Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, О сходимости по распределению максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин со случайными коэффициентами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 138–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:01:10

5. Сердобольский В. И. Асимптотически доминирующее оценивание векторов математических ожиданий растущей размерности. — В сб.: Случайный анализ. М.: МГУ, 1987, с. 87–96.
6. Сердобольский В. И. Нормализация функционалов качества многомерных статистических процедур. — Докл. РАН, 1995, т. 343, с. 743–745.

Поступила в редакцию
23.I.1992

Переработанный вариант
1.VII.1997

© 1999 г.

ЧУПРУНОВ А. Н.*

О СХОДИМОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ МАКСИМУМОВ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹⁾

В статье приведены предельные теоремы для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области нормального притяжения макс-устойчивой случайной величины со случайными коэффициентами, обладающими свойством малости на бесконечности или его аналогами. Изучается сходимость случайных ступенчатых функций, определенных такими максимумами в пространстве Скорохода. Описываются предельные распределения.

Ключевые слова и фразы: независимые одинаково распределенные случайные величины, сходимость по распределению, функциональная предельная теорема, принцип инвариантности, макс-устойчивые распределения.

1. Введение. Пусть даны: $\{k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность натуральных чисел такая, что $k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$; ξ_{n1} , $1 \leq i \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность серий независимых в каждой серии неотрицательных случайных величин; η_i , $i \in \mathbb{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения F таких, что $\{\xi_{n1}\}$, $\{\eta_i\}$ — независимые семейства. Введем последовательности случайных величин:

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq k_n} \xi_{n1} \eta_i, \quad M_{pn} = n^{-1/p} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i, \quad M_{-pn} = n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $p > 0$. Пусть ζ_{1cp} и ζ_{2cp} — случайные величины с функциями распределения соответственно, где $c > 0$

$$F_{1cp}(x) = \begin{cases} \exp(-cx^{-p}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad F_{2cp}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \exp(-c(-x)^p), & x < 0. \end{cases}$$

Сходимость нормированных максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин к случайным величинам ζ_{1cp} и ζ_{2cp} изучалась в [1] (см. также монографию [2, с. 50]). Эта заметка посвящена изучению сходимости последовательности M_n (п. 2) и сходимости случайных ступенчатых функций, определенных случайными величинами M_n (п. 3) при условии, что последовательность M_{pn} сходится

* НИИММ им. Чеботарева, ул. Университетская, 17, 420008 Казань, Татарстан.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01265.

к ζ_{1cp} . Кроме того, изучается сходимость последовательности M_n при условии, что последовательность M_{pn} сходится к ζ_{2cp} (п. 4).

Заметим, что результаты п. 3 являются аналогами известных теорем о сходимости случайных ломаных и случайных ступенчатых функций, определенных суммами случайных величин. Отметим некоторые из них. Ю. В. Прохоров в [3] доказал сходимость случайных ломаных, определенных суммами серий независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга, к винеровскому процессу в пространстве $C[0, 1]$. В. М. Круглов в [4], используя введенные В. М. Золотаревым в [5] (см. также монографию [6, с. 154]) понятия r -центра и r -разброса случайных величин, получил обобщение теоремы Прохорова на серии независимых случайных величин таких, что их r -центры равны нулю и суммы r -разбросов случайных величин в каждой серии равны единице. В теореме 1 на с. 547 в монографии И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [7] доказана сходимость случайных ступенчатых функций, определенных суммами одинаково распределенных независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями в пространстве Скорохода $D[0, 1]$. Сходимость случайных ступенчатых функций, определенных суммами независимых одинаково распределенных случайных величин со случайными коэффициентами, к p -устойчивому однородному случайному процессу в пространстве $D[0, 1]$ изучалась в [8].

2. Сходимость последовательности M_n при условии: $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$. В этом пункте и п. 3 мы будем предполагать, что случайные величины ξ_n , удовлетворяют условию бесконечной малости:

$$\max_{1 \leq i \leq k_n} P\{\xi_{n_i} > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Через $\xrightarrow{d}$ будем обозначать сходимость по распределению, через $\stackrel{d}{=}$ будем обозначать равенство распределений.

Для описания условий сходимости последовательности M_n нам потребуется ряд предварительных результатов.

Обозначим: $C(M)$ — множество точек непрерывности функции M ; Ξ_+ — множество убывающих положительных функций M , определенных на положительной полуоси $\mathbf{R}^+$, таких, что $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = 0$; F_M — такая функция распределения, что $F_M(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_M(x) = e^{-M(x)}$ при $x > 0$, где функция $M \in \Xi_+$; ζ_M — случайная величина с функцией распределения F_M . Заметим, что $\zeta_{11p} \stackrel{d}{=} \zeta_M$, где функция $M(x) = x^{-p}$, $x > 0$.

Лемма 1. Пусть $F(0) < 1$. Последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ тогда и только тогда, когда найдется такая $M \in \Xi_+$, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} P\{\xi_{n_i} \eta_i > x\} \rightarrow M(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in C(M), \quad x > 0. \quad (1)$$

Если последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ , то случайная величина $\zeta \stackrel{d}{=} \zeta_M$, а функция M определена в (1).

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 5.3.1 из [6]. Из [1] (см. также теорему 2.2.1 в [2, с. 49]) вытекает

Лемма 2. Последовательность M_{pn} сходится по распределению к невырожденной случайной величине тогда и только тогда, когда

$$\frac{1 - F(xy)}{x^p} \rightarrow Cy^{-p}, \quad x \rightarrow \infty, \quad y > 0, \quad (2)$$

где $C > 0$.

Если выполнено (2), то $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$.

Обозначим: $\zeta^\tau = \zeta I_{\{|\zeta| \leq \tau\}}$, где $\tau > 0$, а ζ — случайная величина; $\mathfrak{P}_p$ — класс таких функций $M \in \Xi_+$, что

$$\int_{x>0} \min(x^p, 1) dM(x) > -\infty.$$

Рассмотрим у с л о в и е (Cp):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} E(\xi_{ni}^\varepsilon)^p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} E(\xi_{ni}^\varepsilon)^p = s < \infty \quad (3)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} P\{\xi_{ni} > u\} = M_1(u), \quad u \in C(M_1), \quad (4)$$

для некоторого $s \geq 0$ и некоторой функции $M_1 \in \mathfrak{P}_p$.

Условие (Cp) является аналогом известных условий сходимости сумм независимых бесконечно малых случайных величин. Более того, справедливо

З а м е ч а н и е 1. По теореме 4 из § 25 в [9] и примечанию к ней последовательность $S_{pn} = \sum_{i=1}^{k_n} (\xi_{ni})^p$ сходится по распределению тогда и только тогда, когда выполнены условия (3) и (4) с некоторой функцией $M_1 \in \mathfrak{P}_p$.

Лемма 3. Пусть $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$. Условие (1) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (Cp). Причем функции M и M_1 связаны следующим равенством:

$$M(x) = scx^{-p} + EM_1\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad x > 0. \quad (5)$$

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2 в [10] с использованием условия (2) вместо условия «случайная величина η принадлежит области нормального притяжения p -устойчивого закона». Из леммы 1 и леммы 3 вытекает

Теорема 1. Пусть $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$. Последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ тогда и только тогда, когда выполнено условие (Cp).

Если выполнено условие (Cp), то $M_n \xrightarrow{d} \zeta_M$, $n \rightarrow \infty$, где функция M определяется равенством (5).

При $M = 0$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Пусть $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$. Последовательность $M_n \xrightarrow{d} \zeta_{1sp}$, $n \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $S_{pn} \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности.

Рассмотрим у с л о в и е (L): $\sigma_{ni}^p = E(\xi_{ni})^p < \infty$ для всех $1 \leq i \leq k_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\max_{1 \leq i \leq k_n} \sigma_{ni}^p/b_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где $b_n = \sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{ni}^p$, $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $\varepsilon > 0$ $(b_n)^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} E(\xi_{ni})^p I\{\xi_{ni} \geq \varepsilon b_n\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что условие (L) является аналогом условия Линдеберга сходимости сумм независимых случайных величин к гауссовской случайной величине.

Следствие 2. Пусть случайные величины η_n удовлетворяют условиям теоремы 1, случайные величины ξ_{ni} удовлетворяют условию (L). Тогда $(b_n)^{-1/p} M_n \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$.

3. Сходимость случайных ступенчатых линий, определенных последовательностью M_n при условии: $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$. Применим следствие 1 теоремы 1 для изучения сходимости случайных ломаных и случайных ступенчатых функций, определенных случайными величинами M_n .

Пусть D — подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$; L — некоторое линейное пространство функций на D , наделенное метризуемой топологией; $H(y)$, $H_n(y)$, $y \in D$, — случайные процессы, почти все траектории которых принадлежат L . Говорят, что процессы $H_n(y)$ сходятся по распределению к процессу $H(y)$ в L (и обозначают $H_n \xrightarrow{d} H$, $n \rightarrow \infty$), если распределения случайных процессов H_n сходятся слабо в L

к распределению случайного процесса H . Здесь в качестве пространства L мы будем рассматривать пространство Скорохода $D[0, 1]$.

Пусть $\infty \geq \tau > 0$. Положим $\xi_{n0} = 0$, $a_{nm} = \sum_{i=0}^m \mathbf{E}(\xi_{ni}^\tau)^p$ при $\tau < \infty$ и $a_{nm} = \sum_{i=0}^m \mathbf{E}(\xi_{ni})^p$ при $\tau = \infty$, $m \leq k_n$, $n \in \mathbf{N}$. Определим случайные процессы $W_{pn}(t)$, $t \in [0, 1]$. При $a_{nm} \leq t < a_{n(m+1)}$, $m < k_n$: $W_{pn}(t) = \max_{1 \leq i \leq m} \xi_{ni} \eta_i$; при $a_{nk_n} \leq t$: $W_{pn}(t) = \max_{1 \leq i \leq k_n} \xi_{ni} \eta_i$.

Обозначим через $M_p = M_p(t)$, $t \in [0, 1]$, такой случайный процесс, что для всех $t \in [0, 1]$ $M_p(t) \stackrel{d}{=} \zeta_{1tp}$ и для всех $t < s$, $s \in [0, 1]$, найдется такая случайная величина $\zeta_{1(s-t)p}$, что случайные величины $M_p(t)$, $\zeta_{1(s-t)p}$ независимы и $M_p(s) = \max(M_p(t), \zeta_{1(s-t)p})$. Заметим, что случайный процесс M_p является аналогом однородного случайного процесса с независимыми приращениями для случая, когда вместо сумм случайных величин рассматриваются их максимумы.

Теорема 2. Пусть $\infty > \tau > 0$, $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$, и $S_{pn} \rightarrow 1/c$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Тогда $W_{pn} \xrightarrow{d} M_p$, $n \rightarrow \infty$, в пространстве $D[0, 1]$.

Доказательство теоремы 2 основано на условии сходимости случайных процессов в пространстве $D[0, 1]$ (см. [7, с. 545]) и следующей лемме.

Лемма 4. Пусть ζ_i , $1 \leq i \leq n$, — независимые случайные величины, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq j \leq n} \min \left[\max_{1 \leq k \leq j} |\zeta_k|, \max_{j+1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \right] > \varepsilon \right\} \leq \left(\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| > \varepsilon \right\} \right)^2. \quad (6)$$

Неравенство (6) является аналогом неравенства (4) на с. 548 в [7] (в котором вместо максимумов случайных величин рассматриваются их суммы). Доказательства этих неравенств в идейном плане близки.

Следствие 1. Пусть $\tau = \infty$, $M_{pn} \xrightarrow{d} \zeta_{1cp}$, $n \rightarrow \infty$, и $S_{pn} \rightarrow 1/c$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Тогда $(b_n)^{-1/p} W_{pn} \xrightarrow{d} M_p$, $n \rightarrow \infty$, в пространстве $D[0, 1]$.

4. Сходимость последовательности M_n при условии: $M_{-pn} \xrightarrow{d} \zeta_{2cp}$, $n \rightarrow \infty$. В [6, с. 324] для массива ζ_{nk} , $1 \leq k \leq k_n$, $n \in \mathbf{N}$, рассмотрено свойство равномерного предположения (UA-свойство). Массив ζ_{nk} , $1 \leq k \leq k_n$, $n \in \mathbf{N}$, имеет UA-свойство тогда и только тогда, когда $\max_{1 \leq i \leq k_n} \mathbf{P}\{\zeta_{ni} > y\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, для всех $y \in \mathbf{R}$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\eta < 0$ почти наверное. Случайные величины $(\xi_{ni})^{-1}$ (не обязательно почти всюду конечные) удовлетворяют условию бесконечной малости тогда и только тогда, когда массив $\{\xi_{ni} \eta_i\}$ имеет UA-свойство.

Везде далее мы будем предполагать, что случайные величины $(\xi_{ni})^{-1}$ удовлетворяют условию бесконечной малости.

Пусть Ξ_- — множество убывающих положительных функций M , определенных на отрицательной полуоси $\mathbf{R}^-$, таких, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} M(x) = \infty$; F_{-M} — такая функция распределения, что $F_{-M}(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $F_M(x) = e^{-M(x)}$ при $x < 0$, где функция $M \in \Xi_-$, ζ_{-M} — случайная величина с функцией распределения F_{-M} . Заметим, что $\zeta_{21p} \stackrel{d}{=} \zeta_{-M}$, где функция $M(x) = (-x)^p$, $x < 0$.

В силу замечания 2 следующая лемма является очевидным следствием теоремы 5.3.1 в [7, с. 325].

Лемма 5. Пусть случайная величина $\eta < 0$ почти наверное. Последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ тогда и только тогда, когда найдется такая $M \in \Xi_-$, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}\{\xi_{ni} \eta_i > x\} \rightarrow M(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in C(M), \quad x < 0. \quad (7)$$

Если последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ , то случайная величина $\zeta \stackrel{d}{=} \zeta_{-M}$, а функция M определена в (7).

Следующая лемма является частным случаем утверждения, доказанного в [1] (см. также теорему 2.2.2 в [2, с. 50]).

Лемма 6. Последовательность M_{-pn} сходится по распределению к невырожденной случайной величине тогда и только тогда, когда

$$\frac{1 - F(xy)}{x^p} \rightarrow C(-y)^p, \quad x \rightarrow 0 + 0, \quad y < 0, \quad (8)$$

где $C > 0$.

Если выполнено (8), то $M_{-pn} \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{2cp}, n \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathfrak{P}_{-p}$ — класс таких возрастающих функций $M: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, что $\int_{x>1} x^{-p} dM(x) < \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty$.

Рассмотрим у с л о в и е (C-p):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}(\xi_{ni})^{-p} I\{\xi_{ni} \geq x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}(\xi_{ni})^{-p} I\{\xi_{ni} \geq x\} = s < \infty, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}\{\xi_{ni} \leq u\} = M_1(u), \quad u \in C(M_1), \quad (10)$$

для некоторого $s \geq 0$ и некоторой функции $M_1 \in \mathfrak{P}_{-p}$.

З а м е ч а н и е 3. По теореме 4 из § 25 в [9] и примечанию к ней последовательность $S_{-pn} = \sum_{i=1}^{k_n} |\xi_{ni}|^{-p}$ сходится по распределению тогда и только тогда, когда выполнены условия (9) и (10) с некоторой функцией $M_1 \in \mathfrak{P}_{-p}$.

Лемма 7. Пусть $M_{-pn} \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{2cp}, n \rightarrow \infty$. Условие (9) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (C-p). Причем функции M и M_1 связаны следующим равенством:

$$M(x) = sc(-x)^{-p} + \mathbf{E} M_1\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad x < 0. \quad (11)$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 2 в [10] с использованием условия (8) вместо условия «случайная величина η принадлежит области нормального притяжения p -устойчивого закона».

Из леммы 5 и леммы 7 вытекает

Теорема 3. Пусть $M_{-pn} \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{2cp}, n \rightarrow \infty$. Последовательность M_n сходится по распределению к невырожденной случайной величине ζ тогда и только тогда, когда выполнено условие (C-p).

Если выполнено условие (C-p), то $M_n \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{-M}, n \rightarrow \infty$, где функция M определяется равенством (11).

Применяя теорему 3 к случаю $M = 0$, получаем

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Последовательность $M_n \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{2sp}, n \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $S_{-pn} \stackrel{d}{\rightarrow} s/c, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

Рассмотрим у с л о в и е (-L): $\sigma_{ni}^{-p} = \mathbf{E}(\xi_{ni})^{-p} < \infty$ для всех $1 \leq i \leq k_n, n \in \mathbf{N}$, $\max_{1 \leq i \leq k_n} \sigma_{ni}^{-p}/b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, где $b_n = \sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{ni}^{-p}, n \in \mathbf{N}$, и для каждого $\varepsilon > 0$ $b_n \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}(\xi_{ni})^{-p} I\{\xi_{ni} \geq \varepsilon b_n\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Следствие 2. Пусть случайные величины η_n удовлетворяют условиям теоремы 3, случайные величины ξ_{ni} удовлетворяют условию (-L). Тогда $(b_n)^{1/p} M_n \stackrel{d}{\rightarrow} \zeta_{2cp}, n \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. — Ann. Math., 1943, v. 44, p. 423–453.

2. Галамбош Я. Асимптотическая теория максимальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2, с. 117–238.
4. Круглов В. М. Слабая сходимость случайных ломаных к винеровскому процессу. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 2, с. 209–218.
5. Золотарев В. М. Центр и разброс распределения вероятностей. — Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 5, с. 1010–1012.
6. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986. 415 с.
7. Гитман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
8. Чупрунов А. Н. О сходимости случайных ломаных с нормировками типа Стюдента. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 914–919.
9. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 264 с.
10. Chuprunov A. N. On convergence in law of sums of independent random elements with random coefficients. — In: Stability Problems for Stochastic Models. VSR. 1993, p. 41–54.

Поступила в редакцию
20.XI.1996

© 1999 г.

ШЕРВАШИДЗЕ Т.*

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УСЛОВНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, УПРАВЛЯЕМЫХ КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

В терминах условных распределений слагаемых даются достаточные условия для справедливости локальных теорем для условно независимых случайных величин, управляемых конечной однородной регулярной цепью Маркова.

Ключевые слова и фразы: условно независимые случайные величины, локальные теоремы для плотностей, локальная теорема для решетчатых распределений, нормальное притяжение к устойчивому закону.

1. Введение. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим стационарную последовательность $(\xi_j, X_j)_{j \geq 1}$, где $(\xi_j)_{j \geq 1}$ — однородная регулярная цепь Маркова с пространством состояний $\{1, \dots, k\}$ (составляющим один эргодический класс без периодических подклассов) и стационарными вероятностями $p_1, \dots, p_k$, а случайные величины (с.в.) $(X_j)_{j \geq 1}$ принимают значения из $\mathbf{R}$. Если для заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ случайных векторов Y и η под P_Y и $P_{Y|\eta}$ подразумевать распределение Y и условное при данном η распределение Y соответственно, а $\xi_{1:n} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, то будем считать, что при любом натуральном n , $\mathbf{P}$ -п.н.

$$P_{(X_1, \dots, X_n)|\xi_{1:n}} = P_{X_1|\xi_1} \times \dots \times P_{X_n|\xi_n} \quad (1)$$

(ср. с. [1]), говоря при этом, что условно независимые (у.н.) с.в. $(X_j)_{j \geq 1}$ управляются цепью Маркова $(\xi_j)_{j \geq 1}$.

Не вдаваясь в истоки и примеры такого словоупотребления, мы считаем его в данном контексте более удобным, чем термины «с.в., заданные на (состояниях) цепи Маркова», «последовательность с цепной зависимостью» и т.п. (см., например,

* Математический институт им. А. Размадзе Академии наук Грузии, ул. М. Алексидзе, 1, Тбилиси, Грузия.