Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Молчан, О максимуме дробного броуновского движения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 111–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:53:50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1999 г.

МОЛЧАН Г. М.*

О МАКСИМУМЕ
ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹⁾

Пусть $b_\gamma(t)$, $b_\gamma(0) = 0$, — дробное броуновское движение, т.е. гауссовский процесс со структурной функцией $\mathbf{E}|b_\gamma(t) - b_\gamma(s)|^2 = |t - s|^\gamma$, $0 < \gamma < 2$. Найдены логарифмические асимптотики вероятности $P_T = \mathbf{P}\{b_\gamma(t) < 1, -\rho T < t < T\}$ при $T \rightarrow \infty$ и $\rho \geq 0$. Указанная асимптотика не зависит от γ в случае $\rho > 0$.

Ключевые слова и фразы: экстремальные значения, гауссовские процессы, дробное броуновское движение, автомодельные процессы.

1. Введение и результаты.

$$\int g'^2 \geq \int f_n'^2 + \frac{3(k+3)}{k} \int_{\mathbf{R} \setminus [-1;1]} ((k+1)x^k - 1) h(x) dx.$$

Центрированный гауссовский случайный процесс $b_\gamma(t)$, $t \in \mathbf{R}^1$, со структурной функцией вида

$$\mathbf{E}|b_\gamma(t) - b_\gamma(s)|^2 = |t - s|^\gamma \quad (1)$$

и нормировкой $b_\gamma(0) = 0$ известен как дробное броуновское движение (ФВМ) с индексом $\gamma \in (0, 2)$. Центральный индекс $\gamma = 1$ отвечает собственно броуновскому движению. ФВМ часто возникает в теории и приложениях благодаря свойству аффинной инвариантности:

$$b_\gamma(t+a) - b_\gamma(a) \stackrel{d}{=} b_\gamma(t), \quad a \in \mathbf{R}^1, \quad (2)$$

$$|\Lambda|^{-\gamma/2} b_\gamma(\Lambda t) \stackrel{d}{=} b_\gamma(t), \quad \Lambda \neq 0. \quad (3)$$

Здесь $\stackrel{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений. Согласно критерию Колмогорова [1], в условиях (1) всегда существует непрерывная модификация $b_\gamma(t)$. Важной характеристикой $b_\gamma(t)$ является распределение его максимума на конечном интервале Δ ,

$$F_\gamma(x | \Delta) = \mathbf{P}\{b_\gamma(t) < x, \forall t \in \Delta\}. \quad (4)$$

О распределении (4) известно: явный вид при $\gamma = 1$ и точная асимптотика при $x \rightarrow \infty$ в общем случае, [2]. В работе [3] поставлен вопрос об асимптотике (4) для $\Delta = (0, T)$ и $T \rightarrow \infty$. В силу масштабной инвариантности (3) имеем

$$F_\gamma(x | \Delta) = F(x\Lambda^{\gamma/2} | \Lambda\Delta). \quad (5)$$

* Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Варшавское шоссе, 79, кор. 2, 113556 Москва, Россия; e-mail: molchan@mitp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Министерства высшего образования Франции и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-0037).

Поэтому задача об асимптотике $F_\gamma(x | T\Delta)$ при $x = 1$, $T \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$, $T = 1$ эквивалентны (Δ — любой конечный отрезок, содержащий 0). В работе [3] получено интегральное уравнение типа Абеля второго рода для $F_\gamma(1 | (0, T))$ и приведены аргументы в пользу степенной асимптотики этой функции при $T \rightarrow \infty$ и γ , близких к 1. Ниже элементарными средствами доказывается следующая

Теорема 1. Для любого открытого конечного интервала $\Delta \ni 0$ при $T \rightarrow \infty$

$$\ln F_\gamma(x | T\Delta) = -\ln T \left(1 + O((\ln T)^{-1/2})\right),$$

т.е. главный порядок убывания $F_\gamma(x | T\Delta)$ не зависит от γ несмотря на сильные различия в корреляционных связях приращений $b_\gamma(t)$. Ситуация резко меняется, если 0 является граничной точкой Δ , $\Delta = (0, 1)$:

Теорема 2. Если $\Delta = (0, 1)$, тогда при $T \rightarrow \infty$

$$\ln F_\gamma(x | T\Delta) = -D \ln T \left(1 + O((\ln T)^{-1/2})\right), \quad (6)$$

где $D = 1 - \gamma/2$ есть хаусдорфова размерность множества нулей дробного броуновского движения.

Для ФВМ малые значения максимума $b_\gamma(t)$, $t \in (0, 1)$, сильно коррелированы с малыми значениями следующих случайных величин:

$\tau_{\max} = \text{Arg max}_{[0,1]} b_\gamma(t)$ — положение максимума $b_\gamma(t)$ на $[0, 1]$;

$z_- = \sup\{t \in (0, 1): b_\gamma(t) = 0\}$ — последний ноль $b_\gamma(t)$ на $[0, 1]$;

$s_+ = \text{mes}\{t \in (0, 1): b_\gamma(t) > 0\}$ — время пребывания $b_\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, выше нуля.

В случае броуновского движения, $\gamma = 1$, все перечисленные величины имеют так называемое распределение арксинуса. В общем случае $\gamma \in (0, 2)$ можно утверждать следующее:

Теорема 3. Распределение $F(x)$ любой из случайных величин $\tau_{\max}, z_-, s_+$ имеет в нуле одну и ту же асимптотику вида $\ln F(x) = D \ln x (1 + O(|\ln x|^{-1/2}))$, где $D = 1 - \gamma/2$.

Доказательства теорем 2 и 3 взаимосвязаны. По сравнению с теоремой 1 они требуют дополнительных идей и будут опубликованы отдельно. Отметим только, что здесь существенно используется следующая асимптотика при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{E} \left[\int_0^t \exp(b_\gamma(s)) ds \right]^{-1} = \frac{\gamma}{2} t^{-(1-\gamma/2)} \left(\mathbf{E} \max_{[0,1]} b_\gamma(t) + o(1) \right).$$

При $\gamma = 1$ эта асимптотика впервые появилась в работе [4].

В заключение отметим, что теорема 1 легко переносится на случай ФВМ с многомерным временем. А именно, пусть Δ — выпуклое ограниченное множество, содержащее окрестность нуля. Тогда для распределения максимума $b_\gamma(t)$, $t \in T\Delta \subset \mathbf{R}^d$, имеет место соотношение (6) с $D = d$.

2. Доказательство теоремы 1. В силу (5) доказательство теоремы 1 очевидным образом следует из трех лемм. Первые две относятся к оценкам $F_\gamma(h | (-a, 1-a))$, $a \in (0, 1)$, при $h \rightarrow 0$. (Если исходный интервал $\Delta = (-c_1, c_2)$, то $a = c_1/(c_1 + c_2)$, а $h = (T(c_1 + c_2))^{-\gamma/2}$.) Третья лемма говорит о существовании непрерывной плотности $\psi_\gamma(x)$ положения максимума $b_\gamma(t)$, $t \in (0, 1)$.

Лемма 1 (оценка снизу). Если $0 < \psi_\gamma(a) < \infty$ и $\psi_\gamma \in C(0, 1)$, то при малых h

$$F_\gamma\left(h | (-a, 1-a)\right) > \frac{1}{2} \psi_\gamma(a) (c_\gamma h)^{2/\gamma} \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{-1/\gamma}, \quad (7)$$

где c — некоторая константа, не зависящая от γ .

Доказательство. Из условий на $\psi_\gamma(a)$ следует, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\psi_\gamma(a) \delta(1 + o(1)) = \mathbf{P} \left\{ \max_{|t-a| < \delta/2} b_\gamma(t) \geq b_\gamma(s), \quad s \in (0, 1) \right\}.$$

В силу (2) положение максимума можно сместить в δ -окрестность 0 путем сдвига интервала $(0, 1)$ в $(-a, 1-a)$. Поэтому $\forall h > 0$

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(a) \delta(1+o(1)) &= \mathbf{P} \left\{ h > \max_{|t| < \delta/2} b_\gamma(t) > b_\gamma(s), |s| > \frac{\delta}{2}, s \in (-a, 1-a) \right\} \\ &+ P_\delta(h) \leq F(h \mid (-a, 1-a)) + P_\delta(h), \end{aligned}$$

где $P_\delta(h) < \mathbf{P}\{\max b_\gamma(t) > h, |t| < \delta/2\}$. Правую часть последнего неравенства оценим, используя неравенство Ферника [5]:

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{|t| < \delta/2} b_\gamma(t) > x b^{\gamma/2} c_\gamma \right\} < 10 \bar{\Phi}(x), \quad x \geq \sqrt{5},$$

где

$$\bar{\Phi}(x) = \int_x^\infty \exp(-u^2/2) du \sim x^{-1} \exp(-x^2/2), \quad x \rightarrow \infty,$$

и

$$c_\gamma = 2^{-\gamma/2} \left[1 + (2 + \sqrt{2}) \int_1^\infty \exp\left(-u^2 \gamma \frac{\ln 2}{2}\right) du \right] = O(\gamma^{-1/2}), \quad \gamma \rightarrow 0.$$

Определим $x = x(\delta)$ из условия $\bar{\Phi}(x) = \delta^{1+\rho}$, $\rho > 0$, и положим $h = c_\gamma x(\delta) \delta^{\gamma/2}$. Тогда получим $F(h \mid (-a, 1-a)) \geq \psi_\gamma(a) \delta(1+o(1))$, $\delta \rightarrow 0$.

Остается выразить δ через h : $\delta = h^{2/\gamma} (\ln 1/h)^{-1/\gamma} [4\gamma^{-1} c_\gamma^2 (1+\rho)]^{-1/\gamma} (1+o(1))$, что дает (7), поскольку $\gamma c_\gamma^2 < c < \infty$, $\gamma \in [0, 2]$.

Лемма 2 (оценка сверху). Если $0 < \psi_\gamma(a) < \infty$ и $\psi_\gamma \in C(0, 1)$, то при малых h

$$F_\gamma(h \mid (-a, 1-a)) < h^{2/\gamma} \exp\left(c_\gamma \sqrt{\ln \frac{1}{h}}\right) \psi_\gamma(a),$$

где $c_\gamma = c\gamma^{-1}(1-\gamma)^{-1/2}$ и c — некоторая константа.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ — четная финитная функция с носителем в $(-1, 1)$ и строго убывающая от 1 до 0 на $(0, 1)$. Положим $f_h = h\varphi(th^{-2/\gamma})$ и $\bar{f}_h = h - f_h$. Тогда $\bar{f}_h(0) = 0$ и

$$F_\gamma(h \mid (-a, 1-a)) = \mathbf{P}\{b_\gamma(t) - \bar{f}_h(t) < f_h(t), \forall t \in (-a, 1-a)\}. \quad (8)$$

В силу гладкости $\bar{f}_h(t)$, $t \in I_a = (-a, 1-a)$, меры, отвечающие процессам $b_\gamma(t)$ и $b_\gamma(t) - \bar{f}_h(t)$ в I_a , эквивалентны [6]. Поэтому, используя формулу Камерона–Мартина, соотношение (8) можно продолжить:

$$(8) = \exp\left\{-\frac{(\bar{f}_h, \bar{f}_h)_-}{2}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{-(b_\gamma, \bar{f}_h)_-\right\} \cdot 1_A, \quad (9)$$

где A — событие вида: $A = \{b_\gamma(t) < f_h(t), t \in I_a\}$, а $(\cdot, \cdot)_-$ — скалярное произведение гильбертова пространства функций $H_\gamma(I_a)$ с воспроизводящим ядром $B(t, s) = \mathbf{E} b_\gamma(t) b_\gamma(s)$, $t, s \in I_a \times I_a$.

Применим неравенство Гёльдера с показателями p, q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p > 1$), зависящими от h , к интегралу в (9). Получим

$$\begin{aligned} (8) &\leq \exp\left\{-\frac{(\bar{f}_h, \bar{f}_h)_-}{2}\right\} \left[\mathbf{E} \exp\left\{-p(b_\gamma, \bar{f}_h)_-\right\}\right]^{1/p} [P(A)]^{1/q} \\ &= \exp\left\{(p-1) \frac{(\bar{f}_h, \bar{f}_h)_-}{2}\right\} [P(A)]^{1/q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Событие A таково, что $b_\gamma(t) < 0$ вне $J = (-h^{2/\gamma}, h^{2/\gamma})$, а в J процесс $b_\gamma(t)$ ограничен сверху $f_h(t) > 0$ и $b_\gamma(0) = 0$. Поэтому точка максимума $b_\gamma(t)$ принадлежит J , т.е.

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \mathbf{P}\left\{\max_{|t| < h^{2/\gamma}} b_\gamma(t) > b_\gamma(s), -a < s < 1-a\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\max_{|t-a| < h^{2/\gamma}} b_\gamma(t) < b_\gamma(s), 0 < s < 1\right\} = \psi_\gamma(a) \cdot 2h^{2/\gamma} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим $(\bar{f}_h, \bar{f}_h)_-$. Согласно [6], пространство $H_{\gamma}^-((-a, 1-a))$ является замыканием гладких функций $f(t)$, $t \in I_a$, с условием $f(0) = 0$ в метрике, определяемой билинейной формой

$$(f, f)_- = c_{\gamma} \int_0^1 |\hat{f}_{\alpha}(t)|^2 t^{2\alpha} dt, \quad 2\alpha = \gamma - 1,$$

где

$$\hat{f}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} f'(x-a) dx$$

и f' — производная f . Поэтому после замены переменных: $x \rightarrow a + xh^{2/\gamma}$, $t \rightarrow a + th^{2/\gamma}$, получим с учетом finитности f_h :

$$\begin{aligned} (\bar{f}_h, \bar{f}_h)_- &= c_{\gamma} \int_{-1}^{(1-a)h^{-2/\gamma}} \left| \frac{d}{dt} \int_{-1}^{t\wedge 1} \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (a + xh^{2/\gamma})^{-\alpha} \varphi'(x) dx \right|^2 \\ &\quad \times (a + th^{2/\gamma})^{2\alpha} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

При $t > 1$ функцию $U_h(t)$, стоящую в (12) под знаком модуля, можно продифференцировать под знаком интеграла и оценить:

$$|U_h(t)| < a^{-\alpha} c_{\varphi} \int_{-1}^1 \frac{(t-x)^{-\alpha-1}}{|\Gamma(-\alpha)|} dx = O(t^{-1-\alpha}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $t^{\alpha} U_h(t) \in L^2(t_0, \infty)$, $t_0 > 1$. При $h \rightarrow 0$

$$U_h(t) \longrightarrow \frac{d}{dt} \int_{-1}^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \varphi'(x) dx = I^{(-\alpha)} \varphi'.$$

Предельная функция является дробным интегралом Вейля от φ' порядка $(-\alpha)$. Поскольку $\varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R}^1)$, то $I^{(-\alpha)} \varphi \in C^{\infty}$. Следовательно, $(f_h, f_h) = B(1 + o(1))$, $h \rightarrow 0$, где

$$B = c_{\gamma} \int_{-1}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} \int_{-1}^{t\wedge 1} \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \varphi'(x) dx \right|^2 dt < \infty.$$

Остается распорядиться константой $q > 1$. Положим $q = 1 + 0.5[B\gamma/\ln(1/h)]^{1/2}$. Тогда, соединяя (8), (10), (11) и оценку $(\bar{f}_h, \bar{f}_h)$, получим

$$F_{\gamma}\left(h \mid (-a, 1-a)\right) \leq h^{2/\gamma} \exp\left\{2\left(B\gamma^{-1} \ln \frac{1}{h}\right)^{1/2} (1 + o(1))\right\} \left[2\psi_{\gamma}(a) (1 + o(1))\right]^{1/q(h)}.$$

Отсюда следует лемма 2, поскольку $c_{\gamma} < c\gamma^{-1}(2-\gamma)^{-1}$, см. [6].

Лемма 3. Распределение положения максимума $\{b_{\gamma}(t), t \in (0, 1)\}$ абсолютно непрерывно и имеет непрерывную строго положительную плотность в $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $F(x|L)$ — распределение положения максимума $b_{\gamma}(t)$, $t \in (0, L)$. Тогда, в силу масштабной инвариантности $b_{\gamma}(t)$, $F(x|L) = F(kx|kL)$. Искомое распределение $F(x|1) = F(x)$ почти всюду дифференцируемо. Пусть это верно в точке $x < 1$, $F'(x) = \psi(x) < \infty$. Тогда для $\forall y \in (0, x)$ и $k = x/y > 1$

$$F(dy) = F(k dy | k) = P\{\tau_{[0,1]} \in \delta x, M_{[1,k]} < M_{[0,1]}\}. \quad (13)$$

Здесь τ_{Δ} и M_{Δ} — положение и значение максимума $b_{\gamma}(t)$, $t \in \Delta$, а $\delta x = k dy$. Из (13), очевидно, имеем

$$F(dy) < P(\tau_{[0,1]} \in \delta x) = F(\delta x) = \psi(x) (xy^{-1}) dy (1 + o(1)). \quad (14)$$

Поскольку y любое из $(0, x)$, а x можно выбрать из любой части $(0, 1)$, то из (13) следует абсолютная непрерывность $F(dx)$ в $(0, 1)$, $F(dx) = \psi(x) dx$. Причем в точках дифференцируемости $F(x) \psi(y) < \psi(x) x/y$, $y < x$, т.е. $x\psi(x)$ — возрастающая функция. Но тогда $\psi(x)$ может быть исправлена на множестве меры нуль так, что $\psi(x)$, $x \in [0, 1]$, будет непрерывной, за исключением счетного числа точек, где будут конечны пределы слева и справа.

Из соотношения типа (2): $b_\gamma(1-x) - b_\gamma(1) \stackrel{d}{=} b_\gamma(x)$ следует симметрия ψ : $\psi(x) = \psi(1-x)$. Пусть $\psi(x) = 0$. Тогда из (14) получим: $\psi(x) = 0$ для $0 < y < x$. В силу симметрии ψ можно считать $x > \frac{1}{2}$, и тогда $\psi \equiv 0$, $y \in (0, 1)$. Это невозможно, так как $P\{b_\gamma(x) > b_\gamma(1) \vee 0\} > 0$. Остается показать, что $A := \psi(x-0) = \psi(x+0) := B$. В силу возрастания $x\psi(x)$, $A \leq B$. А в силу симметрии $\psi(x)$, $B \leq A$. Значит, $A = B$, что завершает доказательство леммы.

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю, которому он обязан интересом к рассматриваемым вопросам и стимулирующим дискуссиям по ним.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лившиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВіМС, 1995. 246 с.
2. *Синай Я. Г.* О распределении максимума дробного броуновского движения. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, в. 2, с. 119–138.
3. *Питербарг В. И., Присяжнюк В. П.* Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса. — Теория вероятн. и матем. статист., 1978, т. 18, с. 121–134.
4. *Kawazu K., Tanaka H.* On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1557, p. 78–85.
5. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. — Lectures Notes in Math., 1975, v. 480, p. 2–187.
6. *Молчан Г. М., Голосов Ю. И.* Гауссовские процессы с асимптотически степенным спектром. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3, с. 546–549.

Поступила в редакцию
3.IX.1998

© 1999 г.

НЕЧАЕВ М. Л.*

О ХЕДЖИРОВАНИИ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ В ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ ХО–ЛИ

На стандартном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ рассматривается диффузионный аналог модели структуры процентных ставок, изначально предложенной Хо–Ли [6] для биномиальной модели. Представлено решение задачи хеджирования в среднеквадратическом для произвольного платежного обязательства $H \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ с исполнением в момент времени T . Показано, что предложенное решение справедливо для случая, когда дата погашения облигации, в которую инвестируются средства, меняется предсказуемым образом.

Ключевые слова и фразы: хеджирование в среднеквадратическом, временная структура процентных ставок, опцион (платежное обязательство), мартигальная мера.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия.