Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Нечаев, О хеджировании в среднеквадратическом в диффузионной модели Хо–Ли, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 115–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 07:22:58

Из соотношения типа (2): $b_\gamma(1-x) - b_\gamma(1) \stackrel{d}{=} b_\gamma(x)$ следует симметрия ψ : $\psi(x) = \psi(1-x)$. Пусть $\psi(x) = 0$. Тогда из (14) получим: $\psi(x) = 0$ для $0 < y < x$. В силу симметрии ψ можно считать $x > \frac{1}{2}$, и тогда $\psi \equiv 0$, $y \in (0, 1)$. Это невозможно, так как $P\{b_\gamma(x) > b_\gamma(1) \vee 0\} > 0$. Остается показать, что $A := \psi(x-0) = \psi(x+0) := B$. В силу возрастания $x\psi(x)$, $A \leq B$. А в силу симметрии $\psi(x)$, $B \leq A$. Значит, $A = B$, что завершает доказательство леммы.

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю, которому он обязан интересом к рассматриваемым вопросам и стимулирующим дискуссиям по ним.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лившиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВіМС, 1995. 246 с.
2. *Синай Я. Г.* О распределении максимума дробного броуновского движения. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, в. 2, с. 119–138.
3. *Питербарг В. И., Присяжнюк В. П.* Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса. — Теория вероятн. и матем. статист., 1978, т. 18, с. 121–134.
4. *Kawazu K., Tanaka H.* On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. — Lecture Notes in Math., 1993, v. 1557, p. 78–85.
5. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. — Lectures Notes in Math., 1975, v. 480, p. 2–187.
6. *Молчан Г. М., Голосов Ю. И.* Гауссовские процессы с асимптотически степенным спектром. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3, с. 546–549.

Поступила в редакцию
3.IX.1998

© 1999 г.

НЕЧАЕВ М. Л.*

О ХЕДЖИРОВАНИИ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ХО-ЛИ

На стандартном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ рассматривается диффузионный аналог модели структуры процентных ставок, изначально предложенной Хо-Ли [6] для биномиальной модели. Представлено решение задачи хеджирования в среднеквадратическом для произвольного платежного обязательства $H \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ с исполнением в момент времени T . Показано, что предложенное решение справедливо для случая, когда дата погашения облигации, в которую инвестируются средства, меняется предсказуемым образом.

Ключевые слова и фразы: хеджирование в среднеквадратическом, временная структура процентных ставок, опцион (платежное обязательство), мартингальная мера.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия.

1. Формулировка модели. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ — стохастический базис, где $\Omega = \{\omega_t\}_{t \geq 0}$ — множество непрерывных на $[0, \infty)$ функций, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — фильтрация, порожденная функциями $w = (w_t)_{t \geq 0}$, и $\mathbf{P}$ — винеровская мера. Предположим, что в любой момент $t \in [0, \infty)$ цена облигации $P_t(T)$ со сроком погашения $T \in [0, \infty)$ ($t \leq T$) есть дифференцируемая относительно T функция, и

$$-\frac{d}{dT} \ln(P_t(T)) = f_t(T) = f_0(T) + \int_0^t \alpha_s(T) ds + \int_0^t \sigma_s(T) dw_s. \quad (1)$$

В модели Хо-Ли ([5], [3]) в формуле (1) следует положить $\sigma_s \equiv \sigma > 0$ и $\alpha_s(T) = -\sigma \varphi_s + \sigma^2(T - s)$, где φ_s — некоторый (фиксированный) предсказуемый и ограниченный процесс.

Величина $r_t = f_t(t)$ называется мгновенной процентной ставкой, а процесс $C = (C_t)_{0 \leq t < \infty}$, $C_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ определяет банковский счет.

Пусть $\tilde{\mathbf{P}}$ — мера, эквивалентная $\mathbf{P}$ и обладающая относительно нее плотностью

$$Z_t = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^t \varphi_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds\right). \quad (2)$$

В соответствии с теоремой Гирсанова [1] $\tilde{w}_t = w_t - \int_0^t \varphi_s ds$ является винеровским процессом относительно $\tilde{\mathbf{P}}$. Исходя из (1) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} C_t &= \exp\left(\int_0^t f_0(s) ds + \sigma^2 \frac{t^3}{6} + \sigma \int_0^t \tilde{w}_s ds\right) = P_0^{-1}(t) \exp\left(\sigma^2 \frac{t^3}{6} + \sigma \int_0^t \tilde{w}_s ds\right) \\ &= P_0^{-1}(t) \exp\left(\sigma \int_0^t (t-s) d\tilde{w}_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t (t-s)^2 ds\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} P_t(T) &= P_0(T) C_t \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t (T-s)^2 ds - \sigma \int_0^t (T-s) d\tilde{w}_s\right) \\ &= P_0(T) C_t \mathcal{E}\left(-\sigma \int_0^t (T-s) d\tilde{w}_s\right). \end{aligned}$$

Ясно, что процесс $P_t(T)/C_t$ является мартингалом относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$, что свидетельствует о безарбитражных свойствах модели.

Пусть задан набор облигаций со сроками погашения $T^1, \dots, T^n$ и предсказуемый процесс $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\gamma_t = (\gamma_t^1, \gamma_t^{T^1}, \dots, \gamma_t^{T^n})$, называемый инвестиционной стратегией (портфелем). Определим капитал V_t^γ , отвечающий этой стратегии, формулой $V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} P_t(T^i)$. Предполагается, что при $t > T^i$ облигации со сроком погашения T^i в портфеле не содержатся ($\gamma_t^{T^i} = 0$). Для определенности при $t > T^i$ положим $P_t(T^i) = P_{T^i}(T^i) \equiv 1$. Стратегия $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$ называется самофинансируемой, если $dV_t^\gamma = \gamma_t^C dC_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} dP_t(T^i)$ или, в интегральной форме,

$$V_t^\gamma = V_0^\gamma + \int_0^t \gamma_s^C dC_s + \sum_{i=1}^n \int_0^{T^i} \gamma_s^{T^i} dP_s(T^i).$$

Множество самофинансируемых стратегий обозначим $\mathcal{P}_{SF}$.

2. Свойства структуры процентных ставок. Условие безарбитражности, используемое при выводе модели (см. [5]), и свойства винеровского процесса приводят к зависимости цен облигаций, о чем свидетельствует следующая лемма.

Лемма 2.1. Для любых $T, T^* \in [0, \infty)$, $\tilde{T} < \min\{T, T^*\}$ существует инвестиционная стратегия $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}_{SF}$, $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^T)$ такая, что для любого $t \leq \tilde{T}$ ($\mathbf{P}$ -п.н.) $V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \gamma_t^T P_t(T) = P_t(T^*)$.

З а м е ч а н и е. Если $T^* \leq T$, то можно положить $\tilde{T} = T^*$.

Следствие 1. Пусть $T, T^* \in [0, \infty)$, $\tilde{T} < \min\{T, T^*\}$ и $\gamma = (\gamma_t^C, \gamma_t^T)_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \in \mathcal{P}_{SF}$ — инвестиционная стратегия такая, что (Р-п.н.) $V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \gamma_t^T = P_t(T^*)$. Тогда $(0 \leq t \leq \tilde{T})$

$$\gamma_t^C = \frac{\bar{P}_t(T^*)(T - T^*)}{(T - t)}, \quad \gamma_t^T = \frac{P_t(T^*)(T^* - t)}{P_t(T)(T - t)}.$$

Лемма 2.1 показывает, что для целей хеджирования, по-видимому, достаточно использовать два актива — банковский счет и облигацию (или две различных облигаций).

Лемма 2.2. Пусть $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^{T^1}, \dots, \gamma_t^{T^n})$ представляет некоторую самофинансируемую стратегию, оперирующую банковским счетом и облигациями со сроками погашения $T^1, \dots, T^n$ соответственно. Тогда, для любого $\tilde{T} > T$ существует стратегия $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\tilde{\gamma}_t = (\tilde{\gamma}_t^C, \tilde{\gamma}_t^{\tilde{T}})$ такая, что $\tilde{\gamma} \in \mathcal{P}_{SF}$ и (Р-п.н.)

$$V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} P_t(T^i) = \tilde{\gamma}_t^C C_t + \tilde{\gamma}_t^{\tilde{T}} P_t(\tilde{T}) = V_t^{\tilde{\gamma}}.$$

Таким образом, для решения задач хеджирования с помощью стратегий, оперирующих конечным числом облигаций, на рынке, описываемом данной моделью, достаточно использовать только два актива — банковский счет и облигацию с определенным сроком погашения.

В то же время, непрерывный временной параметр позволяет за конечное время вложить средства в бесконечное число облигаций. Для формулировки соответствующего результата необходимо расширить понятие самофинансируемой стратегии. Рассмотрим предсказуемый процесс γ , $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^{T^1}, \dots, \gamma_t^{T^n})_{0 \leq t}$, где $T_i^i > t$. Будем говорить, что стратегия γ является самофинансируемой, если

$$V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} P_t(T_i^i) \quad \text{и} \quad dV_t^\gamma = \gamma_t^C dC_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} dP_t(\widehat{T_i^i}), \quad (3)$$

где знак « $\widehat{}$ » над T_i^i означает, что стохастический дифференциал берется таким образом, как если бы значение T_i^i было постоянно. Такую стратегию естественно называть самофинансируемой. Это определение полностью согласуется с подходом, представленным в [4], когда процесс $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t}$ рассматривается как пара $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^P)$, состоящая из процесса γ_t^C , определяющего количество единиц банковского счета, и мерозначного процесса $\gamma_t^P = \gamma_t^P(s)$, определяющего количество средств, вложенных в облигации. Действительно, предположим, что в каждый момент t мера $\gamma_t^P(s)$ сосредоточена в точках $T_i^i, i = 1, \dots, n$, и $\gamma_t^P(T_i^i) = \gamma_t^{T^i}$, тогда определение самофинансируемой стратегии, данное в [4] полностью совпадает с (3). Множество самофинансируемых стратегий, отвечающих условиям (3), обозначим $\mathcal{P}_{SF}$.

Ввиду расширения множества самофинансируемых стратегий необходимо усилить результат леммы 2.2.

Лемма 2.3. Пусть $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^{T^1}, \dots, \gamma_t^{T^n})$ представляет некоторую самофинансируемую стратегию. Тогда, для любого $\tilde{T} > T$ существует стратегия $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T}$, $\tilde{\gamma}_t = (\tilde{\gamma}_t^C, \tilde{\gamma}_t^{\tilde{T}})$ такая, что $\tilde{\gamma} \in \mathcal{P}_{SF}$ и (Р-п.н.)

$$V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \sum_{i=1}^n \gamma_t^{T^i} P_t(T_i^i) = \tilde{\gamma}_t^C C_t + \tilde{\gamma}_t^{\tilde{T}} P_t(\tilde{T}) = V_t^{\tilde{\gamma}}.$$

С другой стороны, предположим, что в каждый момент времени набор облигаций, в которые может вкладывать средства инвестор, ограничен в то время, как он должен реплицировать облигацию с некоторым фиксированным сроком погашения $\tilde{T}$. Возможность осуществления подобной стратегии дает

Лемма 2.4. Пусть $(T_t)_{0 \leq t}$ — предсказуемый процесс, представляющий срок погашения облигации, которая доступна для инвестирования в момент t , $T_t > t$.

Тогда для любого $\tilde{T} \in [0, \infty)$ существует стратегия $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$, $\gamma_t = (\gamma_t^C, \gamma_t^{T_t})$ такая, что (Р-п.н.) $V_t^\gamma = \gamma_t^C C_t + \gamma_t^{T_t} P_t(T_t) = P_t(\tilde{T})$. При этом (ср. с формулами следствия 1)

$$\gamma_t^C = \frac{P_t(\tilde{T})(T_t - \tilde{T})}{C_t(T_t - t)}, \quad \gamma_t^{T_t} = \frac{P_t(\tilde{T})(\tilde{T} - t)}{P_t(T_t)(T_t - t)}. \quad (4)$$

3. Задача хеджирования в среднеквадратическом. Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: для заданной случайной величины $H \in \mathcal{F}_T$ найти стратегию $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T} \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$ такую, что для любой стратегии $\gamma \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{H}{C_T} - \frac{V_T^{\tilde{\gamma}}}{C_T} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{H}{C_T} - \frac{V_T^\gamma}{C_T} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Задача (5) представляет непрерывный аналог задачи хеджирования в среднеквадратическом на рынке облигаций в модели Хо-Ли. То, что в формулировке используются дисконтированные величины, отражает естественное желание инвестора учесть инфляцию и сравнивать результаты в единицах банковского счета, т.е. в реальном, а не номинальном выражении.

В этом случае следует полагать, что $H/C_T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F})_T$. Ввиду леммы 2.3, достаточно рассмотреть решение задачи для портфеля, состоящего из одной облигации и банковского счета. Один из возможных вариантов решения задачи (3.5) дает следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $T < \tilde{T} \in [0, \infty)$, $H/C_T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_T)$, тогда существует стратегия $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T} \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$, $\tilde{\gamma}_t = (\tilde{\gamma}_t^C, \tilde{\gamma}_t^{T_t})$ такая, что для любой стратегии $\gamma \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$ выполнено (5), причем

$$\tilde{\gamma}_t^{T_t} = \frac{C_t}{P_t(\tilde{T})\sigma(\tilde{T} - t)} \left[\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\frac{H}{C_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \psi_t - \hat{\xi}_t \right] - \frac{\psi_t}{P_t(\tilde{T})\sigma(\tilde{T} - t)} V_t^{\tilde{\gamma}}, \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}_t^C = \frac{V_t^{\tilde{\gamma}}}{C_t} \left(1 + \frac{\psi_t}{\sigma(\tilde{T} - t)} \right) - \frac{1}{\sigma(\tilde{T} - t)} \left[\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\frac{H}{C_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \psi_t - \hat{\xi}_t \right], \quad (7)$$

где $\hat{\xi}$ и ψ — предсказуемые процессы, определяемые мартингалным представлением процессов, порожденных H и процессом плотности $\tilde{P}$ относительно $\mathbf{P}$ (см. формулу (1.2)).

З а м е ч а н и е. Предположим, что $\hat{H}$ — константа, а φ_t — детерминированная функция, тогда

$$\tilde{\gamma}_t^{T_t} = \frac{\varphi_t C_t}{P_t(\tilde{T})\sigma(\tilde{T} - t)} \left(\hat{H} - \int_0^t \tilde{\gamma}_s^{T_s} d\tilde{P}_s(\tilde{T}) \right) = \frac{\varphi_t C_t}{P_t(\tilde{T})\sigma(\tilde{T} - t)} (\hat{H} - G_t(\tilde{\gamma})),$$

что полностью согласуется с решением задачи хеджирования в среднеквадратическом для диффузионной модели (B, S) -рынка с постоянными коэффициентами (см. [7]).

Из леммы 3.1 и леммы 2.4 получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть $(T_t)_{0 \leq t}$ — предсказуемый процесс, $T_t > t$, $T \in [0, \infty)$ и $H \in \mathcal{F}_T$, $H/C_T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_T)$. Тогда, существует стратегия $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T} \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$, $\tilde{\gamma}_t = (\tilde{\gamma}_t^C, \tilde{\gamma}_t^{T_t})$ такая, что для любой стратегии $\gamma \in \overline{\mathcal{P}}_{SF}$ выполнено неравенство (5).

З а м е ч а н и е. Выберем некоторое $\tilde{T} > T$, тогда, воспользовавшись (4), получим явную форму для стратегии $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}_t^{T_t} = \frac{C_t}{P_t(T_t)\sigma(T_t - t)} \left[\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\frac{H}{C_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \psi_t - \hat{\xi}_t \right] - \frac{\psi_t}{P_t(T_t)\sigma(T_t - t)} V_t^{\tilde{\gamma}},$$

$$\tilde{\gamma}_t^C = \frac{V_t^{\tilde{\gamma}}}{C_t} \left(1 + \frac{\psi_t}{\sigma(T_t - t)} \right) - \frac{1}{\sigma(T_t - t)} \left[\mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[\frac{H}{C_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \psi_t - \hat{\xi}_t \right].$$

Очевидно, что при $T_t = \tilde{T} = \text{const}$, указанные формулы совпадают с (7) и (6).

Работа выполнена под руководством д.ф.-м.н. А. В. Мельникова, которому автор выражает свою благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Мельников А. В., Нечаев М. Л. К вопросу о хеджировании платежных обязательств в среднеквадратическом. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 672–691.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998.
4. Björk T., Di Masi G., Kabanov Yu., Runggaldier W. Towards a general theory of bond markets. — Finance and Stochastics, 1997, v. 1, p. 141–174.
5. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. — Econometrica, 1992, v. 60, № 1, p. 77–105.
6. Ho T. S. Y., Lee S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. — Journal of Finance, 1986, v. XLI, № 5, p. 1011–1029.
7. Richardson H. R. Minimum variance result in continuous trading portfolio optimization. — Man. Sci., 1989, v. 35, № 9.
8. Schweizer M. Mean-variance hedging for general claims. — Ann. Appl. Probab., 1992, v. 2, № 1, p. 171–179.
9. Schweizer M. Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 206–236.

Поступила в редакцию
4.II.1999

© 1999 г.

НОВАК С. Ю.

О МОДЕ НЕИЗВЕСТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Работа посвящена непараметрическому оцениванию моды неизвестного вероятностного распределения. Предложен новый подход к постановке задачи о выборе параметров ядерной оценки моды. Найдены оптимальные значения этих параметров. Рассмотрены пути обобщения указанной задачи.

Ключевые слова и фразы: мода вероятностного распределения, ядерные оценки плотности.

1. Введение. Модой распределения случайной величины (с.в.) X называется число $\theta = \inf\{x: f(x) = \sup_t f(t)\}$, где f — плотность распределения с.в. X . Требуется оценить θ по выборке $X_1, \dots, X_n$ независимых наблюдений над распределением с.в. X .

Естественной оценкой числа θ является выборочная мода θ_n :

$$\theta_n = \inf\left\{x: f_n(x) = \sup_t f_n(t)\right\}, \quad (1)$$

где f_n — ядерная оценка плотности:

$$f_n(x) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^n f_\gamma\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \quad (2)$$

параметр сглаживания h и ядро f_γ выбираются статистиком. Здесь и ниже для любой с.в. ξ символ f_ξ обозначает плотность распределения случайной величины ξ ; $f \equiv f_X$, φ есть плотность стандартного нормального распределения. Равенство (2), на наш взгляд, удобнее переписать в виде

$$f_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{x+h\gamma}(X_i). \quad (2^*)$$