Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Рост сумм попарно независимых случайных величин с бесконечными средними, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 382–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:21:34

4. Шатский С. Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 1999, № 3, с. 43–81.
5. Кнутава Е. М. Асимптотические свойства условных распределений мер Стюдента в гильбертовом пространстве. — Вестник СамГУ, естественнонауч. сер., 2001, № 4, с. 42–55.
6. Rüschendorf L., de Valk V. On regression representation of stochastic processes. — Stochastic Process. Appl., 1993, v. 46, № 2, p. 183–198.
7. Poiraud-Casanova S., Thomas-Agnan Ch. Quantiles conditionnels. — J. Société Française de Statistique, 1998, v. 139, № 4, p. 31–44.
8. Дынкин Е. Б. Классы эквивалентных случайных величин. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, № 2, с. 125–130.
9. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
10. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 264 с.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
12. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966, 594 с.

Поступила в редакцию
21.V.2001

Исправленный вариант
10.II.2006

© 2006 г.

КРУГЛОВ В. М.*

РОСТ СУММ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С БЕСКОНЕЧНЫМИ СРЕДНИМИ¹⁾

Доказано, что $P\{|S_n| > a_n \text{ бесконечно часто}\} = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\}$, где $S_n = X_1 + \dots + X_n$ — сумма одинаково распределенных, попарно независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, $a_n > 0$, для некоторого t последовательность $\{a_n\}_{n \geq t}$ строго возрастает и выпукла.

Ключевые слова и фразы: случайная величина, попарная независимость.

Приводимая ниже теорема доказана В. Феллером [1] для одинаково распределенных, независимых случайных величин в предположении, что последовательность $\{a_n/n\}_{n \geq 1}$ возрастает. Б. Фристетт [2] дал простое доказательство теоремы Феллера при более ограничительном условии, что $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $a_0 = 0$, — строго возрастающая, выпуклая последовательность. Мы обобщаем теорему Феллера–Фристедта на случай попарно независимых случайных величин и слегка ослабляем требования к последовательности $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Теорема. Пусть случайные величины X_n , $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, одинаково распределены, попарно независимы, $E|X_n| = \infty$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и для некоторого $t \in \mathbb{N}$ последовательность a_n , $n \geq t$, строго возрастает и выпукла. Тогда $P\{|S_n| > a_n \text{ б.ч.}\} = 0$ или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > a_n\}$.

---

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrugl@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 05-01-00535, 05-01-00583.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что последовательность чисел $\{a_n\}_{n \geq m}$ называется выпуклой, если $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ для всех $n > m$. Из этого неравенства следует, что $2(a_n - a_m) \leq (a_{n-1} - a_m) + (a_{n+1} - a_m)$ и, в частности, $2(a_{m+1} - a_m) \leq (a_{m+2} - a_m)$. С помощью математической индукции нетрудно доказать следующее неравенство:

$$(k+1)(a_{m+k} - a_m) \leq k(a_{m+k+1} - a_m), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что $3a_{m+k} \leq a_{m+3k} + 2a_m$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m+k} = \infty$. Пусть $p \in \mathbb{N}$ таково, что $a_{m+k} \geq 2a_m$ для всех $k \geq p$. Для таких k выполняется неравенство $2a_{m+k} \leq a_{m+3k}$. Обозначим $A_k = \{|X_{m+k}| > 2a_{m+k}\}$, $A = \bigcap_{n=p+1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_n| > a_n\} = \infty$. По предположению случайные величины X_n , $n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены. Поэтому $\mathbf{P}\{|X_{m+k}| > a_{m+3k}\} = \mathbf{P}\{|X_{m+3k+j}| > a_{m+3k}\} \geq \mathbf{P}\{|X_{m+k+j}| > a_{m+3k+j}\}$ для $j = 0, 1, 2$ и, следовательно,

$$3 \sum_{k=p}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \geq 3 \sum_{k=p}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_{m+k}| > a_{m+3k}\} \geq \sum_{k=3p}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_{m+k}| > a_{m+k}\} = \infty.$$

Привлекая тот факт, что события A_k , $k \in \mathbb{N}$, попарно независимы, мы получим

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{[\sum_{i=1}^k \mathbf{P}(A_i)]^2}{\sum_{i,j=1}^k \mathbf{P}(A_i \cap A_j)} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{[\sum_{i=1}^k \mathbf{P}(A_i)]^2}{[\sum_{i=1}^k \mathbf{P}(A_i)]^2 + \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(A_i)(1 - \mathbf{P}(A_i))} = 1.$$

Отсюда по обобщенной лемме Бореля-Кантелли [3] следует, что $\mathbf{P}(A) = 1$. Из соотношений $2a_{m+k} \leq |X_{m+k}| = |S_{m+k} - S_{m+k-1}| \leq |S_{m+k}| + |S_{m+k-1}|$ следует, что $A \subseteq \bigcap_{n=p}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|S_{m+k}| > a_{m+k}\} \subseteq \{|S_n| > a_n \text{ б.ч.}\}$ и $\mathbf{P}\{|S_n| > a_n \text{ б.ч.}\} = 1$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_n| > a_n\} < \infty$. Неравенство (1) означает, что последовательность $\{b_k/k\}_{k \geq 0}$, где $b_k = a_{m+k} - a_m$, не убывает. На самом деле она возрастает до бесконечности. В противном случае найдется $c > 0$ такое, что $a_{m+k} \leq ck$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_1| > ck\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_k| > a_k\} < \infty$. Отсюда, как известно (см. [4, с. 110-112]), вытекает, что $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ в противоречие с предположением.

Положим $c_k = kr^{-1}b_r$, если $k = 0, 1, \dots, r$, и $c_k = b_k$, если $k > r$. Число $r \in \mathbb{N}$ будет выбрано позже. Нетрудно видеть, что $\{c_k\}_{k \geq 0}$ — выпуклая, строго возрастающая последовательность. Построим функцию $B(x)$, $x \in [0, \infty)$, положив $B(x) = (c_{k+1} - c_k)(x - k) + c_k$, если $x \in [k, k+1]$, $k \geq 0$. Она выпукла, и, следовательно, ее можно записать в виде неопределенного интеграла $B(x) = \int_0^x v(u) du$ некоторой неотрицательной, неубывающей функции $v(x)$, $x \in [0, \infty)$. Из этого интегрального представления легко вытекает неравенство $B(d_1) + \dots + B(d_n) \leq B(d_1 + \dots + d_n)$, справедливое для любых неотрицательных чисел $d_1, \dots, d_n$. Функция B строго возрастает. Поэтому существует обратная функция $B^{-1}(x)$, $x \in [0, \infty)$. На отрезке $[c_k, c_{k+1}]$ она имеет следующий вид: $B^{-1}(x) = (c_{k+1} - c_k)^{-1}(x - c_k) + k$. Обозначим $Z = B^{-1}(|S_m|)$, $Y_n = B^{-1}(|X_n|)$, $T_k = Z + Y_{m+1} + \dots + Y_k$, $\bar{S}_k = |S_m| + |X_{m+1}| + \dots + |X_k|$, $k > m$. Случайные величины Y_n , $n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены и попарно независимы. Ниже будет доказано, что $\mathbf{E}Y_1 < 1$ при некотором выборе r . По теореме Этемади [5] $\lim_{k \rightarrow \infty} (k - m)^{-1}T_k = \mathbf{E}Y_1$ с вероятностью единица. Поэтому для почти всех $\omega \in \Omega$ найдется $p = p(\omega) > \max\{r, m\}$ такое, что будет выполняться неравенство $T_k(\omega) < k - m$ для всех $k > p$ и, следовательно, $|S_k(\omega)| \leq \bar{S}_k(\omega) \leq B((k - m)(k - m)^{-1}T_k(\omega)) < B(k - m) = b_{k-m} = a_k - a_m < a_k$; другими словами, $\mathbf{P}\{|S_k| > a_k \text{ б.ч.}\} = 0$. Чтобы завершить доказательство теоремы, требуется убедиться, что $\mathbf{E}Y_1 < 1$ при некотором выборе r .

Из неравенства (1) следует, что $b_{k+1} = a_{m+k+1} - a_m \geq a_{m+k} + k^{-1}a_{m+k} - k^{-1}(k+1)a_m$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $k^{-1}a_{m+k} \rightarrow \infty$, то $b_{k+1} \geq a_{m+k}$ для всех k , начиная с некоторого l , и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{P}\{b_k < |X_1| \leq b_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_1| > b_k\} \leq l + \sum_{k=l+1}^{\infty} \mathbf{P}\{|X_1| > a_{m+k}\} < \infty.$$

Выберем натуральные числа q и r , $r \geq q$, так, чтобы $\sum_{k=q}^{\infty} (k+1) \mathbf{P}\{b_k < |X_1| \leq b_{k+1}\} < \frac{1}{4}$ и $rb_r^{-1} \int_0^{b_q} x d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} < \frac{1}{2}$. Так как $B^{-1}(c_k) = k$ и $c_k = b_k$ при $k \geq r$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{\infty} \int_{c_k}^{c_{k+1}} B^{-1}(x) d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} &\leq \sum_{k=r}^{\infty} B^{-1}(c_{k+1}) \mathbf{P}\{c_k < |X_1| \leq c_{k+1}\} \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} (k+1) \mathbf{P}\{b_k < |X_1| \leq b_{k+1}\} < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} B^{-1}(x) d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} &= \frac{r}{b_r} \int_0^{b_r} x d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} \\ &= \frac{r}{b_r} \int_0^{b_q} x d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} + \frac{r}{b_r} \sum_{k=q+1}^{r-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} x d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{r}{b_r} \sum_{k=q+1}^{r-1} (k+1) \frac{b_{k+1}}{k+1} \mathbf{P}\{b_k < |X_1| \leq b_{k+1}\} \\ &\leq \frac{1}{4} + \sum_{k=q+1}^{r-1} (k+1) \mathbf{P}\{b_k < |X_1| \leq b_{k+1}\} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что последовательность $\{b_k/k\}_{k \geq 1}$ не убывает. Из приведенных оценок следует, что

$$\mathbf{E}Y_1 = \int_0^{\infty} B^{-1}(x) d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c_k}^{c_{k+1}} B^{-1}(x) d\mathbf{P}\{|X_1| < x\} < \frac{3}{4}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема теряет смысл, если не существует последовательностей попарно независимых случайных величин, которые не были бы независимыми в целом. Сразу же скажем, что такие последовательности существуют. В частности, существуют последовательности случайных величин, о которых говорится в доказанной выше теореме. Упомянем некоторые публикации на эту тему. Первый пример трех зависимых событий и, следовательно, трех зависимых дискретных случайных величин, любая пара из которых попарно независима, построил С. Н. Бернштейн в своем учебнике [6, с. 47]. Обратим внимание на реакцию В. Феллера [7, с. 144] на этот пример. «Фактически такие явления настолько редки, что их возможность не была замечена до тех пор, пока С. Бернштейн не построил соответствующий пример. Этот пример является искусственным, однако его существование побуждает искать естественные примеры». В статье [8] указано, как можно построить произвольное конечное число зависимых, попарно независимых дискретных случайных величин с равномерным распределением. Аналогичные наборы случайных величин с двумя значениями построены в статье [9]. В статье [10] указано правило построения любого конечного числа зависимых, попарно независимых случайных величин с непрерывными распределениями. Из сказанного немедленно следует, что существуют бесконечные последовательности зависимых случайных величин, любые две из которых независимы. Действительно, пусть $X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}$, $m_n \geq 3$, — зависимые, попарно независимые случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $m_n \uparrow m \leq \infty$. На прямом произведении упомянутых вероятностных пространств можно построить бесконечную последовательность зависимых, попарно независимых случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, такую, что случайные величины X_k и $X_{1,k}$, $k = 1, \dots, m_1$, X_k и $X_{2,k}$, $k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$, и т.д. одинаково распределены. В статье [11] построены такие последовательности с удивительным свойством — для них не выполняется центральная предельная теорема. В статье [12]

построена последовательность зависимых, попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с тремя значениями, которая не подчиняется центральной предельной теореме и обладает целым рядом других специальных свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feller W.* A limit theorem for random variables with infinite moments. — *Amer. J. Math.*, 1946, v. 68, № 2, p. 257–262.
2. *Fristedt B.* A short proof of a known limit theorem for sum of independent random variables with infinite expectations. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, № 3, p. 1114–1115.
3. *Kochen S., Stone C.* A note on the Borel–Cantelli lemma. — *Illinois J. Math.*, 1964, v. 8, p. 248–251.
4. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974, 119 с.
5. *Etemadi N.* An elementary proof of the strong law of large numbers. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1981, v. 55, № 1, p. 119–122.
6. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
8. *O'Brien G. L.* Pairwise independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1980, v. 8, № 1, p. 170–175.
9. *Lancaster H. O.* Pairwise statistical independence. — *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 36, № 4, p. 1313–1317.
10. *Geisser S., Mantel N.* Pairwise independence of jointly dependent variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1962, v. 33, № 1, p. 290–291.
11. *Janson S.* Some pairwise independent sequences for which the central limit theorem fails. — *Stochastics*, 1988, v. 23, № 4, p. 439–448.
12. *Bradley R. C.* A stationary, pairwise independent, absolutely regular sequence for which the central limit theorem fails. — *Probab. Theory Related Fields*, 1989, v. 81, № 1, p. 1–10.

Поступила в редакцию
21.VI.2004

© 2006 г.

МИРЗАЕВ М.*, СТАРЦЕВ А. Н.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ
С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ ДВУХ ТИПОВ, ОБОБЩАЮЩЕЙ
ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ БАРТЛЕТТА–МАК-КЕНДРИКА**

Данная статья является продолжением работы [1], в которой получены предельные теоремы для числа частиц, изменивших свой тип к моменту окончания процесса, в предположении, что начальное число частиц обоих типов стремится к бесконечности. Здесь эта задача решается в условиях, когда начальное число частиц с «энергией» является фиксированным. Такое предположение приводит к рассмотрению более актуальных моделей с точки зрения их приложений, в частности, в эпидемиологии. Часть полученных результатов (теоремы 1 и 2) анонсированы в [2].

Ключевые слова и фразы: взаимодействие частиц, немарковские модели, число частиц, изменивших тип, предельные теоремы.

---

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан; e-mail: mathinst@uzsci.net