Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сердобольский, Асимптотически доминирующее оценивание векторов математических ожиданий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 132–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:24:05

где

$$|\omega| \leq 2\Delta \sqrt{2\pi} + \frac{\psi(x)}{\lambda x} A_3 < 2\sqrt{2\pi}\Delta + \frac{A_3}{\rho(\varepsilon)} = A_4. \quad (32)$$

Легко усмотреть, что функция $A_4 = A_4(\varepsilon)$ возрастает в интервале $[0, \rho^{-1}(\frac{1}{4}))$ (см. (17)–(19), (27) и (30)). Поэтому в теореме в качестве $\tilde{\theta}(r)$ можно выбрать функцию $A_4(\rho^{-1}(r))$, $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$.

Итак,

$$\tilde{\theta}(r) = A_4(\varepsilon)|_{\varepsilon=\rho^{-1}(r)}, \quad (33)$$

$$A_4(\varepsilon) = 1.583 \sqrt{2\pi} \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 + \frac{11}{24} \frac{\varepsilon^4}{1 - \tau\varepsilon} \right) (1 - A)^{-1/2} + \varepsilon \frac{\rho(\varepsilon)}{\sqrt{1 - A}} A_2,$$

где $A = A(\varepsilon)$, $A_2 = A_2(\varepsilon)$ и $\rho(\varepsilon)$ определены в (18), (27) и (28) соответственно.

Заметим, что оценку для θ в (3) при умеренных x можно несколько уточнить: из (31) и (32) следует, что $|\theta| \leq 2\sqrt{2\pi} \Delta + \psi(x) A_3/\rho(\varepsilon)$.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся (31), равенством $-\frac{x^2}{2} Q(x) = V - h\bar{\alpha} + \frac{1}{2} x^2$ (см. [2, (46), (47), (51), (52)]), а также результатами работы [5, (3), (7), (8)], в которой найдены явные формулы и оценки (4) для коэффициентов q_ν .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feller W. Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans. Amer. Math. Soc., 1943, v. 54, № 3, p. 361–372.
2. Lenart C. On certain theorems of Berry and a limit theorem of Feller. — Matematyčeský časopis, 1968, v. 18, № 1, p. 59–75.
3. Розовский Л. В. Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 134–143.
4. Артангельский А. Н. Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 4, с. 625–635.
5. Розовский Л. В. О коэффициентах ряда Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 161–166.
6. Шуганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.

Поступила в редакцию
12.III.1998

© 1999 г.

СЕРДОБОЛЬСКИЙ В. И.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ ДОМИНИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ

Решается задача минимизации квадратичного риска покомпонентно компрессионных оценок математических ожиданий нормальных векторов с независимыми компонентами с единичной дисперсией. Найдена наилучшая компрессионная функция, и построена компрессионная оценка вектора математических ожиданий, наилучшая с точностью до членов, малых при большой размерности и большом объеме выборки.

---

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия; e-mail: serd@miem.edu.ru

Ключевые слова и фразы: компрессионные оценки, доминирующие оценки, большая размерность.

В 1956 г. Стейн обнаружил [1], что в многомерном случае выборочное среднее может не обладать наименьшим квадратичным риском. Известно, что оценки векторов математических ожиданий вида $\eta\bar{x}$, где $\bar{x}$ есть n -мерный вектор средних выборочных, а $\eta < 1$ («компрессионные оценки») при $n > 2$ могут обладать меньшим квадратичным риском для нормальных распределений и некоторых других центрально симметричных распределений [2], [3]. В предлагаемой работе эффект компрессии оценок изучается в рамках подхода асимптотики растущей размерности (а.р.р., см. [4]), когда объем выборки сколь угодно велик, а отношение размерности наблюдений к объему выборки ограничено. Так же, как в [5], будем исследовать эффект покомпонентного компрессионного оценивания и искать оценки, асимптотически неулучшаемые в а.р.р. Но в отличие от [5] будем анализировать главные члены а.р.р., не переходя к пределу, оценивая остаточные члены с точностью до абсолютных констант.

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n)$ вектор наблюдений, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) = E x$ — вектор параметров. Предположим, что $x \sim N(\mu, I)$, где I — единичная матрица. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ — вектор средних, рассчитанный по выборке объема N . Квадратичный риск оценки $\bar{x}$, очевидно, равен n/N .

Утверждение 1. Оценка Стейна $\hat{\mu}^S = (1 - (n - 2)/N\bar{x}^2)\bar{x}$ (здесь и ниже квадраты векторов означают квадраты их длин) при $n > 2$ обладает следующим приближенно экстремальным свойством:

$$E(\mu - \hat{\mu}^S)^2 \leq \min_{\eta} E(\mu - \eta\bar{x})^2 + \frac{4(n-1)}{nN},$$

где η — неслучайный скаляр. Здесь экстремальное значение η равно $\mu^2(\mu^2 + n/N)^{-1}$.

Исследуем эффект покомпонентного оценивания вектора математических ожиданий. Рассмотрим класс K_0 оценок $\hat{\mu}$ вида $\hat{\mu} = (\varphi(\bar{x}_i), i = 1, \dots, n)$, где $\varphi(t)$ — неслучайная измеримая функция с ограниченным ростом: $|\varphi(t)| \leq c|t|$, а c от t не зависит. Будем минимизировать $E(\mu - \hat{\mu})^2$. Воспользуемся основным приемом а.р.р.: рассматривать множества величин в виде функций их эмпирического распределения. Обозначим

$$\mathcal{F}_0(t) = n^{-1} \sum_i \text{ind}(\bar{x}_i \leq t), \quad F_0(t) = E\mathcal{F}_0(t) = n^{-1} \sum_i \Phi(\sqrt{N}(t - \mu_i))$$

(здесь и ниже в суммах $i = 1, \dots, n$). Обозначим

$$f_0(t) = \frac{dF_0(t)}{dt} = n^{-1} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \sum_i \exp\left(-\frac{N(t - \mu_i)^2}{2}\right).$$

Утверждение 2. Функция $\varphi(t) = \varphi^0(t) = t + N^{-1} \partial \ln f_0(t) / \partial t$ обеспечивает минимальный квадратичный риск оценок из K_0 , причем

$$\inf E(\hat{\mu} - \mu)^2 = \frac{n}{N} - \frac{n}{N^2} \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln f_0(t) \right)^2 f_0(t) dt.$$

В частном случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$, квадратичный риск $R^0 = 0$.

При оценивании $f_0(t)$ по $\mathcal{F}_0(t)$ необходимо сглаживание. Для удобства выделения главных членов изменим масштаб и перейдем к равносильной задаче оценивания векторов $v = (v_1, \dots, v_n)$ параметров $v_i = \sqrt{n}\mu_i$ по статистике $u = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i = \sqrt{n}\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим класс K оценок $\hat{v}$ вида

$$\hat{v} = (\varphi(u_i), i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где по-прежнему $|\varphi(t)| \leq c|t|$ для всех t и c от t не зависит. Обозначим $y = n/N$, $R(\varphi) = n^{-1} E(\hat{v} - v)^2$, $f(t, d) = n^{-1} 1/\sqrt{2\pi d} \sum_i \exp((t - v_i)/(2d))$, $d > 0$.

Утверждение 3. Справедливы соотношения

$$R(\varphi) = R_{\text{opt}} + \int [\varphi(t) - \varphi^{\circ}(t, y)]^2 f(t, y) dt,$$

$$R_{\text{opt}} = R(\varphi^{\circ}) = y - y^2 \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln f(t, y) \right]^2 f(t, y) dt, \quad \varphi^{\circ}(t, y) = t + y \frac{\partial}{\partial t} \ln f(t, y).$$

Таким образом, оценка

$$v^{\circ} = (\varphi^{\circ}(u_1, y), \dots, \varphi^{\circ}(u_n, y)) \quad (2)$$

доминирует K_0 относительно квадратичного риска $R(\cdot)$. Для приближения v° рассмотрим статистику

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t, \varepsilon) = n^{-1} \sum_i (2\pi\varepsilon)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(t - u_i)^2}{2\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 1. При $\varepsilon > 0$

$$E\hat{f}(t) = f(t, y + \varepsilon), \quad \text{var } \hat{f}(t) \leq n^{-1} (2\pi\varepsilon)^{-1} f(t, d), \quad \text{где } d = y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Чтобы построить оценку $\varphi^{\circ}(t, y)$ с ограниченным ростом, необходимо ограничить убывание $\hat{f}(t, \varepsilon)$ при больших t . Рассмотрим статистики

$$\hat{\varphi}^{\circ}(t, \varepsilon, \delta) = t + \text{ind}(\hat{f}(t) > \delta) y \frac{\partial}{\partial t} \ln \hat{f}(t), \quad \varepsilon, \delta > 0,$$

$$\hat{v}^{\circ} = (\hat{\varphi}^{\circ}(u_1, \varepsilon, \delta), \dots, \hat{\varphi}^{\circ}(u_n, \varepsilon, \delta)). \quad (3)$$

Теорема 1. Можно указать такие функции $\varepsilon = \varepsilon(n, N) < y$ и $\delta = \delta(n, N)$, например, $\varepsilon = yn^{-18/143}$ и $\delta = y^{-1/2} n^{-40/143}$, что при любых натуральных n и N

$$R(\hat{v}^{\circ}) \leq (\sqrt{R_{\text{opt}}} + \sqrt{\rho})^2,$$

где $0 < \rho < ayn^{-1/4}$, и a — абсолютная константа.

Следствие 1. Оценка (3) с $\varepsilon = \varepsilon(n, N)$ и $\delta = \delta(n, N)$ из теоремы 1 обладает следующим асимптотически доминирующим свойством: каковы бы ни были $c > 0$ и $\omega > 0$, можно указать такое $n_0 = n_0(c, \omega)$, что при $n_0 < n < cN$ для любых $\hat{v} \in K$ $R(\hat{v}^{\circ}) \leq R(\hat{v}) + \omega$.

Относительный квадратичный риск оценки v° с наилучшей неизвестной оценивающей функцией $\varphi^{\circ}(t)$ равен $r^0 = R(\varphi^{\circ})/y < 1$. Относительный риск оценки (3) составляет не больше $(\sqrt{r_{\text{opt}}} + an^{-1/4})^2$, где a — абсолютная константа. В этом смысле оценки $\hat{v}^{\circ}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически доминируют класс оценок K , причем равномерно как по совокупностям, так и по объемам выборок.

Отметим, что при больших n и N предположение о нормальности может быть заменено на предположение об асимптотической нормальности. Можно ожидать [6], что при ограниченной зависимости переменных теорема 1 может быть установлена для широкого класса совокупностей.

Доказательства. Замечаем, что для любой ограниченной функции $\psi(t)$ $\sum_i E\psi(u_i) = \int \psi(t) f(t, d) dt$. Чтобы доказать лемму 1, достаточно проверить несмещенность оценки интегрированием и заметить, что дисперсия $\hat{f}(t, \varepsilon)$ составляет

$$\begin{aligned} n^{-2} (2\pi\varepsilon)^{-1} \sum_i \text{var} \exp\left(-\frac{(t - u_i)^2}{2\varepsilon}\right) &\leq n^{-2} (2\pi\varepsilon)^{-1} \sum_i E \exp\left(-\frac{(t - u_i)^2}{\varepsilon}\right) \\ &= n^{-2} (4\pi\varepsilon)^{-1/2} (2\pi d)^{-1/2} \sum_i \exp\left(-\frac{(t - v_i)^2}{2d}\right), \quad d = y + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Докажем, что квадратичный риск оценки (3) векторов v при больших n и некоторых ε и δ приближается к квадратичному риску R_{opt} оценки (2). Для этого оценим

увеличение квадратичного риска при переходе от $\varphi^0(t, y)$ к $\varphi^0(t, y + \varepsilon)$, а затем от $\varphi^0(t, y + \varepsilon)$ к $\hat{\varphi}^0(t, \varepsilon, \delta)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \mathbf{E} n^{-1} \sum_i \left[v_i - \varphi^0(u_i, y) \right]^2, & \rho_2 &= \mathbf{E} n^{-1} \sum_i \left[\varphi^0(u_i, y) - \varphi^0(u_i, y + \varepsilon) \right]^2, \\ \rho_3 &= \mathbf{E} n^{-1} \sum_i \left[\varphi^0(u_i, y + \varepsilon) - \hat{\varphi}^0(u_i, \varepsilon, \delta) \right]^2.\end{aligned}$$

Доказательство основной теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Величина $\rho_2 \leq a\varepsilon^2/y$, где a — абсолютная константа.

Доказательство. Обозначим для краткости $x_i = |v_i - t|/d$, $d > 0$,

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \exp\left(-\frac{(t - v_i)^2}{2d}\right), \quad f_{it} = \frac{\partial}{\partial t} f_i, \quad f_{id} = \frac{\partial}{\partial d} f_i, \quad f_{itd} = \frac{\partial^2}{\partial d \partial t} f_i.$$

Выразим ρ_2 через производные функции φ^0 , взятые при промежуточном значении d_i : $y \leq d_i \leq y + \varepsilon$. Находим, что

$$\rho_2 = n^{-1} \varepsilon^2 \mathbf{E} \sum_i \left[\frac{\partial \varphi^0(u_i, d)}{\partial d} \right]^2 = n^{-1} \varepsilon^2 \mathbf{E} \sum_i \left(\frac{|f_{it}|}{f_i} + \frac{|f_{id}|}{f_i} d_i + \frac{|f_{itd}|}{f_i^2} d_i^2 \right)^2,$$

где под знаком суммы $d = d_i = d_i(u_i)$, $i = 1, \dots, n$. Вычисление математического ожидания при каждом i сводится к интегрированию по u_i с весом $(2\pi y)^{-1/2} \exp(-(u_i - v_i)^2/2y) \leq \sqrt{d_i/y} f_i$. Оставляя квадраты слагаемых, получаем

$$\rho_2 \leq 3n^{-1} \varepsilon^2 \mathbf{E} \sum_i \sqrt{\frac{d_i}{y}} \left(\frac{f_{it}^2}{f_i} + \frac{f_{id}^2}{f_i} d_i^2 + \frac{f_{itd}^2}{f_i^3} d_i^2 \right),$$

где для каждого i переменные $d = d_i$.

Обозначим $x_i = (v_i - u_i)/\sqrt{d_i}$, $i = 1, \dots, n$. Находим, что $f_{it}^2 \leq x_i^2 f_i^2/d_i \leq (x_i^2 + 1)^2 f_i^2/4d_i$, $f_{id}^2 \leq (x_i^2 + 2|x_i| + 1)^2 f_i^2/4d_i^3$. Поэтому

$$\rho_2 \leq a\varepsilon^2 \mathbf{E} n^{-1} \sum_i \frac{1}{\sqrt{d_i y}} (x_i^2 + x_i^6) f_i \leq b\varepsilon^2 y^{-3/2} n^{-1} \sum_i \mathbf{E} (x_i^2 + x_i^6) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right).$$

Здесь a и b — абсолютные константы. Каждый член под знаком $\mathbf{E}$ в последней оценке сверху не больше константы. Заключаем, что $\rho_2 \leq a\varepsilon^2 y^{-1}$. Лемма доказана.

Величину ρ_3 разобьем на два слагаемых

$$\rho_{31} = \mathbf{E} n^{-1} \sum_i [\varphi^0(u_i, y + \varepsilon) - \hat{\varphi}^0(u_i, \varepsilon, \delta)]^2 \text{ind}(\hat{f}(u_i) > \delta),$$

$$\rho_{32} = d^2 n^{-1} \mathbf{E} \sum_i r^2(u_i) \text{ind}(\hat{f}(u_i) \leq \delta),$$

где $r(t) = r(t, d) = \partial \ln f(t, d)/\partial t$, $d = y + \varepsilon$.

Лемма 3. При $0 < \varepsilon \leq y$ и $n > 1$

$$\rho_{31} \leq a y n^{-1} \lambda^{-2} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^{3/2},$$

где $\lambda = \delta\sqrt{2\pi y}$ и a — абсолютная константа.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned}\hat{f}_i(t) &= (2\pi\varepsilon)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(t - u_i)^2}{2\varepsilon}\right), \\ \xi_i(t) &= r(t, d) \hat{f}_i(t) - \frac{d}{dt} \hat{f}_i(t) = \hat{f}_i(t) \left[r(t, d) + \frac{t - u_i}{\varepsilon} \right], \\ q(t) &= n^{-1} \sum_i \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Находим, что

$$\rho_{31} \leq y^2 \delta^{-2} \mathbf{E} n^{-1} \sum_i \left[r(u_i, d) \hat{f}(u_i) - \hat{f}'(u_i) \right]^2 \text{ind}(\hat{f}'(u_i) > \delta) \leq y^2 \delta^{-2} n^{-1} \sum_i \mathbf{E} q^2(u_i),$$

здесь и ниже штрих означает производную по явно выписанному аргументу. Для любого неслучайного t имеем $\mathbf{E} q(t) = r(t, d) f(t, d) - \partial f(t, d) / \partial t = 0$. Следовательно, $\mathbf{E} q^2(t) = \text{var } q(t) = n^{-2} \sum_i \text{var } \xi_i(t)$. Величина

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \hat{f}_i^2(t) &= (2\pi\epsilon)^{-1} (2\pi y)^{-1/2} \int \exp \left[-\frac{(t-z)^2}{\epsilon} - \frac{(z-v_i)^2}{2y} \right] dz \\ &= (2\pi)^{-1} \epsilon^{-1/2} \tilde{d}^{-1/2} \exp \left(-\frac{(t-v_i)^2}{2\tilde{d}} \right), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где $\tilde{d} = y + \epsilon/2$. Значит, при любых t и i эта величина не больше $(2\pi)^{-1/2} (y\epsilon)^{-1/2}$. Величина

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [f'_i(t)]^2 &= (2\pi\epsilon)^{-1} \int (2\pi y)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(t-z)^2}{\epsilon} - \frac{(z-v_i)^2}{2y} \right] \frac{(t-z)^2}{\epsilon^2} dz \\ &\leq (4\pi\sqrt{2})^{-1} y^{-1/2} \epsilon^{-3/2}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Находим, что при любом t : $\mathbf{E} \xi^2(t) < \pi^{-1} \epsilon^{-1/2} y^{-1/2} [r^2(t, d) + \epsilon^{-1}]$, $j = 1, \dots, n$, $d = y + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Выделим зависимость от u_i : пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i \mathbf{E}'_i$, где $\mathbf{E}_i$ вычисляется интегрированием только по распределению величины u_i , а $\mathbf{E}'_i$ — по распределению остальных u_j , $j \neq i$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_i q(t) &= n^{-1} (\xi_i(t) - \mathbf{E}_i \xi_i(t)), \\ \mathbf{E}'_i q^2(t) &= n^{-2} \left[\sum_{j \neq i} \text{var } \xi_j(t) + (\xi_j(t) - \mathbf{E}_i \xi_j(t))^2 \right], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Докажем, что второе слагаемое в квадратных скобках дает лишь поправку к первому. Замечаем, что $\xi_i(u_i) = (2\pi\epsilon)^{-1/2} r(u_i, d)$, а при неслучайном аргументе t

$$|\mathbf{E}_i \xi_i(t)| = (2\pi d)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(t-v_i)^2}{2d} \right) \left| r(t, d) + \frac{t-v_i}{d} \right| \leq \frac{r(t, d) + d^{-1/2}}{\sqrt{2\pi d}},$$

$i = 1, \dots, n$. Получаем оценку $\mathbf{E}'_i q^2(u_i) \leq n^{-2} s(u_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $s(t) = \sum_{j=1}^n \text{var } \xi_j(t) + r^2(t, d)/\epsilon + d^{-2}$. Находим, что

$$n^{-1} \sum_i \mathbf{E} q^2(u_i) = n^{-1} \sum_i \mathbf{E}_i [\mathbf{E}'_i q(t)]_{t=u_i} \leq n^{-2} \int s(t) f(t, y) dt.$$

Подставляем оценку сверху для $\text{var } \xi_j(t)$ через второй момент и пользуемся утверждением 3 (при $y = d$). Находим, что (при $\epsilon < y$) правая часть не больше $\pi^{-1} n^{-1} \epsilon^{-3/2} y^{-1/2} (1 + \theta + 2\pi\theta^{1/2} n^{-1})$, где $\theta = \epsilon/y$. Получаем утверждение леммы.

Лемма 4. При $0 < \epsilon \leq y$ для любого положительного $\alpha < 1$

$$\frac{\rho_{32}}{2} \leq y n^{-1} \lambda^{-2} \left(\frac{y}{\epsilon} \right)^{1/2} + a(1 - \alpha)^{-3/2} y \lambda^\alpha,$$

где $\lambda = \delta \sqrt{2\pi y}$, a — абсолютная константа.

Доказательство. Обозначим

$$\hat{f}^i(t) = n^{-1} (2\pi\epsilon)^{-1/2} \left[\sum_{j \neq i} \exp \left(-\frac{(t-u_j)^2}{2\epsilon} \right) + 1 \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{32}}{2} &\leq y^2 \mathbf{E} n^{-1} \sum_i r^2(u_i, d) \text{ind}(\hat{f}^i(u_i) \leq \delta) = y^2 n^{-1} \sum_i \mathbf{E}_i r^2(u_i, d) \mathbf{P}(\hat{f}^i(u_i) \leq \delta) \\ &\leq y^2 n^{-1} \sum_i \mathbf{E}_i r^2(u_i, d) [\mathbf{P}(\hat{f}(t) \leq \delta)]_{t=u_i} = y^2 \int r^2(t, d) \mathbf{P}(\hat{f}(t) \leq \delta) f(t, y) dt, \end{aligned}$$

где $d = y + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Здесь $f(t, y) \leq d^{1/2} y^{-1/2} f(t, d)$, и правая часть оценки ρ_{32} не превосходит $\int y^{3/2} d^{1/2} r^2(t, d) \mathbf{P}(\hat{f}(t) \leq \delta) f(t, d) dt$, $d = y + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Разбиваем этот интеграл на два интеграла I_1 и I_2 по областям $S_1 = \{t: f(t, d) \geq 2\delta\}$ и $S_2 = \{t: f(t, d) < 2\delta\}$, $\rho_{32} \leq I_1 + I_2$. В S_1 согласно неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(\hat{f}(t) < \delta) \leq \mathbf{P}\left[\frac{|\hat{f}(t) - \mathbf{E}\hat{f}(t)|}{\sigma} > \frac{\delta}{\sigma}\right] \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2},$$

где $\sigma^2 = \text{var } \hat{f}(t) \leq n^{-1}(8\pi^2 \varepsilon y)^{-1/2}$. При $\delta = \lambda/\sqrt{2\pi d}$ отношение $\sigma^2/\delta^2 < n^{-1}(y/\varepsilon)^{1/2} \lambda^{-2}$. В силу утверждения 3 $\int r^2(t, d) f(t, d) dt \leq 1/d$ и, значит, $I_1 \leq y n^{-1}(y/\varepsilon)^{1/2} \lambda^{-2}$.

Оценим теперь I_2 . Обозначим для краткости $e_i = \exp(-(t-v_i)^2/2d)$ и будем записывать средние по $i = 1, \dots, n$ угловыми скобками. Например, $f(t, d) = (2\pi d)^{-1/2} \langle e_i \rangle$. Находим, что

$$I_2 = \left(\frac{y}{d}\right)^{3/2} \int_{S_2} \frac{\langle e_i(t-v_i) \rangle^2}{\langle e_i \rangle} \mathbf{P}(\hat{f}(t) < \delta) f(t, d) dt \leq \left(\frac{y}{d}\right)^{3/2} (2\pi d)^{-1/2} \int_{S_2} \langle e_i(t-v_i) \rangle^2 dt.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, $\beta = (1-\alpha)/2$. Произведение $e_i^\beta(t-v_i)^2 \leq d/\beta$ при любом i , откуда находим, что

$$I_2 \leq (2\pi)^{-1/2} y^{3/2} \beta^{-1} d^{-1} \int_{S_2} \langle e_i^{\alpha+\beta} \rangle dt.$$

Обозначим $l = \max_i |v_i|$, $\psi(t) = \pi^{-1} l(l^2 + t^2)^{-1}$. Интеграл в правой части последнего неравенства не больше

$$\int_{S_2} \sqrt{\langle e_i^{2\alpha} \rangle \langle e_i^{2\beta} \rangle} dt \leq \lambda^\alpha \int \sqrt{\langle e_i^{2\beta} \rangle} dt \leq \lambda^\alpha \left[\int \frac{\langle e_i^{2\beta} \rangle}{\psi(t)} dt \right]^{1/2}.$$

Последний интеграл

$$\int \langle e_i^{2\beta} \rangle \pi l^{-1} (l^2 + t^2) dt = \pi^{3/2} \frac{d}{\beta} \left(2l + \frac{d}{2l\beta} \right) \leq 2\pi^{3/2} \frac{d}{\beta}.$$

Получаем оценку $I_2 < 2^{3/2} \pi^{1/4} \lambda^\alpha (1-\alpha)^{-3/2} y$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Опираемся на леммы 2, 3 и 4. Легко убедиться, что

$$R(\hat{v}^0) = \mathbf{E} n^{-1} (\hat{v}^0 - v)^2 \leq R_{\text{opt}} + 2\sqrt{R_{\text{opt}}} (\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_{31}} + \sqrt{\rho_{32}}) + 5\rho_2 + 2\rho_{31} + 2\rho_{32}.$$

Положим, например, $\alpha = 0.9$. Замечаем, что первое слагаемое в оценке величины ρ_{32} согласно леммам 3 и 4 при $\varepsilon \leq y$ не больше оценки ρ_{31} . Приравниваем ρ_2 , ρ_{31} и второе слагаемое ρ_{32} (без коэффициентов). Находим, что $y\theta^2 = n^{-1} \delta^{-2} \theta^{-3/2} = y^{1.45} \delta^{0.9}$, где, как и выше, $\theta = \varepsilon/y$. Эти уравнения удовлетворяются при $\theta = y n^{-18/143}$, $\delta \sqrt{y} = n^{-40/143}$. При этом $\rho = y n^{-36/143} \leq y n^{-1/4}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stein C. M. Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. — In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1956, v. 1, p. 197–206
2. Стейн Ч. Лекции по теории оценивания многих параметров. — Записки ЛОМИ, 1977, т. 74, с. 4–65.
3. Shao P. Y., Strawderman W. E. Improving on the James–Stein positive-part estimator. — Ann. Statist., 1994, v. 42, p. 1517–1538.
4. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. М.: Финансы и статистика, 1989.

5. Сердобольский В. И. Асимптотически доминирующее оценивание векторов математических ожиданий растущей размерности. — В сб.: Случайный анализ. М.: МГУ, 1987, с. 87–96.
6. Сердобольский В. И. Нормализация функционалов качества многомерных статистических процедур. — Докл. РАН, 1995, т. 343, с. 743–745.

Поступила в редакцию
23.I.1992

Переработанный вариант
1.VII.1997

© 1999 г.

ЧУПРУНОВ А. Н.*

О СХОДИМОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ МАКСИМУМОВ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹⁾

В статье приведены предельные теоремы для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области нормального притяжения макс-устойчивой случайной величины со случайными коэффициентами, обладающими свойством малости на бесконечности или его аналогами. Изучается сходимость случайных ступенчатых функций, определенных такими максимумами в пространстве Скорохода. Описываются предельные распределения.

Ключевые слова и фразы: независимые одинаково распределенные случайные величины, сходимость по распределению, функциональная предельная теорема, принцип инвариантности, макс-устойчивые распределения.

1. Введение. Пусть даны: $\{k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность натуральных чисел такая, что $k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$; ξ_{n1} , $1 \leq i \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность серий независимых в каждой серии неотрицательных случайных величин; η_i , $i \in \mathbb{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения F таких, что $\{\xi_{n1}\}$, $\{\eta_i\}$ — независимые семейства. Введем последовательности случайных величин:

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq k_n} \xi_{n1} \eta_i, \quad M_{pn} = n^{-1/p} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i, \quad M_{-pn} = n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $p > 0$. Пусть ζ_{1cp} и ζ_{2cp} — случайные величины с функциями распределения соответственно, где $c > 0$

$$F_{1cp}(x) = \begin{cases} \exp(-cx^{-p}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad F_{2cp}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \exp(-c(-x)^p), & x < 0. \end{cases}$$

Сходимость нормированных максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин к случайным величинам ζ_{1cp} и ζ_{2cp} изучалась в [1] (см. также монографию [2, с. 50]). Эта заметка посвящена изучению сходимости последовательности M_n (п. 2) и сходимости случайных ступенчатых функций, определенных случайными величинами M_n (п. 3) при условии, что последовательность M_{pn} сходится

* НИИММ им. Чеботарева, ул. Университетская, 17, 420008 Казань, Татарстан.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01265.