Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Розанов, Ф. Сансо, О стохастических граничных задачах для гармонических функций в банаховых пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 123–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:12:29

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramson I. S.* On bandwidth variation in kernel estimates — a squareroot law. — *Ann. Statist.*, 1982, v. 10, № 4, p. 1217–1223.
2. *Devroye L., Györfi L.* Nonparametric Density Estimation: The L_1 View. New York: Wiley, 1985.
3. *Eddy W. F.* Optimum kernel estimators of the mode. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, № 4, p. 870–882.
4. *Eddy W. F.* The asymptotic distribution of kernel estimators of the mode. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1982, v. 59, p. 279–290.
5. *Gasser T., Müller H.-G., Mammitzsch V.* Kernels for nonparametric curve estimation. — *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 1985, v. 47, № 2, p. 238–252.
6. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
7. *Hall P.* On global properties of variable bandwidth density estimators. — *Ann. Statist.*, 1992, v. 20, № 2, p. 762–778.
8. *Конаков В. Д.* Об асимптотической нормальности моды многомерных распределений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т. XVIII, в. 4, с. 836–842.
9. *Кошкин Г. М.* Улучшенная неотрицательная ядерная оценка плотности. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1988, т. XXXIII, № 4, с. 817–822.
10. *Mammitzsch V.* Asymptotically optimal kernels for average derivative estimation. — *Prace Nauk. Acad. Econ. O. Langego, Wroclaw*, 1990, v. 513, p. 278–289.
11. *Müller H.-G.* Nonparametric Regression Analysis of Longitudinal Data. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 199 p.
12. *Новак С. Ю.* Обобщенная ядерная оценка плотности. — *Теория вероятн. и ее примен.* (в печати).
13. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode. — *Ann. Math. Statist.*, 1962, v. 33, p. 1065–1076.
14. *Terrel G. R., Scott D. W.* On improving convergence rates for nonnegative kernel density estimator. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, p. 1160–1163.
15. *Terrel G. R., Scott D. W.* Variable kernel density estimation. — *Ann. Statist.*, 1992, v. 20, № 3, p. 1236–1265.
16. *Woodroffe M.* On choosing a Delta-sequence. — *Ann. Math. Statist.*, 1970, v. 41, № 5, p. 1665–1671.

Поступила в редакцию
28.I.1997

© 1999 г.

РОЗАНОВ Ю. А., * САНСО Ф.**

**О СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ
ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

С применением надлежащих функциональных пространств, предлагается постановка и решение общих граничных задач для гармонических случайных полей.

Ключевые слова и фразы: банаховы суперпространства, обобщенное уравнение Лапласа, обобщенные граничные значения.

* IAMI-CNR, Milano, Italia.

** Politecnico di Milano, Milano, Italia.

1. Введение. В ряде приложений (например, в математической геодезии) возникает задача определить гармоническую функцию в области $G \subset \mathbf{R}^d$ по крайне нерегулярным (стохастическим) данным на границе $\Gamma = \partial G$.

Отметим, что поведение самой гармонической функции вблизи границы может быть крайне хаотичным. Например, стохастический интеграл Пуассона

$$\xi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} \eta(dt)$$

по стохастической гауссовской мере $\eta(dt)$: $\mathbf{E} \eta(dt) = 0$, $\mathbf{E} |\eta(dt)|^2 = dt$, задает в единичном диске $(r, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi]$ гармоническую функцию ξ такую, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \xi(r, \theta) = -\infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \xi(r, \theta) = +\infty$$

независимо для различных $\theta \in [0, 2\pi]$.

Соответственно, в общем случае нужно еще определить, что имеется в виду относительно «граничных данных». Для иллюстрации рассмотрим *регулярную* функцию $\xi = \xi^{(0)}$ и ее нормальную производную $\xi^{(1)}$ на границе $\Gamma = \partial G$, где граничные данные $(x, \xi) = \int_{\Gamma} [x_0 \xi^{(0)} + x_1 \xi^{(1)}] dt$ получены с помощью *граничных пробных функций* x , результат применения которых представлен в правой части с соответствующими функциями x_0, x_1 на границе; совокупность $X(\Gamma)$ примененных пробных функций определяет *тип* рассматриваемой граничной задачи (напомним здесь о задачах Дирихле–Неймана, например). Чтобы быть более точными, рассмотрим $\xi \in U(G)$ из известного соболевского пространства $U(G) = W_2^2(G)$. В этом случае мы можем применить пробные функции из сопряженного соболевского пространства $X(G) = W_2^{-2}(G) = [C_0^\infty(G)]$, являющегося замыканием пространства пробных функций $x \in C_0^\infty(G)$; *граничные* функции $x \in X(\Gamma)$ суть обобщенные функции $x = (x, u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, с носителями $\text{supp } x \in \Gamma$ на границе. Применение этих пробных функций $x \in X(\Gamma)$ из определенного множества $X(\Gamma) \subseteq X(G)$ дает представленные выше граничные данные (с соответствующими x_0, x_1) относительно граничного следа самой функции $\xi = \xi^{(0)}$ и ее нормальной производной $\xi^{(1)}$. В этом смысле мы можем иметь дело со стохастическими граничными данными для $\xi \in U(G)$ из соболевского *суперпространства* $\underline{U}(G) = \underline{W}_2^2(G)$ обобщенных случайных функций $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, непрерывных в среднеквадратичном относительно нормы $\|\varphi\|_X$ в $X(G) = W_2^{-2}(G)$:

$$\|\xi\|_{\underline{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|\varphi\|_2 \leq 1} \left(\mathbf{E} |(\varphi, \xi)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Именно, любые обобщенные пробные функции $x \in X(G) = [C_0^\infty(G)]$ могут быть применены к ξ с результатом $(x, \xi) = \lim_{\varphi \rightarrow x} (\varphi, \xi)$. В частности, в этом смысле могут быть *определены* представленные ранее граничные данные относительно обобщенного граничного следа самой функции $\xi = \xi^{(0)}$ и ее нормальной производной $\xi^{(1)}$ — эти данные получаются с помощью соответствующих граничных пробных функций $x \in X(\Gamma) \subseteq X(G)$. Отметим, что поведение *гармонической* функции $\xi \in \underline{W}_2^2(G)$ вблизи границы $\Gamma = \partial G$ может быть крайне хаотичным (аналогично тому, как это происходит в примере со стохастическим интегралом Пуассона), и это еще более относится к ее нормальной производной $\xi^{(1)}$.

Рассматривая стохастические граничные задачи, естественно обратиться к известным классическим результатам, с надеждой на их надлежащее применение.

Допустим, в регулярном детерминированном случае рассматривается граничная задача, касающаяся гармонической функции $u \in U(G)$ из определенного функционального пространства $U(G)$ с граничными условиями, заданными с помощью некоторого *граничного оператора* B : $U(G) \ni u \rightarrow v \in V(\Gamma)$, и для любой граничной функции $v \in V(\Gamma)$ имеется единственное решение уравнения Лапласа

$$Lu = 0 \tag{1}$$

в области $G \subseteq \mathbf{R}^d$ такое, что

$$Bu = v. \tag{2}$$

Скажем, здесь B есть линейный ограниченный оператор, отображающий рефлексивное банахово пространство $U(G) \supseteq C_0^\infty(G)$ в некоторое банахово пространство $V(\Gamma)$ на границе $\Gamma = \partial G$ таким образом, что $BC_0^\infty = 0$. Допустим, элементы $u \in U(G)$ суть обобщенные функции в области $G \subseteq \mathbf{R}^d$: $u = (\varphi, u)$, $\varphi \in C_0^\infty$, такие, что значения (φ, u) непрерывны относительно $u \in U(G)$, так что все пробные функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ принадлежат сопряженному пространству $X(G) = U(G)^*$, которое можно рассматривать как замыкание

$$X(G) = [C_0^\infty(G)] \quad (3)$$

пространства пробных функций $C_0^\infty(G)$; поясним, что условие $(\varphi, u) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty$, для обобщенных функций $u \in U(G) = X(G)^*$ означает $u = 0$.

Для обобщенной функции $u \in U(G)$ уравнение (1) означает, что $(\varphi, Lu) = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, и мы можем перейти к своего рода сопряженному уравнению

$$(L^* \varphi, u) = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \quad (4)$$

с пробными функциями $x = L^* \varphi$ как элементами сопряженного пространства $X(G)$.

Аналогично, от граничного уравнения (2) мы можем перейти к эквивалентному сопряженному уравнению

$$(x, u) = (y, v), \quad x = B^* y \in X(\Gamma), \quad (5)$$

заданному с помощью определенных *граничных пробных функций* $x \in X(\Gamma)$ из области значений $X(\Gamma) = R(B^*)$ сопряженного граничного оператора $B^*: V(\Gamma)^* = Y(\Gamma) \rightarrow R(B^*) \subseteq X(G) = U(G)^*$. На этом пути, с применением подходящей нормы $\|\varphi\|_X \asymp \sup_{\|u\|_U \leq 1} |(\varphi, u)|$ для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в сопряженном пространстве $X(G) = [C_0^\infty(G)]$, мы можем перейти к нерегулярным (стохастическим) граничным задачам для $\xi \in \underline{U}(G)$ из соответствующего *суперпространства* $\underline{U}(G)$ обобщенных случайных функций $\xi = (\varphi, \xi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, непрерывных в среднеквадратичном относительно $\|\varphi\|_X$:

$$\|\xi\|_{\underline{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \left(\mathbf{E} |(\varphi, \xi)|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (6)$$

— ср. [1], [2].

2. Общий функциональный подход к стохастическим граничным задачам. Рассматривается обобщенное дифференциальное уравнение (1)/(4), где, скажем, $L = \sum_k a_k \partial^k$ может быть произвольным дифференциальным оператором с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами и $L^* \varphi = \sum_k (-1)^{|k|} \partial^k (a_k \varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$; мы будем исходить из того, что граничная задача (1)/(4)–(2)/(5) имеет единственное решение $u \in U(G)$ при любой граничной функции $v \in V(\Gamma)$.

Пусть $U_0 \subseteq U(G)$ есть подпространство всех функций $u \in U(G)$, удовлетворяющих уравнению (1)/(4). Согласно (4), элементы $u \in U_0$ характеризуются тем, что

$$(x, u) \equiv (x_0, u), \quad x - x_0 \in [L^* C_0^\infty(G)], \quad (7)$$

где указанное замыкание множества $L^* C_0^\infty(G)$ в сопряженном пространстве $X(G) = U(G)^*$ представляет *аннулятор* $U_0^\perp = [L^* C_0^\infty(G)]$ подпространства $U_0 \subseteq U(G)$; поясним здесь, что для любого $x_0 \notin [L^* C_0^\infty(G)]$ имеется элемент $u \in X(G)^* = U(G)$ такой, что $(x_0, u) \neq 0$ и $(x, u) = 0$ при $x \in [L^* C_0^\infty(G)]$, так что $x_0 \notin U_0(G)^\perp$.

Имея дело с граничным уравнением (2)/(5), мы рассматриваем элементы $x = B^* y$ из области значений $R(B^*) = \{B^* y: y \in Y(\Gamma)\}$ сопряженного граничного оператора B^* как *обобщенные пробные функции*, являющиеся пределом пробных функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в пространстве $X(G) = [C_0^\infty(G)]$. Указанные $x = B^* y$ имеют носители $\text{supp } x \subseteq \Gamma$ на границе $\Gamma = \partial G$ в том смысле, что $(x, u) = (y, Bu) = 0$, $u \in C_0^\infty(G)$, и мы называем их *граничными пробными функциями*. Отметим, что в случае, когда $U(G)$ можно охарактеризовать как сужение в области $G \subseteq \mathbf{R}^d$ некоторого функционального пространства $U(\mathbf{R}^d) = [C_0^\infty(\mathbf{R}^d)]$, элементы $x \in R(B^*)$ в общепринятом смысле представляют собой обобщенные функции $x = (x, u)$, $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, с носителями $\text{supp } x \subseteq \Gamma$. Это более наглядно показывает, что граничные условия (2)/(5)

касаются обобщенных граничных значений (x, u) , $x \in R(B^*)$, функции $u \in U(G)$. Отметим, что в случае, когда в пространстве $U(G)$ определено умножение на функции из $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, указанные граничные значения являются предельными значениями $(x, u) = \lim_{\varphi \rightarrow x} (\varphi, u)$, $x \in R(B^*)$, которые получаются с помощью определенных пробных функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$, имеющих носители в инфинитезимальной окрестности границы $\Gamma = \partial G$.

Лемма. Факторизация

$$R(B^*) \longrightarrow R(B^*)/U_0^\perp \subseteq X(G)/U_0^\perp \quad (8)$$

определяет взаимно однозначное отображение на все фактор-пространство $X_0 = X(G)/U_0^\perp$ относительно аннулятора U_0 , и для $x \in R(B^*)$ имеет место эквивалентность норм

$$\|B^*y\|_{X_0} \asymp \|B^*y\|_X \asymp \|y\|_Y, \quad x = B^*y, \quad y \in Y(\Gamma) = V(\Gamma)^*. \quad (9)$$

Доказательство основывается на известных теоремах Банаха (см., например, [3, с. 68, 75]). Именно, обратимся к оператору B_0 , представляющему сужение граничного оператора B на подпространство $U_0 \subseteq U(G)$: $B_0u = Bu$, $u \in U_0$.

Наличие единственного решения $u \in U$ граничной задачи (1)–(2) при любой граничной функции $v \in V(\Gamma)$ означает, что ограниченный оператор B_0 взаимно однозначно отображает U_0 на все граничное пространство $V(\Gamma)$, и, следовательно, сопряженный ограниченный оператор $B_0^*: V(\Gamma)^* = Y(\Gamma) \longrightarrow U_0^*$, взаимно однозначно отображает сопряженное граничное пространство $Y(\Gamma)$ на свою область значений $R(B^*) = U_0^*$. Сопряженное пространство U_0^* представлено элементами $x_0 \in X(G) = U(G)^*$ как функционалами на подпространстве $U_0 \subseteq U(G)$: $x_0 = (x_0, u)$, $u \in U_0$, которые можно отождествить с элементами фактор-пространства $X_0 = X(G)/U_0^\perp$ относительно аннулятора $U_0^\perp$, так что мы имеем $U_0^* = X_0$ с нормой

$$\|x_0\|_{X_0} = \sup_{u \in U_0, \|u\|_U \leq 1} |(x_0, u)| = \inf_{x \in U_0^\perp} \|x_0 - x\|_X. \quad (10)$$

В соответствии с этим, элементы $B_0^*y \in R(B_0^*)$, отвечающие граничным элементам $y \in Y(\Gamma)$, представлены функционалами $B^*y \in R(B^*)$: $(B_0^*y, u) = (y, B_0u) \equiv (y, Bu) = (B^*y, u)$, $u \in U_0$, и, следовательно, $U_0^* = R(B_0^*) = R(B^*)/U_0^\perp$. Здесь мы имеем $x = B^*y \in U_0^\perp$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, поскольку тождество $(B^*y, u) = (y, Bu) = (y, B_0u) \equiv 0$, $u \in U_0$, для $y \in Y(\Gamma) = V(\Gamma)^*$ означает, что $(y, v) = 0$, $v \in V(\Gamma)^*$. Таким образом, нулевой класс всех $x \in R(B^*)$: $x \in U_0^\perp$, состоит из одного-единственного элемента $x = 0$, т.е. отображение (8) является взаимно однозначным на все фактор-пространство $X_0 = U_0^* = R(B^*)/U_0^\perp$.

Для ограниченного оператора B сопряженный оператор B^* является ограниченным: $\|B^*y\|_X \leq C\|y\|_Y$, $y \in Y(\Gamma)$. С другой стороны, для ограниченного оператора B_0^* , взаимно однозначно отображающего банахово пространство $Y(\Gamma)$ на банахово пространство $X_0 = R(B_0^*) = U_0^*$ — см. (10), обратный оператор также является ограниченным: $\|y\|_Y \leq C\|B_0^*y\|_{X_0}$; при этом здесь

$$\begin{aligned} \|B_0^*y\|_{X_0} &= \sup_{u \in U_0: \|u\|_U \leq 1} |(B_0^*y, u)| = \sup_{u \in U_0: \|u\|_U \leq 1} |(y, B_0u)| = \sup_{u \in U_0: \|u\|_U \leq 1} |(y, Bu)| \\ &\leq \sup_{u \in U: \|u\|_U \leq 1} |(y, Bu)| = \sup_{u \in U: \|u\|_U \leq 1} |(B^*y, u)| = \|B^*y\|_X. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место эквивалентность норм $\|B^*y\|_X \asymp \|y\|_{Y(\Gamma)}$, $y \in Y(\Gamma)$, и область значений $R(B^*)$ сопряженного оператора $B^*: Y(\Gamma) = V(\Gamma)^* \longrightarrow U(G)^* = X(G)$, является замкнутым подпространством в $X(G)$. Как следствие, взаимно однозначное отображение $X(G) \supseteq R(B^*) \longrightarrow R(B^*)/U_0^\perp = X_0$ на фактор-пространство $X_0 = X(G)/U_0^\perp$ таково, что $\|B^*y\|_X \leq C\|B^*y\|_{X_0}$, $y \in Y(\Gamma)$. Этим доказательство леммы закончено.

Эквивалентность норм (9) показывает, что для любой граничной функции $v \in V(\Gamma)$ уравнение (5) определяет линейный непрерывный функционал

$$u_\Gamma = (x, u), \quad x \in X(\Gamma), \quad (11)$$

на подпространстве $X(\Gamma) = R(B^*) \subseteq X(G)$, который может быть продолжен на все пространство $X(G) = U(G)^*$, определяя соответствующий элемент $u \in U(G)$.

Рассматривая $x \in X(\Gamma)$ как обобщенные пробные функции (напомним, с носителями $\text{supp } x \subseteq \Gamma$ на границе) из функционального пространства $X(G) = [C_0^\infty(G)]$ — см. (3), для любой обобщенной функции $u \in U(G)$:

$$u = (u, x), \quad x \in X(G) = [C_0^\infty(G)], \quad (12)$$

мы получаем соответствующий *граничный след* u_Γ на границе $\Gamma = \partial G$.

Можно сказать, что граничная задача (1)–(2) состоит в отыскании решения $u \in U(G)$ уравнения (1)/(4) с граничным следом u_Γ , обусловленным граничным уравнением (2)/(5). И соотношение (7) показывает, что для всех пробных функций $x \in X(G) = [C_0^\infty(G)]$ это решение определяется как

$$(x, u) = (y, v), \quad x - B^*y \in [L^*C_0^\infty(G)], \quad (13)$$

с помощью граничных данных, определяющих граничный след (11); напомним, что $[L^*C_0^\infty(G)] = U_0^\perp$ есть аннулятор подпространства $U_0 \subseteq U(G)$ и для пробной функции $x \in X(G)$ имеется (единственная) граничная пробная функция B^*y (с единственным $y \in Y(\Gamma)$) такая, что $x - B^*y \in U_0^\perp$.

Очевидно, благодаря эквивалентности норм (9) с

$$\|y\|_Y \leq C \|B^*y\|_{X_0} \leq C \|x\|_X, \quad x - B^*y \in [L^*C_0^\infty(G)], \quad (14)$$

формула (13) для любых граничных данных (точнее, для любой функции $v \in V(\Gamma)$), определяет функцию $u \in U(\Gamma) = X(G)^*$ как линейный функционал на пространстве $X(G)$ — см. (12), удовлетворяющий условию $|(x, u)| \leq C \|x\|_X$, $x \in X(G)$.

Теперь мы можем прямо перейти к *стохастической граничной задаче* с обобщенным дифференциальным уравнением

$$L\xi = 0 \quad (15)$$

в области $G \subseteq \mathbf{R}^d$ и граничными условиями

$$(x, \xi) = (y, \eta), \quad x = B^*y \in X(\Gamma), \quad y \in Y(\Gamma), \quad (16)$$

на границе $\Gamma = \partial G$. Имеется в виду определить обобщенную случайную функцию $\xi \in \underline{U}(G)$: $\xi = (\xi, x)$, $x \in X(G) = [C_0^\infty(G)]$, из банахова суперпространства $\underline{U}(G)$ — см. (6), по стохастическим граничным данным, определяющим случайную функцию $\eta = (\eta, y)$, $y \in Y(\Gamma)$, непрерывную в среднеквадратичном относительно нормы $\|y\|_Y$ по функциональному переменному $y \in Y(\Gamma) = V(\Gamma)^*$ на границе Γ .

Уточним, что указанного вида функции η образуют соответствующее банахово суперпространство $\underline{V}(\Gamma)$ с нормой $\|\eta\|_{\underline{V}} = \sup_{\|y\|_Y \leq 1} (\mathbf{E} |(y, \eta)|^2)^{1/2}$, и граничное уравнение (16) при любой функции $\eta \in \underline{V}(\Gamma)$ определяет *граничный след* $\xi_\Gamma = (x, \xi)$, $x \in X(\Gamma)$, искомой функции $\xi \in \underline{U}(G)$.

Очевидно, как и в детерминированной схеме (см. (11)–(14)), мы получаем соответствующий результат.

Теорема. Для любых стохастических граничных данных, определяющих случайную функцию $\eta \in \underline{V}(\Gamma)$ на границе $\Gamma = \partial G$, в области G имеется единственное решение $\xi \in \underline{U}(G)$ граничной задачи (15)–(16), которое определяется как

$$(x, \xi) = (y, \eta), \\ x - B^*y \in [L^*C_0^\infty(G)], \quad y \in Y(\Gamma), \quad (17)$$

для всех пробных функций $x \in X(G) = [C_0^\infty(G)]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rozanov Yu. A., Sansò F. Boundary-value problems for harmonic random fields. — Lecture Notes in Math. Geodesy, 1997, v. 65, p. 67–97.

2. Rozanov Yu. A. Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
3. Yosida K. Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

Поступила в редакцию
29.VII.1997

© 1999 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.* ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕЛЛЕРА¹⁾

Целью работы является уточнение одной теоремы Феллера (1943г.) о больших уклонениях суммы независимых ограниченных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: независимые ограниченные случайные величины, большие уклонения, оценка снизу.

1. Результаты. Рассмотрим независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 1$, с нулевыми средними и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

Пусть $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$, $F(x) = P(X_1 + \dots + X_n < x\sigma)$, а $\Phi(x)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения.

В предположении

$$|X_k| \leq \lambda\sigma \quad \text{п.н.}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

в [1] было доказано, что если $0 \leq \lambda x \leq \frac{1}{12}$, то

$$1 - F(x) = e^{-x^2 Q(x)/2} \left(\Phi(-x) + \bar{\theta} \lambda e^{-x^2/2} \right), \quad (2)$$

где $|\bar{\theta}| < 9$, $Q(x) = \sum_{\nu \geq 1} q_\nu x^\nu$, причем $|q_1| \leq \frac{1}{3} \lambda$, $|q_\nu| \leq \frac{1}{7} (12\lambda)^\nu$, $\nu \geq 2$, а сами коэффициенты q_ν зависят лишь от $\nu + 2$ первых моментов случайных величин X_k , $1 \leq k \leq n$.

В [2] оценки для $\bar{\theta}$ и q_ν были уточнены: $|\bar{\theta}| < 7.465$, $|q_\nu| \leq \frac{1}{8} (12\lambda)^\nu$.

Следует сказать, что Феллер в [1] прошел мимо возможности точнее и проще оценить коэффициенты q_ν , $\nu \geq 1$. Воспользовавшись некоторыми промежуточными выкладками из его работы (см. (21) ниже), несложно показать, что

$$|q_\nu| \leq \frac{1}{6(\nu+2)} (6\lambda)^\nu, \quad \nu \geq 1. \quad (2')$$

Основными достоинствами равенства (2) являются его лаконичность, неасимптотический характер и явные оценки входящих в него параметров.

Равенство (2) можно переписать следующим образом:

$$1 - F(x) = e^{-x^2 Q(x)/2} \Phi(-x) \left(1 + \theta \frac{\lambda x}{\psi(x)} \right), \quad (3)$$

где $\psi(x) = x\Phi(-x)/\Phi'(x)$, $\theta = \bar{\theta}\sqrt{2\pi}$.

Заметим, что функция $\psi(x)$ возрастает при $x > 0$, $\psi(1) = 0.6556\dots$, $\psi(\infty) = 1$.

Нашей целью является расширение зоны изменения x , для которых справедливо равенство (3), и уточнение оценок для θ и q_ν . Сформулируем результат.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики; e-mail: math@pharm.runnet.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00547) и гранта ведущих научных школ № 96-15-96199.