Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, О моде неизвестного вероятностного распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 119–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:27:14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Мельников А. В., Нечаев М. Л. К вопросу о хеджировании платежных обязательств в среднеквадратическом. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 672–691.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998.
4. Björk T., Di Masi G., Kabanov Yu., Runggaldier W. Towards a general theory of bond markets. — Finance and Stochastics, 1997, v. 1, p. 141–174.
5. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. — Econometrica, 1992, v. 60, № 1, p. 77–105.
6. Ho T. S. Y., Lee S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. — Journal of Finance, 1986, v. XLI, № 5, p. 1011–1029.
7. Richardson H. R. Minimum variance result in continuous trading portfolio optimization. — Man. Sci., 1989, v. 35, № 9.
8. Schweizer M. Mean-variance hedging for general claims. — Ann. Appl. Probab., 1992, v. 2, № 1, p. 171–179.
9. Schweizer M. Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 206–236.

Поступила в редакцию
4.II.1999

© 1999 г.

НОВАК С. Ю.

О МОДЕ НЕИЗВЕСТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Работа посвящена непараметрическому оцениванию моды неизвестного вероятностного распределения. Предложен новый подход к постановке задачи о выборе параметров ядерной оценки моды. Найдены оптимальные значения этих параметров. Рассмотрены пути обобщения указанной задачи.

Ключевые слова и фразы: мода вероятностного распределения, ядерные оценки плотности.

1. Введение. Модой распределения случайной величины (с.в.) X называется число $\theta = \inf\{x: f(x) = \sup_t f(t)\}$, где f — плотность распределения с.в. X . Требуется оценить θ по выборке $X_1, \dots, X_n$ независимых наблюдений над распределением с.в. X .

Естественной оценкой числа θ является выборочная мода θ_n :

$$\theta_n = \inf\left\{x: f_n(x) = \sup_t f_n(t)\right\}, \quad (1)$$

где f_n — ядерная оценка плотности:

$$f_n(x) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^n f_\gamma\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \quad (2)$$

параметр сглаживания h и ядро f_γ выбираются статистиком. Здесь и ниже для любой с.в. ξ символ f_ξ обозначает плотность распределения случайной величины ξ ; $f \equiv f_X$, φ есть плотность стандартного нормального распределения. Равенство (2), на наш взгляд, удобнее переписать в виде

$$f_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{x+h\gamma}(X_i). \quad (2^*)$$

Условия состоятельности и асимптотической нормальности оценки (1) найдены в [13], [8], [3], [4]. В [3] отмечено, что при определенных условиях на f и f_γ

$$\left[f''(\theta) \right]^2 E(\theta_n - \theta)^2 \sim \left[\frac{h^2 m_2 f^{(3)}(\theta)}{2} \right]^2 + \frac{\nu f(\theta)}{nh^3}, \quad (3)$$

если $h \equiv h(n) \rightarrow 0$, $nh^3 \rightarrow \infty$; $\nu \equiv \nu(\gamma) = \int f_\gamma'^2$, $m_i \equiv m_i(\gamma) = E\gamma^i$.

Соотношение (3) может быть получено с помощью известных результатов об асимптотике ядерных оценок производных f' , f'' и следующего наблюдения, справедливого для достаточно гладких функций f и f_γ (см. [13]): $0 = f_n'(\theta) + (\theta_n - \theta) f_n''(\theta) + o_p(|\theta_n - \theta|)$, откуда $\theta_n - \theta \approx -f_n'(\theta)/f_n''(\theta)$. Кроме того, нетрудно убедиться, что для достаточно гладких f и f_γ

$$E f_n'(x) = E f'(x + h\gamma) \approx f'(x) + h^2 f'''(x) \frac{E\gamma^2}{2}, \quad D f_n'(x) \sim \frac{\nu f(x)}{nh^3}. \quad (4)$$

В свете соотношения (3) естественно поставить вопрос об оптимальном выборе параметра сглаживания h и ядра f_γ . В [3] предложено выбирать параметр $h = h(n)$ так, чтобы второе слагаемое в правой части (3) доминировало первое, после чего необходимо отыскать ядро f_ξ такое, чтобы выполнялось

$$\nu(\xi) = \min_\gamma \nu(\gamma). \quad (5)$$

Показано [3], [11], что решением данной задачи в классе абсолютно непрерывных распределений является ядро Епанечникова $f_\xi(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) 1\{|x| \leq 1\}$.

Отметим, что предположение о пренебрежимой малости первого слагаемого в правой части (3) по сравнению со вторым означает, что $h \ll n^{-1/7}$, откуда $E(\theta_n - \theta)^2 \gg n^{-4/7}$. Но из (3) следует, что $E(\theta_n - \theta)^2 = O(n^{-4/7})$ при $h(n) \sim cn^{-1/7}$. Таким образом, задачу отыскания оптимального ядра f_ξ среди всех неотрицательных абсолютно непрерывных ядер нельзя считать решенной.

В настоящей заметке предлагается иной подход к постановке задачи о выборе оптимальных значений параметров h и f_γ .

2. Оптимальные ядра. Заметим, что минимум правой части (3) по h достигается на $h = h_*$, где

$$nh_*^7 = 3\nu f(\theta) \left[E\gamma^2 f'''(\theta) \right]^{-2}. \quad (6)$$

При таком выборе h правая часть (3) примет вид

$$\frac{7}{12} n^{-4/7} \left[f''(\theta) \right]^{-2} \left[3\nu f(\theta) \right]^{4/7} \left[\left| f'''(\theta) \right| E\gamma^2 \right]^{6/7}. \quad (7)$$

Отметим, что параметр h_* является «теоретическим» — на практике в правую часть (6) вместо f и f''' подставляют их состоятельные оценки, получая таким образом «адаптивный» вариант соответствующей статистики (ср. [16]), либо определяют h_* равенством $nh_*^7 = c\nu/m_2^2$.

В свете соотношений (3), (7) предлагается решать задачу минимизации функционала

$$R(\gamma) = \nu^2 (E\gamma^2)^3 \quad (8)$$

на множестве $\mathcal{D}$ распределений с абсолютно непрерывными плотностями.

Аналогичная задача другими методами решалась в [5], где в качестве $\mathcal{D}$ фактически взят класс неотрицательных ядер g , равных нулю вне интервала вида $[-T; T]$, причем требовалось, чтобы производная g' в интервале $[-T; T]$ меняла знак ровно один раз, а также в [10], где предполагалось, что $g(0) > 0$. Предлагаемый в настоящей заметке подход позволяет освободиться от упомянутых ограничений.

Теорема 1. Пусть

$$f_\xi(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 1\{|x| \leq 1\}. \quad (9)$$

Тогда $R(\xi) = \min_{\gamma \in \mathcal{D}} R(\gamma)$.

З а м е ч а н и е. Тот факт, что оптимальное ядро f_ξ с необходимостью является четной функцией, может быть доказан и непосредственно (см. [5, Appendix]). Отметим также, что функционал (8) инвариантен относительно замены γ на $c\gamma$.

Сравним значение функционала $R(\gamma)$ для некоторых распределений:

N_2	$f_\gamma(x)$	$\text{supp } f_\gamma$	m_2	$\nu(\gamma)$	$R(\gamma)$
1	$e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$	$(-\infty; \infty)$	1	$(4\sqrt{\pi})^{-1}$	$(16\pi)^{-1} \approx 0.0199$
2	$\frac{3}{4}(1-x^2)$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	0.018
3	$\frac{15}{16}(1-x^2)^2$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{7}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{225}{7^5} \approx 0.013$
4	$\frac{25}{32}(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{5}\right)$	$[-1; 1]$	$\frac{4}{21}$	$\frac{85}{56}$	$\frac{289}{7^5} \cdot \frac{25}{27} \approx 0.016$
5	$1- x $	$[-1; 1]$	$\frac{1}{6}$	2	$\frac{1}{54} \approx 0.0185$

Таким образом, если параметр сглаживания выбран согласно (6), а ядро — согласно (9), то при условиях, обеспечивающих справедливость соотношения (3),

$$\mathbf{E}(\theta_n - \theta)^2 \sim \frac{7}{12} n^{-4/7} \left[f''(\theta) \right]^{-2} \left[3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^{-5} f^2(\theta) \left| f'''(\theta) \right|^3 \right]^{2/7}.$$

При дополнительных ограничениях это соотношение останется справедливым и при замене θ, f и $f^{(3)}$ в (6) их состоятельными оценками.

Для любого четного натурального числа k положим

$$R_k(\gamma) = \nu^k (\mathbf{E}\gamma^k)^3. \quad (10)$$

Рассмотрим более общую задачу минимизации функционала $R_k(\gamma)$ на множестве $\mathcal{D}$.

Проблема такого рода может возникнуть при использовании вместо ядерных оценок (2) с обобщенными ядрами f_γ так называемых улучшенных неотрицательных оценок плотности (УНОП), т.е. неотрицательных оценок, обеспечивающих тот же порядок среднеквадратической аппроксимации, что и ядерные оценки с обобщенными ядрами (см. [1], [9], [14]). При определенных условиях на f и f_γ для таких оценок $\hat{f}_n(x)$

$$\mathbf{E}\hat{f}_n(x) - f(x) \rightarrow c_0(x, k) h^k \mathbf{E}\gamma^k \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

К примеру, (*) выполняется для оценки Абрамсона $f_n^*(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((x - X_i) \sqrt{f(X_i)}) / \sqrt{f(X_i)}$. Естественно ожидать, что аналогичное (*) соотношение верно и для $\hat{f}_n(x)$, т.е.

$$\mathbf{E}\hat{f}_n'(x) - f'(x) \rightarrow c_1(x, k) h^k m_k \quad (n \rightarrow \infty). \quad (*)$$

Поскольку у всех известных оценок $f'(x)$ дисперсия (при определенных предположениях) убывает как $c(x)\nu/nh^3$, правая часть (3) примет вид

$$c_2(\theta, k) h^{2k} m_k^2 + c_3(\theta, x) \frac{\nu}{nh^3}. \quad (11)$$

Минимум этого выражения по h достигается на $h_* = c(\theta, k)(\nu/nm_k^2)^{1/(3+2k)}$, а (11) при этом убывает как $n^{-2k/(3+2k)} c_4(\theta, k) [R_k(\gamma)]^{2/(3+2k)}$.

Подробнее об УНОП см. в [7], [15], [12].

Теорема 1*. Пусть распределение случайной величины $\eta \equiv \eta(k)$ имеет плотность

$$f_\eta(x) = \frac{3(k+3)}{4k(k+2)} \left[k - (k+2)x^2 + 2x^{k+2} \right] 1\{ |x| \leq 1 \}. \quad (12)$$

Тогда для любого четного $k \in \mathbb{N}$

$$R_k(\eta) = \min_{\gamma \in \mathcal{D}} R_k(\gamma). \quad (13)$$

При $k = 2$ из (13) следует утверждение теоремы 1. Если $k = 4$, то оптимальная плотность имеет вид

$$f_{\eta_4}(x) = \frac{7}{16} (1 - x^2)^2 (2 + x^2) 1\{|x| \leq 1\}. \quad (14)$$

Отметим, что в [5] рассматривалась задача минимизации функционала $R_4(\gamma)$ в классе $\mathcal{D}_4$ обобщенных распределений, удовлетворяющих условию $m_i \equiv \int x^i f_\gamma(x) dx = 0$ при $1 \leq i \leq 3$, $m_4 \neq 0$. Из результатов [5] следует, что минимум $\min_{\gamma \in \mathcal{D}_4} R_4(\gamma)$ достигается на обобщенном распределении с плотностью

$$f_{\eta_*} = \frac{105}{64} (1 - x^2)^2 (1 - 3x^2) 1\{|x| \leq 1\}. \quad (15)$$

Смещение ядерных оценок f_n, f'_n с ядром (15) убывает при $h \rightarrow 0$ как $O(h^4)$, но f_n не является неотрицательной функцией (и, следовательно, плотностью вероятностного распределения).

Доказательство теоремы 1*. Заметим, что $E\eta^k = 3/(k+1)(2k+3)$. Поскольку функционал (10) инвариантен относительно замены γ на $c\gamma$, достаточно найти точку минимума функционала $\nu(\gamma)$ при условии $E\gamma^k = 3/(k+1)(2k+3)$.

Пусть $\mathcal{D}_*$ — множество плотностей из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих условиям

$$(i) \quad \int g(x) dx = 1, \quad (ii) \quad \int x^k g(x) dx = \frac{3}{(k+1)(2k+3)}.$$

Покажем, что для любой функции $g \in \mathcal{D}_*$

$$r(g) \equiv \int g'^2 \geq r(f_\eta). \quad (16)$$

Положим $h = g - f_\eta$. Заметим, что

$$f'_\eta(x) = \frac{3(k+3)}{2k} x(x^k - 1), \quad f''_\eta(x) = \frac{3(k+3)}{2k} ((k+1)x^k - 1).$$

Тогда, поскольку $f'_\eta(\pm 1) = 0$, имеем:

$$\int g'^2 \geq \int f_\eta'^2 + 2 \int_{-1}^1 f'_\eta h' = \int f_\eta'^2 - 2 \int_{-1}^1 f''_\eta h.$$

Ввиду (i), (ii), $\int h(x) dx = \int x^k h(x) dx = 0$. Поэтому $\int h(x) ((k+1)x^k - 1) dx = 0$, откуда

$$\int g'^2 \geq \int f_\eta'^2 + \frac{3(k+3)}{k} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1;1]} ((k+1)x^k - 1) h(x) dx.$$

Но $h(x) \geq 0$ при $x \notin [-1;1]$ вследствие неотрицательности функции g . Справедливость соотношения (16) теперь очевидна. Теорема доказана.

Изложенный выше подход близок к предложенному в [2, гл. 5] способу нахождения точки минимума функционала $(Ef_\gamma(\gamma))^k E\gamma^k$.

Ядро (12) можно отыскать и методами вариационного исчисления [6], если ограничиться классом неотрицательных абсолютных непрерывных функций, равных нулю вне некоторого интервала вида $[-T; T]$, и заметить, что условия (i), (ii) для таких функций представимы в виде

$$(i') \quad \int x g'(x) dx = -1, \quad (ii') \quad \int x^{k+1} g'(x) dx = -\frac{3}{2k+3}.$$

Автор признателен рецензенту за полезное замечание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramson I. S.* On bandwidth variation in kernel estimates — a squareroot law. — *Ann. Statist.*, 1982, v. 10, № 4, p. 1217–1223.
2. *Devroye L., Györfi L.* Nonparametric Density Estimation: The L_1 View. New York: Wiley, 1985.
3. *Eddy W. F.* Optimum kernel estimators of the mode. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, № 4, p. 870–882.
4. *Eddy W. F.* The asymptotic distribution of kernel estimators of the mode. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1982, v. 59, p. 279–290.
5. *Gasser T., Müller H.-G., Mammitzsch V.* Kernels for nonparametric curve estimation. — *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 1985, v. 47, № 2, p. 238–252.
6. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
7. *Hall P.* On global properties of variable bandwidth density estimators. — *Ann. Statist.*, 1992, v. 20, № 2, p. 762–778.
8. *Конаков В. Д.* Об асимптотической нормальности моды многомерных распределений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т. XVIII, в. 4, с. 836–842.
9. *Кошкин Г. М.* Улучшенная неотрицательная ядерная оценка плотности. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1988, т. XXXIII, № 4, с. 817–822.
10. *Mammitzsch V.* Asymptotically optimal kernels for average derivative estimation. — *Prace Nauk. Acad. Econ. O. Langego, Wroclaw*, 1990, v. 513, p. 278–289.
11. *Müller H.-G.* Nonparametric Regression Analysis of Longitudinal Data. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 199 p.
12. *Новак С. Ю.* Обобщенная ядерная оценка плотности. — *Теория вероятн. и ее примен.* (в печати).
13. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode. — *Ann. Math. Statist.*, 1962, v. 33, p. 1065–1076.
14. *Terrel G. R., Scott D. W.* On improving convergence rates for nonnegative kernel density estimator. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, p. 1160–1163.
15. *Terrel G. R., Scott D. W.* Variable kernel density estimation. — *Ann. Statist.*, 1992, v. 20, № 3, p. 1236–1265.
16. *Woodroffe M.* On choosing a Delta-sequence. — *Ann. Math. Statist.*, 1970, v. 41, № 5, p. 1665–1671.

Поступила в редакцию
28.I.1997

© 1999 г.

РОЗАНОВ Ю. А., * САНСО Ф.**

**О СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

С применением надлежащих функциональных пространств, предлагается постановка и решение общих граничных задач для гармонических случайных полей.

Ключевые слова и фразы: банаховы суперпространства, обобщенное уравнение Лапласа, обобщенные граничные значения.

* IAMI-CNR, Milano, Italia.

** Politecnico di Milano, Milano, Italia.