Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Об одной теореме Феллера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 128–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 09:58:24

2. Rozanov Yu. A. Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
3. Yosida K. Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

Поступила в редакцию
29.VII.1997

© 1999 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.* ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕЛЛЕРА¹⁾

Целью работы является уточнение одной теоремы Феллера (1943г.) о больших уклонениях суммы независимых ограниченных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: независимые ограниченные случайные величины, большие уклонения, оценка снизу.

1. Результаты. Рассмотрим независимые случайные величины $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 1$, с нулевыми средними и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

Пусть $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$, $F(x) = P(X_1 + \dots + X_n < x\sigma)$, а $\Phi(x)$ обозначает стандартную нормальную функцию распределения.

В предположении

$$|X_k| \leq \lambda\sigma \quad \text{п.н.}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

в [1] было доказано, что если $0 \leq \lambda x \leq \frac{1}{12}$, то

$$1 - F(x) = e^{-x^2 Q(x)/2} \left(\Phi(-x) + \bar{\theta} \lambda e^{-x^2/2} \right), \quad (2)$$

где $|\bar{\theta}| < 9$, $Q(x) = \sum_{\nu \geq 1} q_\nu x^\nu$, причем $|q_1| \leq \frac{1}{3} \lambda$, $|q_\nu| \leq \frac{1}{7} (12\lambda)^\nu$, $\nu \geq 2$, а сами коэффициенты q_ν зависят лишь от $\nu + 2$ первых моментов случайных величин X_k , $1 \leq k \leq n$.

В [2] оценки для $\bar{\theta}$ и q_ν были уточнены: $|\bar{\theta}| < 7.465$, $|q_\nu| \leq \frac{1}{8} (12\lambda)^\nu$.

Следует сказать, что Феллер в [1] прошел мимо возможности точнее и проще оценить коэффициенты q_ν , $\nu \geq 1$. Воспользовавшись некоторыми промежуточными выкладками из его работы (см. (21) ниже), несложно показать, что

$$|q_\nu| \leq \frac{1}{6(\nu+2)} (6\lambda)^\nu, \quad \nu \geq 1. \quad (2')$$

Основными достоинствами равенства (2) являются его лаконичность, неасимптотический характер и явные оценки входящих в него параметров.

Равенство (2) можно переписать следующим образом:

$$1 - F(x) = e^{-x^2 Q(x)/2} \Phi(-x) \left(1 + \theta \frac{\lambda x}{\psi(x)} \right), \quad (3)$$

где $\psi(x) = x\Phi(-x)/\Phi'(x)$, $\theta = \bar{\theta}\sqrt{2\pi}$.

Заметим, что функция $\psi(x)$ возрастает при $x > 0$, $\psi(1) = 0.6556\dots$, $\psi(\infty) = 1$.

Нашей целью является расширение зоны изменения x , для которых справедливо равенство (3), и уточнение оценок для θ и q_ν . Сформулируем результат.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики; e-mail: math@pharm.runnet.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00547) и гранта ведущих научных школ № 96-15-96199.

Теорема. Пусть выполнено условие (1). Тогда при $0 < \lambda x \leq \frac{1}{4}$ имеет место равенство (3), в котором $Q(x) = \sum_{\nu \geq 1} q_\nu x^\nu$, причем для коэффициентов q_ν имеются явные формулы,

$$|q_\nu| \leq \frac{1}{2(\nu+1)(\nu+2)} (4\lambda)^\nu, \quad \nu \geq 1, \quad |\theta| < \tilde{\theta}(\lambda x), \quad (4)$$

где $\tilde{\theta}(r)$ — возрастающая положительная на $[0, \frac{1}{4}]$ функция, определенная в (33). В частности,

$$\tilde{\theta}\left(\frac{1}{4}\right) < 8.3171, \quad \tilde{\theta}\left(\frac{1}{8}\right) < 5.0806, \quad \tilde{\theta}\left(\frac{1}{12}\right) < 4.6296, \quad \tilde{\theta}(0) < 3.968. \quad (5)$$

Следствие 1. Если $0 < \lambda x \leq \frac{1}{12}$, то в равенстве (2) $|\bar{\theta}| < 1.847$.

З а м е ч а н и е 1. При $0 < r \leq \frac{1}{4}$

$$\tilde{\theta}(r) < \hat{\theta}(r) = \frac{4}{1 - 1.6346 \rho^{-1}(r)}, \quad (6)$$

где $\rho^{-1}(r)$ — функция, обратная к функции

$$\rho(t) = t \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^2 - \frac{11}{24} \frac{t^3}{1 - 0.87252t} \right), \quad 0 \leq t < \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Вычисления показывают, что ошибка от замены $\tilde{\theta}(r)$ на $\hat{\theta}(r)$ не превосходит $\frac{1}{10}$.

З а м е ч а н и е 2. Из (4) и формулы для q_1 следует, что

$$Q(x) = \frac{x}{3\sigma^3} \sum_{\nu=1}^n \mathbf{E} X_\nu^3 + \theta_1(\lambda x) (\lambda x)^2, \quad (8)$$

где $|\theta_1(r)| \leq \hat{\theta}_1(r) = 8s(4r)$, а $s(r) = r^{-4}((1-r) \log(1-r) + r - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^3)$, $0 \leq r \leq 1$. Так,

$$\hat{\theta}_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3}, \quad \hat{\theta}_1\left(\frac{1}{8}\right) = 0.9119\dots, \quad \hat{\theta}_1\left(\frac{1}{12}\right) = 0.8390\dots, \quad \hat{\theta}_1(0) = \frac{2}{3}. \quad (9)$$

В качестве следствия из (3), (4), (8) можно получить следующую оценку снизу для вероятностей больших уклонений суммы независимых ограниченных случайных величин.

Следствие 2. Пусть выполнено условие (1) и $0 < r \leq 0.1727$. Тогда

$$1 - F(x) > \Phi(-x) e^{-A_1 \lambda x^3} \left(1 - A_2 \frac{\lambda x}{\psi(x)} \right), \quad 0 < \lambda x \leq r, \quad (10)$$

где $A_1 = \frac{1}{6} + 4r s(4r)$, $A_2 = \tilde{\theta}(r)$.

При $r = \frac{1}{12}$, например, $A_1 < \frac{1}{6} + 0.42\lambda x < 0.2017$, $A_2 < 4.6296$, а если $r = \frac{1}{8}$, то $A_1 < 0.2275$, $A_2 < 5.0806$ (см. (5), (9)).

Неравенство (10) уточняет оценку (15) из [3] и, в предположении (1), предпочтительнее в смысле оценок коэффициентов A_1, A_2 , чем соответствующие результаты из [4].

Отметим, что формально соотношение (10) справедливо, если $0 < r \leq \frac{1}{4}$, однако уже для $r \geq \bar{r} = 0.17273$ и при $\lambda x \geq \bar{r}$ оно становится тривиальным. Дело в том, что положительный корень уравнения $\tilde{\theta}(r)r = 1$ содержится в интервале $(0.17271, 0.17273)$, в силу чего при всех $x > 0$ $1 - A_2 \lambda x / \psi(x) < 1 - A_2 \lambda x < 1 - \tilde{\theta}(\bar{r}) \bar{r} < 0$.

2. Доказательства. Проводя выкладки, мы будем следовать рассуждениям из [2], которые, впрочем, практически совпадают с оригинальным доказательством самого Феллера [1]. Итак, пусть $F_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, — функции распределения случайных величин X_k , $1 \leq k \leq n$. Положим

$$V_k = \mathbf{E} e^{hX_k}, \quad \bar{F}_k(x) = \frac{1}{V_k} \int_{-\infty}^x e^{hy} dF_k(y), \quad h > 0, \quad (11)$$

и обозначим через $\bar{X}_k$, $1 \leq k \leq n$, независимые случайные величины с функциями распределения $\bar{F}_k(x)$, средними $\bar{\alpha}_k$ и дисперсиями $\bar{\sigma}_k^2$. Кроме того, положим

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k, \quad \bar{\sigma}^2 = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k^2, \quad V = \sum_{k=1}^n \log V_k. \quad (12)$$

Имеем (см. (11)) при $1 \leq k \leq n$

$$\log V_k = \sum_{\nu \geq 2} \gamma_{k,\nu} \frac{h^\nu}{\nu!}, \quad (13)$$

где $\{\gamma_{k,\nu}\}$ — семинварианты порядка ν случайной величины X_k , и, положив $\Gamma_\nu = \sum_{k=1}^n \gamma_{k,\nu}$,

$$V = \sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{h^\nu}{\nu!}, \quad \bar{\alpha} = \sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \quad \bar{\sigma}^2 = \sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{h^{\nu-2}}{(\nu-2)!}. \quad (14)$$

Из [5, лемма 1] и (1), в частности, следует, что если $\nu \geq 5$, то

$$|\gamma_{k,\nu}| \leq \frac{11}{24} \tau^{\nu-5} (\nu-1)! (\lambda \sigma)^{\nu-2} \sigma_k^2, \quad |\Gamma_\nu| \leq \frac{11}{24} \tau^{\nu-5} (\nu-1)! (\lambda \sigma)^{\nu-2} \sigma^2, \quad (15)$$

где $\tau = 0.87245 \dots$ — решение уравнения $e^{1/\tau} - 1/\tau = 2$, и

$$|\gamma_{k,3}| \leq \lambda \sigma \sigma_k^2, \quad |\Gamma_3| \leq \lambda \sigma^3, \quad |\gamma_{k,4}| \leq 2 (\lambda \sigma)^2 \sigma_k^2, \quad |\Gamma_4| \leq 2 \lambda^2 \sigma^4. \quad (16)$$

Пользуясь оценками (15), (16) вместо [2, (21), (22)], оценим $|\bar{\alpha}_k|$ и $|\bar{\sigma}^2/\sigma^2 - 1|$. Положим $\varepsilon = \lambda \sigma h$ (см. (11)). Имеем по (13), (15), (16) и (1):

$$\begin{aligned} |\bar{\alpha}_k| &\leq \sum_{\nu=2}^4 |\gamma_{k,\nu}| \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\nu \geq 5} |\gamma_{k,\nu}| \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \leq h \sigma_k^2 \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{11}{24} \tau^{-3} \sum_{\nu \geq 5} (\tau \varepsilon)^{\nu-2} \right) \\ &\leq \lambda \sigma \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^3}{1 - \tau \varepsilon} \right) = \lambda \sigma B; \end{aligned} \quad (17)$$

аналогично, в соответствии с (14)–(16),

$$\left| \frac{\bar{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \tau \varepsilon)^2} (4 - 3 \tau \varepsilon) = A. \quad (18)$$

Придерживаясь обозначений из [2, (36), (37)], положим $R(x) = \mathbf{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n < \bar{\alpha} + x \bar{\sigma}) - \Phi(x)$. Используя константу $C_0 = 0.7915$ из [6] при оценивании остаточного члена в центральной предельной теореме, а также (17), (18) и (1), получим

$$\left| R(x) \right| < C_0 \frac{1}{\bar{\sigma}} \max_{1 \leq k \leq n} \text{ess sup} |X_k - \bar{\alpha}_k| \leq C_0 \frac{1}{\bar{\sigma}} (1 + B) (1 - A)^{-1/2} \lambda = \Delta \lambda,$$

и, следовательно (см. [2, (39)]),

$$\left| \int_0^\infty e^{-hy\bar{\sigma}} dR(y) \right| \leq 2 \Delta \lambda. \quad (19)$$

Пусть, начиная с этого места, $h = h(x)$ — решение уравнения (см. (12), (14) и [2, (41)])

$$x = \frac{\bar{\alpha}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \quad (20)$$

К о ц е н к е (2'). Дифференцируя по x равенство (47) из [2], получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} x^2 (1 + Q(x)) \right)'_x &= x + \frac{1}{2} \sum_{\nu \geq 1} (\nu + 2) q_\nu x^{\nu+1} = \left(\sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{\nu-1}{\nu!} h^\nu \right)'_x \\ &= \sum_{\nu \geq 2} \Gamma_\nu \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-2)!} h'_x = h(\bar{\alpha})'_x = h \sigma. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая (см. [1], [2, (45)]), что $h\sigma - x$ мажорируется функцией

$$\frac{x}{12} \frac{6\lambda x}{1 - 6\lambda x} = \frac{x}{12} \sum_{k \geq 0} (6\lambda x)^{k+1},$$

из (21) получим (2').

Вернемся к равенству (20). Нам будет нужна оценка для $h\bar{\sigma} - x$, более точная, чем в [2, лемма 5]. Имеем,

$$h\bar{\sigma} - x = h\sigma - x + h \frac{\bar{\sigma}^2 - \sigma^2}{\bar{\sigma} + \sigma} = I + J. \quad (22)$$

По (20) и (14)–(16) при $\varepsilon = \lambda\sigma h$ (см. (17), (18))

$$\begin{aligned} I &= -\frac{h^2}{2\sigma} \Gamma_3 - \frac{h^3}{6\sigma} \Gamma_4 - \frac{1}{\sigma} \sum_{\nu \geq 5} \Gamma_\nu \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ &= -\frac{h^2}{2\sigma} \Gamma_3 + \theta_1 h\sigma \left(\frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^3}{(1-\tau\varepsilon)} \right), \quad |\theta_1| \leq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$J = \frac{h\sigma^2}{\bar{\sigma} + \sigma} \left(\frac{h}{\sigma^2} \Gamma_3 + \theta_2 \tilde{A} \right) = \frac{2h}{\sigma^2} \Gamma_3 + \theta_2 \tilde{A} h\sigma \frac{\sigma}{\bar{\sigma} + \sigma} + \theta_3 \frac{h^2(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2)}{2\sigma(\bar{\sigma} + \sigma)^2} |\Gamma_3|, \quad (24)$$

где (см. (18)) $\tilde{A} = A - \varepsilon$, $|\theta_i| \leq 1$. Учитывая (см. (18)), что

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma} + \sigma} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + 1 \right)^{-1} \leq \left(1 + \sqrt{1-A} \right)^{-1} = A_1, \quad (25)$$

из (23), (24) получим

$$|h\bar{\sigma} - x| = |I + J| \leq h\sigma \left(\frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^3}{(1-\tau\varepsilon)} + \tilde{A} A_1 + \frac{1}{2} \varepsilon A A_1^2 \right) = h\sigma \varepsilon^2 A_2, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_1^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{4} A_1^2 + \frac{11}{24} (1-\tau\varepsilon)^{-1} \left(1 + A_1 \frac{4-3\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon} \right) \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{11}{48} A_1^2 \frac{4-3\tau\varepsilon}{(1-\tau\varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь оценим $\varepsilon = \lambda\sigma h$ через λx . Из (20), (15), (16) следует, что

$$\lambda x \geq \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^3}{1-\tau\varepsilon} = \rho(\varepsilon). \quad (28)$$

Функция $\rho(\varepsilon)$ на интервале $[0, \frac{1}{3}]$ возрастает, причем $\rho(\frac{1}{3}) > \frac{1}{4}$. Таким образом, если $0 < \lambda x \leq \frac{1}{4}$, то $\varepsilon = \lambda\sigma h \leq \rho^{-1}(\lambda x)$.

Положим $f(t) = e^{t^2/2} \Phi(-t)$, $t > 0$. Имеем (см. [2, (26), (39), (41)] и (19), (14))

$$1 - F(x) = e^{V-h\bar{\alpha}} \left(f(h\bar{\sigma}) + \theta_1 2\Delta \lambda \right), \quad |\theta_1| \leq 1. \quad (29)$$

Функция $f(t)$ убывает, а $t f(t)$ возрастает при $t > 0$. Поэтому, принимая во внимание (26), (18) и (28), получим

$$\begin{aligned} |f(h\bar{\sigma}) - f(x)| &\leq f(x) \left| \frac{h\bar{\sigma}}{x} - 1 \right| \max \left(1, \frac{x}{h\bar{\sigma}} \right) \leq f(x) \varepsilon^2 A_2 \max \left(\frac{h\sigma}{x}, \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right) \\ &\leq f(x) \varepsilon^2 A_2 \max \left(\frac{\varepsilon}{\rho(\varepsilon)}, \frac{1}{\sqrt{1-A}} \right) = f(x) A_3. \end{aligned} \quad (30)$$

Проверка показывает, что $\max(\varepsilon/\rho(\varepsilon), 1/\sqrt{1-A}) = 1/\sqrt{1-A}$. Из (28)–(30) и того, что $\psi(x) < 1$, следует, что

$$1 - F(x) = e^{V-h\bar{\alpha}+x^2/2} \Phi(-x) \left(1 + \omega \frac{\lambda x}{\psi(x)} \right), \quad (31)$$

где

$$|\omega| \leq 2\Delta \sqrt{2\pi} + \frac{\psi(x)}{\lambda x} A_3 < 2\sqrt{2\pi}\Delta + \frac{A_3}{\rho(\varepsilon)} = A_4. \quad (32)$$

Легко усмотреть, что функция $A_4 = A_4(\varepsilon)$ возрастает в интервале $[0, \rho^{-1}(\frac{1}{4}))$ (см. (17)–(19), (27) и (30)). Поэтому в теореме в качестве $\tilde{\theta}(r)$ можно выбрать функцию $A_4(\rho^{-1}(r))$, $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$.

Итак,

$$\tilde{\theta}(r) = A_4(\varepsilon)|_{\varepsilon=\rho^{-1}(r)}, \quad (33)$$

$$A_4(\varepsilon) = 1.583 \sqrt{2\pi} \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^4}{1 - \tau\varepsilon} \right) (1 - A)^{-1/2} + \varepsilon \frac{\rho(\varepsilon)}{\sqrt{1 - A}} A_2,$$

где $A = A(\varepsilon)$, $A_2 = A_2(\varepsilon)$ и $\rho(\varepsilon)$ определены в (18), (27) и (28) соответственно.

Заметим, что оценку для θ в (3) при умеренных x можно несколько уточнить: из (31) и (32) следует, что $|\theta| \leq 2\sqrt{2\pi} \Delta + \psi(x) A_3/\rho(\varepsilon)$.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся (31), равенством $-\frac{x^2}{2} Q(x) = V - h\bar{\alpha} + \frac{1}{2} x^2$ (см. [2, (46), (47), (51), (52)]), а также результатами работы [5, (3), (7), (8)], в которой найдены явные формулы и оценки (4) для коэффициентов q_ν .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feller W.* Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, № 3, p. 361–372.
2. *Lenart C.* On certain theorems of Berry and a limit theorem of Feller. — Matematyčeský časopis, 1968, v. 18, № 1, p. 59–75.
3. *Розовский Л. В.* Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
4. *Архангельский А. Н.* Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 4, с. 625–635.
5. *Розовский Л. В.* О коэффициентах ряда Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 161–166.
6. *Шуганов И. С.* Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.

Поступила в редакцию
12.III.1998

© 1999 г.

СЕРДОБОЛЬСКИЙ В. И.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ ДОМИНИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ

Решается задача минимизации квадратичного риска покомпонентно компрессионных оценок математических ожиданий нормальных векторов с независимыми компонентами с единичной дисперсией. Найдена наилучшая компрессионная функция, и построена компрессионная оценка вектора математических ожиданий, наилучшая с точностью до членов, малых при большой размерности и большом объеме выборки.

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия; e-mail: serd@miem.edu.ru