Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Мирзаев, А. Н. Старцев, Предельные теоремы для одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Бартлетта–МакКендрика, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 385–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:14:14

построена последовательность зависимых, попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с тремя значениями, которая не подчиняется центральной предельной теореме и обладает целым рядом других специальных свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feller W.* A limit theorem for random variables with infinite moments. — *Amer. J. Math.*, 1946, v. 68, № 2, p. 257–262.
2. *Fristedt B.* A short proof of a known limit theorem for sum of independent random variables with infinite expectations. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, № 3, p. 1114–1115.
3. *Kochen S., Stone C.* A note on the Borel–Cantelli lemma. — *Illinois J. Math.*, 1964, v. 8, p. 248–251.
4. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974, 119 с.
5. *Etemadi N.* An elementary proof of the strong law of large numbers. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1981, v. 55, № 1, p. 119–122.
6. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
8. *O'Brien G. L.* Pairwise independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1980, v. 8, № 1, p. 170–175.
9. *Lancaster H. O.* Pairwise statistical independence. — *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 36, № 4, p. 1313–1317.
10. *Geisser S., Mantel N.* Pairwise independence of jointly dependent variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1962, v. 33, № 1, p. 290–291.
11. *Janson S.* Some pairwise independent sequences for which the central limit theorem fails. — *Stochastics*, 1988, v. 23, № 4, p. 439–448.
12. *Bradley R. C.* A stationary, pairwise independent, absolutely regular sequence for which the central limit theorem fails. — *Probab. Theory Related Fields*, 1989, v. 81, № 1, p. 1–10.

Поступила в редакцию
21.VI.2004

© 2006 г.

МИРЗАЕВ М.*, СТАРЦЕВ А. Н.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ
С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ ДВУХ ТИПОВ, ОБОБЩАЮЩЕЙ
ПРОЦЕСС ЭПИДЕМИИ БАРТЛЕТТА–МАК-КЕНДРИКА**

Данная статья является продолжением работы [1], в которой получены предельные теоремы для числа частиц, изменивших свой тип к моменту окончания процесса, в предположении, что начальное число частиц обоих типов стремится к бесконечности. Здесь эта задача решается в условиях, когда начальное число частиц с «энергией» является фиксированным. Такое предположение приводит к рассмотрению более актуальных моделей с точки зрения их приложений, в частности, в эпидемиологии. Часть полученных результатов (теоремы 1 и 2) анонсированы в [2].

Ключевые слова и фразы: взаимодействие частиц, немарковские модели, число частиц, изменивших тип, предельные теоремы.

* Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан; e-mail: mathinst@uzsci.net

1. Введение. Рассматривается замкнутая (по числу частиц) система взаимодействующих частиц двух типов: A и B . Частицы типа B обладают запасом некоторой «энергии», а частицы типа A способны приобретать ее при взаимодействии с единичной интенсивностью, обладая при этом некоторым порогом чувствительности. Если запас приобретенной «энергии» достигает уровня чувствительности, то частица типа A переходит в частицу типа B , а частица типа B , исчерпавшая запас своей «энергии», погибает. Процесс заканчивается, если в системе остаются частицы одного типа.

Пусть $\xi(t) = (\xi_A(t), \xi_B(t))$ — число частиц типа A и B , т.е. состояние системы в момент времени $t \geq 0$, причем $\xi(0) = (n, m)$. Далее, пусть моменты потери «энергии» частицами типа B задаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $T_1, \dots, T_m, \dots$, а уровни чувствительности частиц типа A — независимыми случайными величинами $L_1, \dots, L_n$, имеющими показательное распределение с параметром 1 ($L_i \in \exp(1)$) и не зависящими от $T_1, \dots, T_m, \dots$.

Формализация описанной модели даже в форме полумарковского процесса приводит к большим трудностям из-за сложности в описании времен пребывания процесса $\xi(t)$ в своих состояниях.

Однако, как показано в [1], если функция распределения $F(t) = P\{T_1 < t\}$ является абсолютно непрерывной, то процессу $\xi(t)$ можно придать форму неоднородного во времени марковского процесса. В случае, когда $F(t) = 1 - \exp(-\rho t)$, процесс становится однородным и имеет следующие переходные вероятности:

$$\begin{cases} P\{\xi(t + \Delta t) = (s - 1, i + 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = si \Delta t + o(\Delta t), \\ P\{\xi(t + \Delta t) = (s, i - 1) \mid \xi(t) = (s, i)\} = \rho i \Delta t + o(\Delta t), \\ P\{\xi(t + \Delta t) = (s, i) \mid \xi(t) = (s, i)\} = 1 - (\rho + s)i \Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \quad (1)$$

Марковский процесс (1) хорошо изучен как модель распространения эпидемий в замкнутых популяциях и известен как процесс Бартлетта–Мак–Кендрика. В этом случае $\xi_A(t)$ и $\xi_B(t)$ интерпретируются как число восприимчивых индивидумов в популяции и число источников инфекции соответственно, величины $T_1, T_2, \dots$ и $L_1, L_2, \dots$ — соответственно как инфекционные периоды источников инфекции и иммунологические барьеры восприимчивых, а функционал ν (число частиц, изменивших свой тип к моменту окончания процесса) — как размер эпидемии.

Несмотря на то, что уравнение Колмогорова для производящей функции вероятностей состояний процесса (1) разрешимо в явном виде (см., например, [3]), сами эти вероятности имеют необозримо громоздкий вид. Это обстоятельство стимулировало применение асимптотического подхода к исследованию отдельных функционалов от рассматриваемого процесса при n и m , стремящихся к бесконечности (см. по этому поводу монографию [3]). В частности, в работе А. В. Нагаева [4] изучались предельные распределения размера эпидемии в случае, когда $n \rightarrow \infty$, а m остается фиксированным.

Следует также отметить, что процесс (1) является частным случаем марковской модели с взаимодействием частиц, введенной Б. А. Севастьяновым [5]. Соответствующие уравнения Колмогорова для этих моделей оказались неразрешимыми в явном виде. Тем не менее ряд результатов точного и асимптотического характера, в частности для процессов эпидемий, был получен в работах А. В. Калинкина [6], [7].

В общем случае рассматриваемый процесс не будет марковским и основой для изучения функционала ν служит обобщение конструкции Т. Селлке, построенное в работе [1]. (Исходная конструкция Т. Селлке была предложена для марковского случая [8].) Это обобщение позволяет записать распределение ν в следующей форме:

$$P\{\nu = k\} = P\{L_{(1)} \leq S_m, \dots, L_{(k)} \leq S_{m+k-1}, L_{(k+1)} > S_{m+k}\}, \quad (2)$$

где $L_{(1)} \leq \dots \leq L_{(n)}$ — вариационный ряд, образованный из случайных величин $L_1, \dots, L_n$, а $S_k = T_1 + \dots + T_k$.

2. Постановка задачи и полученные результаты. Как упоминалось выше, нас будет интересовать предельное распределение случайной величины ν . Результаты такого типа были получены одним из авторов в [1] в условиях, когда n и m стремятся

к бесконечности. В данной работе величина m считается фиксированной, что приводит к качественно иным результатам как в смысле класса предельных законов, так и в смысле методов их получения. В марковском случае такое исследование было проведено в работе А. В. Нагаева [4]. Асимптотический анализ проводится в схеме серий, т.е. когда распределение $F(t)$ случайной величины T_1 меняется вместе с n .

Основой для исследования распределения случайной величины ν служит соотношение (2), которому в наших условиях можно придать более простую форму. Действительно, так как $L_1 \in \exp(1)$, то, как известно (см., например, [9]), $L_{(1)}, L_{(2)} - L_{(1)}, \dots, L_{(n)} - L_{(n-1)}$ являются независимыми случайными величинами и $L_{(k+1)} - L_{(k)} \in \exp(n-k)$. В силу этого (2) можно представить в виде

$$P\{\nu = k\} = P\{\zeta_1 \geq 0, \dots, \zeta_k \geq 0, \zeta_{k+1} < 0\}, \quad (3)$$

где $\zeta_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$, $\eta_1 = S_m - \xi_1/n$, $\eta_2 = T_{m+1} - \xi_2/(n-1), \dots, \eta_{k+1} = T_{m+k} - \xi_{k+1}/(n-k)$, а $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\xi_1 \in \exp(1)$. Таким образом, ν представляет собой момент первого попадания в $(-\infty, 0)$ или, другими словами, нижний слабый лестничный момент [9] для случайного блуждания $\{\zeta_k\}$. Сразу отметим, что это блуждание порождено суммами независимых величин, но с различными распределениями и в условиях схемы серий.

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем следующие обозначения:

$$a_n = ET_1, \quad \theta_n = (na_n)^{-1}, \quad \sigma_n^2 = DT_1, \quad \beta_{3n} = E|T_1 - a_n|^3,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \Pi_k(\lambda(k)) = \lambda(0) \frac{\lambda^{k-1}(k)}{k!} e^{\lambda(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что θ_n играет роль регулирующего параметра подобно параметру ρ/n в марковской модели, т.е. когда $T_1 \in \exp(\rho)$.

Теорема 1. Если $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < \infty$, $n\sigma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для любых $m \geq 1$ и $k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\nu = k\} = \Pi_k\left(\frac{m+k}{\theta_0}\right).$$

Эта теорема не имеет аналога в марковском случае и основана, в частности, на следующем утверждении, имеющем и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\xi_1 \in \exp(1)$, то для любых $\lambda > 0$, $a \geq 0$ и $k \geq 0$

$$\pi_k \equiv P\left\{\sum_{i=1}^s \xi_i \leq \lambda + (s-1)a, 1 \leq s \leq k; \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > \lambda + ka\right\} = \Pi_k(\lambda + ak).$$

При $a = 0$ имеем классический результат о пуассоновости распределения момента первого перескока горизонтальной границы суммами показательно распределенных случайных величин (см., например, [9]).

Теорема 2. Если $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < \infty$, $n\sigma_n \rightarrow \sigma_0$, $0 < \sigma_0 < \infty$, $nT_i \xrightarrow{d} \tau_i$, $ET_i^{2+\sigma} < \infty$ для некоторого $\sigma > 0$, то для любых $m \geq 1$ и $k \geq 0$

$$P_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\nu = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^s X_i \geq 0, 1 \leq s \leq k; \sum_{i=1}^{k+1} X_i < 0\right\},$$

где $X_1 = \tau_1 + \dots + \tau_m - \xi_1$, $X_2 = \tau_{m+1} - \xi_2, \dots, X_{k+1} = \tau_{m+k} - \xi_{k+1}$. При этом вероятность вырождения процесса $P \equiv P_1 + P_2 + \dots = 1$, если $\theta_0 \geq 1$, и $P < 1$, если $\theta_0 < 1$.

Следствие (А. В. Нагаев, [4]). Если $T_1 \in \exp(\rho)$, $\theta_n \equiv \rho/n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < \infty$, то для любых $m \geq 1$ и $k \geq 0$

$$P_k = \frac{m}{m+2k} C_{m+2k}^k \left(\frac{1}{1+\theta_0}\right)^k \left(\frac{\theta_0}{1+\theta_0}\right)^{m+k},$$

причем $P = \min(1, \theta_0^m)$.

Теорема 3. Если $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < 1$, $n\sigma_n \rightarrow \sigma_0$, $0 < \sigma_0 < \infty$, $nT_i \xrightarrow{d} \tau_i$, $n^3\beta_{3n} \leq C < \infty$ и последовательность $\{T_i\}$ удовлетворяет условию Линдберга, то

$$P\{\nu > n\alpha_n - b_n x\} = P + (1 - P)\Phi(x) + o(1)$$

равномерно по $x \leq (n\alpha_n - l_n)/b_n$, где l_n — медленно растущая к бесконечности функция, P — вероятность вырождения процесса, α_n — положительный корень уравнения $x + \theta_n \ln(1 - x) = 0$, $b_n = \theta_0[n\alpha_0(1 - \alpha_0)(1 + (1 - \alpha_0)\sigma_0^2)]^{1/2}/(\alpha_0 - 1 + \theta_0)$, $\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Данная теорема является обобщением теоремы 2 из [4], полученной для марковского случая.

3. Доказательства основных и вспомогательных утверждений. Начнем с доказательства леммы 1, утверждение которой можно было бы вывести из общей теории граничных задач с использованием тождества Поллачека–Спицера и других классических подходов (см., например, [10, § 11]). Но мы здесь приведем прямое комбинаторное доказательство, сводящее основное утверждение к обобщенной биномиальной формуле Абеля. При этом мы приведем основную схему доказательства, опуская ряд относительно простых технических переходов.

Доказательство леммы 1. Легко убедиться, что $\pi_n = I_n e^{-(\lambda + na)}$, где $I_n = \int_0^\lambda du_1 \int_0^{\lambda + a - u_1} du_2 \dots \int_0^{\lambda + (n-1)a - u_1 - \dots - u_{n-1}} du_n$.

Остается доказать, что $I_n = \lambda(\lambda + na)^{n-1}/n!$.

Нетрудно установить, что I_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$I_n = \frac{(\lambda + (n-1)a)^n}{n!} - \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)^k a^k}{k!} I_{n-k}.$$

Дальнейшее доказательство проводится по индукции и сводится к проверке соотношения

$$\sum_{k=0}^n \frac{(k-1)^k a^k}{k!} \frac{\lambda(\lambda + (n-k)a)^{n-k-1}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda + (n-1)a)^n}{n!}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , после несложных преобразований приходим к тождеству $\sum_{s=0}^m C_m^s (n-m+s)^{s-1} (m-s-1)^{m-s} = (n-1)^m/(n-m)$, которое является частным случаем упомянутой выше формулы Абеля (см., например, [11, п. 1.5])

$$\sum_{s=0}^m C_m^s (x+s)^{s-1} (y+m-s)^{m-s} = \frac{(x+y+m)^m}{x},$$

что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1. Перепишем соотношение (3) в следующем виде:

$$P\{\nu = k\} = P\left\{ \sum_{i=1}^s \xi_i \leq nS_{m+s-1}^0 + (m+s-1)na_n - R_{s-1}, 1 \leq s \leq k; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > nS_{m+k}^0 + (m+k)na_n - R_k \right\}, \quad (4)$$

где $S_j^0 = S_j - ES_j = S_j - ja_n$, $R_j = \sum_{i=1}^j i\xi_{i+1}/(n-i)$, $1 \leq j \leq k$.

Отсюда, учитывая, что $na_n \rightarrow \theta_0^{-1}$, $D(nS_{m+k}^0) = (m+k)(n\sigma_n)^2 \rightarrow 0$, $ER_k \rightarrow 0$, $DR_k \rightarrow 0$ для любого фиксированного k , имеем

$$P\{\nu = k\} = P\left\{ \sum_{i=1}^s \xi_i \leq \frac{m+s}{\theta_0} + o_P(1), 1 \leq s \leq k; \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > \frac{m+k}{\theta_0} + o_P(1) \right\}.$$

Утверждение теоремы теперь следует из приведенной выше леммы.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим соотношение (4), придав ему следующую форму:

$$\begin{aligned} P\{\nu = k\} &= P\left\{\sum_{i=1}^s \xi_i \leq nS_{m+s-1} - R_{s-1}, 1 \leq s \leq k; \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i > nS_{m+k} - R_k\right\} \\ &= P\{\tilde{\zeta}_1 \geq 0, \dots, \tilde{\zeta}_k \geq 0, \tilde{\zeta}_{k+1} < 0\} + o(1), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{\zeta}_k = \tilde{\eta}_1 + \dots + \tilde{\eta}_k$, $\tilde{\eta}_1 = nS_m - \xi_1$, $\tilde{\eta}_2 = nT_{m+1} - \xi_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+1} = nT_{m+k} - \xi_{k+1}$.

Из условий теоремы следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_k &\rightarrow^d X_k, \quad E\tilde{\eta}_k \rightarrow EX_k = \begin{cases} m\theta_0^{-1} - 1, & k = 1, \\ \theta_0^{-1} - 1, & k \geq 2, \end{cases} \\ D\tilde{\eta}_k &\rightarrow DX_k = \begin{cases} m\sigma_0^2 + 1, & k = 1, \\ \sigma_0^2 + 1, & k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко обосновать также и слабую сходимость совместного распределения в (5) при любом фиксированном k , т.е.

$$P\{\nu = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^s X_i \geq 0, 1 \leq s \leq k; \sum_{i=1}^{k+1} X_i < 0\right\} + o(1) \equiv P\{\tau = k\} + o(1),$$

где τ — первый нижний лестничный момент для случайного блуждания, порожденного $X_1, X_2, \dots$.

Если $\theta_0 \geq 1$, то $EX_k \leq 0$ при $k \geq 2$ и лестничный момент τ будет собственным (см., например, [9]), т.е. $P = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\tau = k\} = 1$. Если же $\theta_0 < 1$, то $P < 1$ и процесс с вероятностью $1 - P$ уходит в $+\infty$.

Доказательство теоремы 3. Для любого натурального N и последовательности (k_n) , $k_n > N$, запишем

$$P\{\nu < k_n\} = P\{\nu \leq N\} + P\{N + 1 \leq \nu < k_n\} \equiv P_{n1} + P_{n2}. \quad (6)$$

В силу теоремы 2 для любого фиксированного N

$$P_{n1} = \sum_{k=0}^N P\{\nu = k\} = \sum_{k=0}^N P_k + o(1) = P + \Delta_N + o(1), \quad (7)$$

где $\Delta_N = P_{N+1} + P_{N+2} + \dots < \varepsilon$ для $N > N_\varepsilon$. Далее, вероятность $P\{\nu = k\}$ запишем в виде

$$P\{\nu = k\} = P\{\hat{\zeta}_1 \geq 0, \dots, \hat{\zeta}_k \geq 0, \hat{\zeta}_{k+1} < 0\},$$

$P\{\nu = k\} = P\{\hat{\zeta}_1 \geq 0, \dots, \hat{\zeta}_k \geq 0, \hat{\zeta}_{k+1} < 0\}$, где $\hat{\zeta}_k = \hat{\eta}_1 + \dots + \hat{\eta}_k$, $\hat{\eta}_k = n\eta_k$, $k = 1, 2, \dots$. Заметим, что $E\hat{\eta}_1 = m\alpha_n - 1 = m/\theta_n - 1$, т.е. если $m \rightarrow \infty$, то $E\hat{\eta}_1 \rightarrow \infty$, что фактически обеспечивает уход блуждания в $+\infty$ с нормальным предельным законом для ν , и в этом состоит основное отличие от случая $m = \text{const}$. Сформулируем соответствующий результат из работы [1].

Лемма 2. Если $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ и при этом $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $0 < \theta_0 < 1$, $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma_0^2$, $0 < \sigma_0^2 < \infty$, $n^3\beta_{3n} = o(m)$, $m = o(\sqrt{n})$, то

$$P\{\nu > n\alpha_n - b_n x\} \Rightarrow \Phi(x),$$

где b_n, α_n и α_0 определены в теореме 3.

Заметим, что если $m \geq c\sqrt{n}$, то α_n будет корнем более сложного уравнения $m/n + x + \theta_n \ln(1 - x) = 0$.

Дальнейшее доказательство связано с оценкой P_{n2} в (6) при помощи леммы 2. Сходная идея была реализована в работе [4] для марковского случая. Для $y \geq 0$ введем событие $A_N(y) = \{\text{блуждание } (k, \hat{\zeta}_k) \text{ в момент } N \text{ попадет в интервал } (y, y + dy)\}$, не

заходя в отрицательную полуплоскость} и обозначим $\pi_N(dy) = P(A_N(y))$. Тогда для $k \geq N + 1$ можно записать

$$P\{\nu = k\} = \int_0^\infty P(\nu = k \mid A_N(y)) \pi_N(dy). \quad (8)$$

Ввиду марковости блуждания $\{\hat{\zeta}_k\}$ имеем

$$\begin{aligned} P(\nu = k \mid A_N(y)) &= P(\hat{\zeta}_1 \geq 0, \dots, \hat{\zeta}_k \geq 0, \hat{\zeta}_{k+1} < 0 \mid A_N(y)) \\ &= P\{y + \hat{\eta}_{N+1} \geq 0, \dots, y + \hat{\eta}_{N+1} + \dots + \hat{\eta}_k \geq 0, y + \hat{\eta}_{N+1} + \dots + \hat{\eta}_{k+1} < 0\} \\ &\equiv P\{\bar{\zeta}_1 \geq 0, \dots, \bar{\zeta}_{k-N} \geq 0, \bar{\zeta}_{k-N+1} < 0\} = P\{\bar{\nu} = k - N\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{\nu}$ — лестничный момент для блуждания $\{\bar{\zeta}_k\}$ и при этом $E\bar{\zeta}_1 = y + 1/\theta_n - n/(n-N)$.

Теперь покажем, что y можно выбрать достаточно большим при большом значении N . Для этого область интегрирования в (8) разобьем на две части $D_N(y) = \{y: |y - E\bar{\zeta}_N| < N^{3/4}\}$ и $\bar{D}_N(y) \cap \{y: y \geq 0\}$.

Заметим, что $E\bar{\zeta}_N \sim N(1 - \theta_0)/\theta_0$, $D\bar{\zeta}_N \sim (1 + \sigma_0^2)N$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $N > N_\varepsilon$

$$P\{|\bar{\zeta}_N - E\bar{\zeta}_N| \geq N^{3/4}\} \leq \frac{D\bar{\zeta}_N}{N^{3/2}} \sim \frac{1 + \sigma_0^2}{N^{1/2}} < \varepsilon. \quad (10)$$

Из (6)–(10) имеем

$$P\{\nu < k_n\} = P + \int_{D_N(y)} P\{\bar{\nu} < k_n - N\} \pi_N(dy) + \Delta_N,$$

где $\Delta_N < \varepsilon$ при $N > N_\varepsilon$.

Теперь, пользуясь леммой 2, с учетом того, что $\int_{D_N(y)} \pi_N(dy) = 1 - P + \Delta_N$, а $P\{\bar{\nu} < k_n\} \sim \Phi(x)$ при $k_n = n\alpha_n - b_n x$ равномерно относительно $y \in D_N(y)$, получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старцев А. Н. Об одной модели с взаимодействием частиц двух типов, обобщающей процесс эпидемии Барлетта–Мак-Кендрика. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 463–482.
2. Mirzaev M., Startsev A. N. Limit theorems in a non-Markovian model of interacting two-types particles. — Proceedings of the International Conference «Advances in Statistical Inferential Methods» (Almaty, 2003). Алматы: НИЦ «Фылым», 2003, p. 81–85.
3. Daley D. J., Gani J. Epidemic Modelling: An Introduction. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 213 p.
4. Нагаев А. В. Некоторые предельные теоремы для одной стохастической модели эпидемий. — Матем. заметки, 1973, т. 13, № 5, с. 709–716.
5. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц. — Тезисы докладов III Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Т. II. Вильнюс: Институт математики и кибернетики АН ЛитССР, 1981, с. 139–140.
6. Калинин А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 773–780.
7. Калинин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, № 2, с. 23–84.
8. Sellke T. On the asymptotic distribution of the size of a stochastic epidemic. — J. Appl. Probab., 1983, v. 20, № 2, p. 390–394.

9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
10. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 264 с.
11. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982, 256 с.

Поступила в редакцию

02.VIII.2004

Исправленный вариант

27.V.2005

© 2006 г.

НАГАЕВ С. В.*

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ И МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ И МАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказывается вероятностное неравенство для $\max_{k \leq n} S_k$, где $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ в предположении, что последовательность S_k , $k = \overline{1, n}$, образует супермартингал. Неравенство формулируется в терминах вероятностей $P(X_j > y)$ и условных дисперсий случайных величин X_j , $j = \overline{1, n}$. В качестве простого следствия выводится известное моментное неравенство Буркхольдера. Даются численные оценки постоянных в неравенстве Буркхольдера.

Ключевые слова и фразы: математическое ожидание, мартингал, неравенство Буркхольдера, неравенства Бернштейна и Беннета-Хёфдинга, неравенство Розенталя, неравенство Фука, сепарабельное банахово пространство, супермартингал, фильтрованное вероятностное пространство.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть последовательность случайных величин S_k , $k \geq 1$, образует супермартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}, P)$ с $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, т.е.

$$E\{S_k | \mathcal{F}_{k-1}\} \leq S_{k-1}.$$

Положим $X_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 0$. Определим случайные величины σ_k^2 равенствами

$$\sigma_k^2 = E\{X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}.$$

Обозначим

$$B_k^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \quad \bar{X}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k, \quad A_t = \sum_{j=1}^n E|X_j|^t.$$

Определим

$$Q(x) = P(\bar{X}_n > x) + P(B_n > x).$$

Вероятностным неравенствам для мартингалов и семимартингалов посвящено довольно много работ, начиная с классических результатов Дуба (см. [1]).

В 1969 г. Стейгер [2] вывел для $\bar{S}_n$ неравенство типа Беннета-Хёфдинга при условии, что $|X_i| < L_i < \infty$, $\sigma_i^2 \leq b_i^2 < \infty$, где L_i и b_i^2 — некоторые постоянные.

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, Университетский пр., 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01252) и INTAS (код проекта 03-51-5018).