 1))}{N(N - 1) \cdots (N - (n - 1))}.$$

Очевидно, что $f(\lambda) \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$ и $b(\lambda)/N \rightarrow 0$. Следовательно, существуют такие $N_1 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, что $1 - \varepsilon \leq f(\lambda) \leq 1$ при $N \geq N_1$ и $b(\lambda)/N < \delta$. По лемме 5 существует такое $N \geq N_1$, что

$$\bar{\mu}_N(A_N(\delta)) \geq 1 - \varepsilon.$$

По лемме 4, если $\lambda \in A_N(\delta)$, то $P(\lambda, u) = m_n(u) + R(\lambda, u)$, где $|R(\lambda, u)| \leq \varepsilon$. Отсюда

$$\mu_n(u) = m_n(u) + R_1 + R_2 - R_3,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{\lambda \in A_N(\delta)} \bar{R}(\lambda, u) \bar{\mu}_N(\lambda) \leq \varepsilon \bar{\mu}_N(A_N(\delta)) \leq \varepsilon, \\ R_2 &= \sum_{\lambda \in \Pi_N \setminus A_N(\delta)} \bar{\mu}_N(\lambda) \bar{P}(\lambda, u) \leq \bar{\mu}_N(\Pi_N \setminus A_N(\delta)) \leq \varepsilon, \\ R_3 &= m_n(u) (1 - \bar{\mu}_N(A_N(\delta))) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $|\mu_n(u) - m_n(u)| \leq 2\varepsilon$, что завершает доказательство леммы 3.

6. Сведение к случаю насыщенных мер. В этом пункте мы завершаем доказательство основной теоремы путем сведения ее к теореме 4.

Как было замечено в п. 3, множества Σ_t инвариантны относительно $\hat{T}_g$ для всех $g \in \mathfrak{S}_\infty$. Случай $t = 0$ тривиален, поскольку множество Σ_0 состоит из единственной точки. В дальнейшем мы предполагаем, что $t \neq 0$.

Из определения оператора $\hat{T}_g$ и конструкции эргодических распределений P^x следует, что при отождествлении Σ_t со стандартным симплексом Σ_1 ограничение оператора $\hat{T}_g$, $g \in \mathfrak{S}_n$, на Σ_t принимает вид

$$T_g^t = \Gamma_t^{-1} \left(\hat{T}_g \Big|_{\Sigma_t} \right) = \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \sum_{\substack{JC[n] \\ |J|=k}} T_{\pi_J(g)}.$$

Усредняя по $g \in \mathfrak{S}_n$, получаем

$$\begin{aligned} T_n^t &= \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} T_g^t = \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \sum_{\substack{JC[n] \\ |J|=k}} \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} T_{\pi_J(g)} \\ &= \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \sum_{\substack{JC[n] \\ |J|=k}} \frac{1}{k!} \sum_{h \in \mathfrak{S}[J]} T_h. \end{aligned}$$

Поскольку оператор T_g зависит только от класса подстановки g , последняя нормированная сумма равна T_k . Следовательно,

$$T_n^t = \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \sum_{\substack{JC[n] \\ |J|=k}} T_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k T_k. \quad (10)$$

Пусть ν есть $\{\hat{T}_g\}$ -инвариантная мера, и ν^t — условное распределение ν на Σ_t . Заметим, что $T_0^t = T_1^t = E$, где E — тождественный оператор на Σ_1 . В силу формулы (10) $T_2^t = t^2 T_2 + (1 - t^2) E$. Поскольку мера $\bar{\nu}^t = \Gamma_t^{-1} \nu^t$ инвариантна относительно оператора T_2^t , то из последнего равенства следует, что она T_2 -инвариантна. Рассуждая аналогичным образом, по индукции получаем, что мера $\bar{\nu}^t$ инвариантна относительно $\{T_n\}_{n=1}^\infty$. Из теоремы 4 следует, что $\bar{\nu}^t = PD(1)$ для любого $t \in [0, 1]$, что завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А. М. Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечных групп. — Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 4, с. 749–752.
2. Вершик А. М. Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1977, т. 72, с. 26–61.
3. Вершик А. М., Керов С. В. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 функтор. — Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем., 1985, т. 26, с. 3–56.
4. Дынкин Е. Б. Классы эквивалентных случайных величин. — Успехи матем. наук, 1953, т. VII, с. 125–130.
5. Керов С. В. Комбинаторные примеры в теории AF -алгебр. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1988, т. 172, с. 55–67.
6. Керов С. В. Субординаторы и действия перестановок с квазиинвариантной мерой. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 1995, т. 223, с. 181–218.
7. Керов С. В., Цилевич Н. В. Случайное дробление отрезка порождает виртуальные перестановки с распределением Ювенса. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 1995, т. 223, с. 162–180.
8. Цилевич Н. В. Распределение длин циклов бесконечных перестановок. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 1995, т. 223, с. 148–161.
9. Aldous D. Exchangeability and related topics. — Lecture Notes in Math., 1985, v. 1117, p. 1–198.
10. Furstenberg H. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. — Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Ed. by C. C. Moore. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1973, p. 193–232.
11. Kerov S. V., Olshanski G. I., Vershik A. M. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1993, v. 316, p. 773–778.
12. Kingman J. F. C. The representation of partition structures. — J. London Math. Soc., Ser. (2), 1978, v. 18, p. 374–380.
13. Kingman J. F. C. The coalescent. — Stochastic Process. Appl., 1982, v. 13, p. 235–248.
14. Watterson G. A. The stationary distribution of the infinite-many neutral alleles diffusion model. — J. Appl. Probab., 1976, v. 17, p. 662–673.

Поступила в редакцию
15.IX.1998