Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Золотарев, В. Ю. Королев, XIX международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 155–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:18:59

© 1999 г.

**ХІХ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР ПО ПРОБЛЕМАМ
УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

ХІХ Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей состоялся в Вологде с 6 по 12 сентября 1998 г. Этот семинар прошел на базе Вологодского государственного педагогического университета под эгидой Математического института РАН и Московского государственного университета. По традиции, тематика семинара охватывала предельные теоремы теории вероятностей, асимптотические методы математической статистики, характеристационные задачи, теорию вероятностных метрик, предельные теоремы и характеристационные задачи в стохастическом анализе, задачи теории надежности, теории массового обслуживания, финансовой и актуарной математики. В работе семинара приняли участие специалисты из Бельгии, Болгарии, Венгрии, Ирана, Италии, Польши, России, Франции, Югославии и Японии.

Интригующим фоном для семинара явился нектати совпавший с ним по времени финансовый кризис. Проведение семинара превратилось для его организаторов в своеобразный вид спорта, схожий с затяжными прыжками с парашютом. Из-за кризиса, к сожалению, многие российские и зарубежные участники семинара (в том числе из Голландии, Израйля, Литвы, Украины и Швейцарии) не смогли лично участвовать в его работе и участвовали заочно. Они представили свои работы в виде стендовых докладов и в публикациях, сопутствующих семинару. В число последних входят резюме сообщений, подборка которых публикуется ниже, и труды семинара, которые будут опубликованы в двух номерах «Journal of Mathematical Sciences».

К счастью, большое внимание и существенная поддержка семинара со стороны руководителей Вологодского государственного педагогического университета, Вологды и Вологодской области, а также высокие деловые качества местных организаторов семинара полностью оградили его участников от неблагоприятного влияния кризиса. Семинар прошел в исключительно комфортных условиях. Культурная программа была весьма насыщена. Участники семинара получили возможность ощутить атмосферу величественного спокойствия русского севера, посетив старинные монастыри в Вологде, Кириллове и Ферапонтове, и воочию познакомиться с работой знаменитых вологодских кружевниц.

Следующий, ХХ Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей состоится с 5 по 12 сентября 1999 г. в Наленчове близ Люблина, Польша. Информация об этом семинаре опубликована в № 4 журнала «Теория вероятностей и ее применения» за 1998 г.

*В. М. Золотарев,
В. Ю. Королев*

Абусев Р. А. (Пермь, Россия) **О несмещенных оценках распределений выборочных характеристик двухпараметрического экспоненциального закона.**

Двухпараметрическое распределение имеет скалярная случайная величина x с плотностью

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{x - \mu}{\sigma} \right\}, \quad x \geq \mu, \quad |\mu| < \infty, \quad \sigma > 0. \quad (1)$$

Если $\pi_{00} = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}\}$ — н.п.в. из распределения (1), то статистики $t_0 = \min_j x_{0j}$, $s_0 = n_0^{-1} \sum_{j=1}^{n_0} x_{0j} - t_0$ являются полными достаточными статистиками для μ , σ и плотность их совместного распределения при известных параметрах имеет вид

$$f(t_0, s_0 | \mu, \sigma) = \frac{s_0^{n_0-2} n_0^{n_0}}{\Gamma(n_0 - 1) \sigma^{n_0}} \exp \left\{ -\frac{n_0(s_0 + t_0 - \mu)}{\sigma} \right\}, \quad s_0 \geq 0, \quad t_0 \geq \mu. \quad (2)$$

В данном резюме впервые получены несмещенные оценки для плотности (2) и функции правдоподобия

$$L(\pi_{00} | \mu, \sigma) = \prod_{j=1}^{n_0} f(x_{0j} | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^{n_0}} \exp \left\{ -\frac{n_0}{\sigma} (s_0 + t_0 - \mu) \right\} \quad (3)$$

при различных априорных предположениях о параметрах μ, σ и построены статистические методы групповой классификации. Основные результаты содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть параметры μ, σ распределения (1) неизвестны и дана выборка $\pi_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из (1), независимая от π_{00} . Тогда несмещенная оценка для плотности (2) задается формулой

$$\begin{aligned} \hat{f}(t_0, s_0 | \mu, \sigma) = & \frac{n_0^{n_0-1} B(n_0, n)}{(n + n_0)^{n_0} s_{n+n_0}^{n+n_0-2}} \left[s_{n+n_0} - \frac{n_0 s_0}{n + n_0} \frac{n_0(t_0 - t_{n+n_0})}{n + n_0} \right]^{n-2} \\ & + \frac{n_0}{n + n_0} \delta(t_0 - t_{n+n_0}), \end{aligned} \quad (4)$$

если $t_0 \geq t_{n+n_0}$, $n_0(s_0 + t_0 - t_{n+n_0}) < (n + n_0) s_{n+n_0}$ и $\hat{f}(t_0, s_0 | \mu, \sigma) = 0$ в остальных случаях, и является функцией только достаточных статистик $t_{n+n_0} = \min_{i=1,2,\dots,(n+n_0)} x_i$, $s_{n+n_0} = \frac{1}{n+n_0} \sum_{i=1}^{n+n_0} x_i - t_{n+n_0}$, $x_{n+j} = x_{0j}$, $j = 1, \dots, n_0$.

Следствие 1. Пусть случайная величина x имеет распределение (1) с известным μ и неизвестным σ . Тогда несмещенная оценка для плотности (2) имеет вид

$$\hat{f}_\mu(t_0, s_0 | \sigma) = \frac{n_0^{n_0} s_0^{n_0-2} \Gamma(n + n_0 - 1) [(n + n_0) \tilde{s}_{n+n_0} - n_0 s_0 - n_0(t_0 - \mu)]^{n-1}}{\Gamma(n_0 - 1) \Gamma(n - 1) [(n + n_0) \tilde{s}_{n+n_0}]^{n+n_0-1}},$$

$t_0 \geq 0$, $\mu_0 > 0$ и выражена только через достаточную статистику $(n + n_0) \tilde{s}_{n+n_0} = \sum_{i=1}^{n+n_0} x_i - (n + n_0) \mu$.

Следствие 2. Несмещенная оценка для плотности (2) при неизвестном μ и известном σ имеет вид

$$\hat{f}_\sigma(t_0, s_0 | \mu) = \frac{nn_0^{n_0} s_0^{n_0-2}}{\sigma^{n_0} (n + n_0) \Gamma(n_0 - 1)} \exp \left\{ -\frac{n_0}{\sigma} [s_0 + t_0 - t_{n+n_0}] \right\}$$

$s_0 \geq 0$, $t_0 \geq t_{n+n_0}$.

Теорема 2. Несмещенная оценка для функции правдоподобия (3), при известном μ и известном σ задается формулой

$$\begin{aligned} \hat{L}_\sigma(\pi_{00} | \mu) = & \frac{n}{(n + n_0) \sigma^{n_0}} \exp \left\{ -\frac{n_0(\bar{x}_0 - t_{n+n_0})}{\sigma} \right\} + \frac{1}{(n + n_0) \sigma^{n_0-1}} \\ & \times \sum_{j=1}^{n_0} \delta(x_{0j} - t_{n+n_0}) \exp \left\{ -\frac{(n_0 - 1)(\bar{x}_{0j} - t_{n+n_0})}{\sigma} \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{x}_0 = n_0^{-1} \sum_{i=1}^{n_0} x_{0i}$, $\bar{x}_{0i} = (n_0 - 1)^{-1} (x_{01} + \dots + x_{0i-1} + x_{0i+1} + \dots + x_{n_0})$, $x_{0i} \geq t_{n+n_0}$, $i = 1, 2, \dots, n_0$.

На основе полученных оценок строятся статистические решающие правила классификации для отнесения группы π_{00} к одной из M совокупностей π_i , имеющих распределение $f(x | \mu_i, \sigma_i)$ с неизвестными параметрами μ_i, σ_i на основе обучающих выборок $\pi_{i0} = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$ из π_i , $i = 1, 2, \dots, M$. В частности, используя оценки (4), получаем правило

$$\pi_{00} \subset \pi_i, \quad \text{если } q_i \hat{f}(t_0, s_0 | \mu_i, \sigma_i) \geq q_j \hat{f}(t_0, s_0 | \mu_j, \sigma_j), \quad \text{при всех } j = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Ниже приведена теорема о статистических свойствах правила (5).

Теорема 3. *Статистическое решающее правило групповой классификации (5) является асимптотически оптимальным.*

Афанасьева Л. Г., Хмелев Д. В. (Москва, Россия) **Большие транспортные сети с конечномерным пространством состояний. Асимптотический подход.**

Рассмотрим сеть из N узлов (станций), которые делятся на n районов. При увеличении N количество районов остается неизменным. Количество станций в районе j равно $d_j^N N$, $\sum_{j=1}^n d_j^N = 1$. Существуют такие $d_j > 0$, что $\sqrt{N}(d_j^N - d_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ для $j = 1, \dots, n$. Далее j и v обозначают номер района и могут принимать значения от 1 до n . На станции в j -м районе требования поступают пуассоновским потоком с интенсивностью λ_j . Если на станции есть обслуживающий прибор, то, в соответствии со стохастической матрицей $P = \{p_{jv}\}_{j,v=1,\dots,n}$, требование вместе с прибором направляется на станцию в v -го района, которую он выбирает равновероятно среди всех станций v -го района. Обслуживание требования состоит в его перемещении с одной станции до другой.

В [1] рассмотрена полностью симметричная сеть. Наша модель является обобщением [1] в сторону асимметрии. Время перемещения от станции j -го района до станции v -го района распределено экспоненциально с параметром μ_{jv} . Время движения между станциями внутри j -го района также экспоненциально распределено с параметром μ_{jj} . Если на станции нет ни одного прибора и есть места ожидания, то требование встает в очередь, иначе требование теряется для системы. Все станции v -го района однотипны — на каждой из них может базироваться не более m_v автомобилей и на каждой имеется k_v мест для пассажиров. Если прибор, который прибыл в v -й район, не находит свободной стоянки, то он направляется (без требования) в район l в соответствии со стохастической матрицей $\tilde{P} = \{\tilde{p}_{vl}\}_{v,l=1,\dots,n}$; станция l -го района выбирается равновероятно среди $d_l^N N$ станций района. Первоначально на всех станциях в j -м районе находится r_j автомобилей, где r_j — целые числа от 1 до m_j . Потребуем, чтобы матрица $P\tilde{P}$ обладала единственной инвариантной мерой

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)^T: \pi^T P\tilde{P} = \pi^T, \quad \pi_1 + \dots + \pi_n = 1, \quad \pi \geq 0.$$

Обозначим через $x_{j,i}(t)$ долю узлов в состоянии i в районе j среди всех N станций, $\sum_{i=-k_j}^{m_j} x_{j,i}(t) = d_j^N$; через $\tilde{M}_{jv}(t)$ количество приборов, которые покинули j -й район и в момент t направляются на станцию в v -м районе. Определим процесс $M_{jv}(t) = \tilde{M}_{jv}(t)/N$. Запишем состояние системы как вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\alpha}$ длинной $\alpha = n^2 + \sum_{v=1}^n (k_v + m_v + 1)$: $\mathbf{x} = (M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n}, M_{21}, \dots, M_{nn}, x_{1,-k_1}, x_{1,-k_1+1}, \dots, x_{1,m_1}, x_{2,-k_2}, \dots, x_{n,m_n})$. Для фиксированного N случайный процесс $X_t^N = x(t)$ является эргодичной цепью Маркова.

Пусть $x_t(x)$ — решение следующей системы дифференциальных уравнений с начальным условием $x_0(x)$: для $j, v = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j,-k_j} &= \frac{\lambda_j d_j x_{j,-k_j+1} - M^j x_{j,-k_j}}{d_j}, \\ \dot{x}_{j,i} &= \frac{\lambda_j d_j x_{j,i+1} - (\lambda_j d_j + M^j) x_{j,i} + M^j x_{j,i-1}}{d_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{x}_{j,m_j} = \frac{-\lambda_j d_j x_{j,m_j} + M_{x_j, m_j-1}^j}{d_j},$$

$$\dot{M}_{jv} = p_{jv}(\lambda_j d_j S_j^+ + M^j S_j^-) - \mu_{jv} M_{jv} + d_j M^j x_{j,m_j} \tilde{p}_{jv}, \quad (2)$$

где $S_j^+ \equiv d_j \sum_{i=1}^{m_j} x_{j,i}$, $S_j^- \equiv d_j \sum_{i=-k_j}^{-1} x_{j,i}$, $M^j = \sum_{l=1}^n \mu_{lj} M_{lj}$. Обозначим через ε_x распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}^a$.

Теорема 1. Пусть $X_0^N \rightarrow \varepsilon_x$ слабо. Справедливы утверждения:

(i) $\sup_{s \leq t} |X_s^N - x_s(x)| \xrightarrow{P} 0$ для всех $t \geq 0$ при $N \rightarrow \infty$.

(ii) Процессы $\sqrt{N}(X_t^N - x_t(x))$ сходятся по распределению к непрерывному процессу с независимыми приращениями Y с ковариационной функцией $C(x)$, где $\hat{C}(x) = \int_0^t \hat{c}(x_s(x)) ds$, а $c: \mathbf{R}^a \rightarrow \mathbf{R}^{a^2}$ — некоторая явная матричная функция.

Полученные результаты позволяют получать характеристики X_t^N (стационарное распределение, распределение числа требований и т.д.) через изучение нелинейной динамической системы $x_t(x)$. Имитационное моделирование подтвердило близость траекторий этих процессов при больших N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanassieva L. G., Fayolle G., Popov S. Yu. Models for transportation networks. — J. Math. Sciences, 1997, v. 84, № 3, p. 1092–1103.

Басаликас А., Янушкявичене О. (Вильнюс, Литва) **О скорости сходимости одной квадратичной формы.**

В работе [6] была рассмотрена скорость сходимости квадратичной формы

$$Y_n = \frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$$

к предельному распределению, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Задача исследования скорости сходимости такого полинома была предложена В. М. Золотаревым. В этой работе также рассматривается квадратичная форма (полином второго порядка)

$$Z_n = a_n \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + b_n \sum_{i=1}^n X_i^2$$

с $a_n = a/n$, $b_n = b/n$, $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \cdot b \neq 0$. По сравнению с [6] существенно улучшены оценки в равномерной метрике. Заметим, что здесь рассматриваются полиномы более общего вида и также получены нижние оценки для скорости сходимости. Для упрощения выкладок предполагается, что $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$. Нетрудно видеть, что Z_n сходится к $Z = aN^2 + b$ при $n \rightarrow \infty$, где N — стандартная нормально распределенная случайная величина.

Обозначим через ρ и L соответственно равномерную и Леви метрики, $\beta_s = \mathbf{E}|X_1|^s$ и предположим, что

$$\beta_{4+2\delta} < \infty, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (1)$$

Теорема 1. Если выполнено условие (1), то существует такая абсолютная константа $C > 0$, что

$$\rho(Z_n, aN^2 + b) \leq C \left\{ \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + n^{-(\delta+4)/20} \beta_{4+2\delta} \left(1 + \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right| \min \left(\ln n, \frac{1}{1-\delta} \right)} \right) \right\}.$$

В частности,

$$\rho(Z_n, aN^2 + b) \leq \begin{cases} c \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_4}{n^{1/5}} \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|} \right), & \delta = 0, \\ c \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_6}{n^{1/4}} \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right| \ln n} \right), & \delta = 1. \end{cases}$$

Теорема 2. Если выполнено условие (1), с $0 < \delta \leq 1$, то существуют такие абсолютные константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$L(Z_n, aN^2 + b) \leq c_1 \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + |b| \sqrt{\beta_4 - 1} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) + r_n,$$

где $r_n \leq c_2 E|X_1^2 - 1|^{2+\delta} (\beta_4 - 1)^{-1-\frac{\delta}{2}} n^{-\delta/2}$, $0 < \delta \leq 1$, $\beta_4 \neq 1$; $r_n = 0$, если $\beta_4 = 1$.

З а м е ч а н и е. Заметим, что если $\beta_4 = 1$ (или $\beta_4 = \beta_2^2 = 1$), то $L(Z_n, aN^2 + b) = O(n^{-1/2})$. Равенство $\beta_4 = 1$ означает, что $E(X_1^2 - 1)^2 = 0$ или $X_1^2 = 1$ с вероятностью 1. Легко видеть, что в этом случае член $b \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ в полиноме Z_n равен b . Отсюда следует, что порядок $\sqrt{\ln n/n}$ в теореме 2 обусловлен членом $b \sum_{i=1}^n X_i^2/n$.

Мы также построили пример, показывающий, что порядки нижних оценок в теоремах 1 и 2 соответственно равны $n^{-1/4}$ и $\sqrt{\ln n/n}$ (в случае $\delta = 1$).

Предельные распределения и скорости сходимости случайных полиномов и квадратичных форм рассматривались также в работах [1]–[5], [7].

В работе [5] исследовалась скорость сходимости случайных полиномов, при этом на класс рассматриваемых полиномов накладывались строгие ограничения. Результат упомянутой работы был получен в метрике $\kappa_1(X, Y) = \int |F_X(u) - F_Y(u)| du$ и в метрике $\pi(X, Y)$. В метрике $\pi(X, Y)$ порядок оценки был $n^{-1/4}$.

В работах [1], [3] методом характеристических функций получены оценки величины $\rho(XAX^T, \xi A \xi^T)$, где $X = (X_1, \dots, X_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ξ_i — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, причем векторы X и ξ предполагаются независимыми, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ — вещественная симметрическая матрица с $a_{ii} = 0$. Полученные оценки имеют порядок $n^{-1/6} (\ln n)^{5/3}$ и $n^{-1/8}$ соответственно. Поскольку матрица квадратичной формы Z_n (при $n \rightarrow \infty$) имеет лишь одно строго отличное от нуля собственное значение, то в нашем случае эти результаты невозможно применить из-за невыполнения условий [3], либо они дают тривиальную оценку [1] (в [1] и [3] для получения содержательной оценки необходимо, чтобы матрица A для всех n имела хотя бы два строго отличных от нуля собственных значения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalykas A. The rate of convergence for quadratic forms. — Lietuvos Matem. Rink., 1997, v. 37, № 3, p. 259–279.
2. Золотарев В. М. О случайных симметрических полиномах. В сб.: Вероятностные распределения и матем. статистика. Ташкент: Фан, 1986, с. 170–188.
3. Ротарь В. И., Шервашидзе Т. Л. Некоторые оценки распределений квадратических форм. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, с. 549–554.
4. Сейдаль Л. О предельных распределениях случайных симметрических полиномов. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, № 2, с. 266–278.
5. Szeidl L., Zolotarev V. On rate of convergence in a limit theorem for random symmetric polynomials. — J. Math. Sciences (в печати).
6. Yanushkevichiene O. On the rate of convergence of second order random polynomial. — J. Math. Sciences (в печати).
7. Янушкевичене О. Л. О предельных распределениях однородных случайных полиномов произвольной степени. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, № 3, с. 671–677.

Бенинг В. Е. (Москва, Россия) **О дефекте двухвыборочного рангового критерия.**

Рассматривается двухвыборочная проблема в случае общих альтернатив. Получена формула для предела нормированной разности между мощностями наилучшего и асимптотически эффективного рангового критерия.

Пусть $p(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$, $0 \in \Theta$ — семейство одномерных плотностей и $F(x, \theta)$ — соответствующие функции распределения (ф.р.). Предположим, что нам даны случайные выборки $(X_1, \dots, X_n)$; $(Y_1, \dots, Y_m)$, $N = m + n$ с плотностями $f(x)$ и $g(x)$

соответственно и мы хотим проверить гипотезу $H_0: f(x) = g(x) = p(x, 0)$ против последовательности близких альтернатив вида

$$H_{1n}: f(x) = p(x, N^{-1/2}t), \quad g(x) = p(x, 0), \quad 0 < t \leq C, \quad C > 0.$$

По лемме Неймана-Пирсона, при фиксированном t , наилучший критерий уровня $\alpha \in (0, 1)$ основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_N(t) = \sum_{i=1}^n \log \frac{p(X_i, N^{-1/2}t)}{p(X_i, 0)}.$$

Пусть $(R_1, \dots, R_N)$ — вектор рангов в объединенной выборке $(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_m)$ и $T_N = N^{-1/2} \sum_{i=1}^n a_N(R_i)$, где

$$a_N(i) = J\left(\frac{i}{N+1}\right), \quad J(s) = l^{(1)}(F^{-1}(s), 0),$$

$$F^{-1}(s) = \inf\{x: F(x, 0) \geq s\}, \quad s \in [0, 1], \quad l^{(1)}(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x, \theta)$$

асимптотически эффективная ранговая статистика ([1, с. 86]).

Обозначим через $\beta_N^*(t)$ и $\beta_N(t)$ мощности критериев уровня $\alpha \in (0, 1)$, основанных соответственно на $\Lambda_N(t)$ и T_N .

Теорема. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \lambda \in (0, 1)$ и выполнены условия регулярности близкие к условиям работ [4], [6]. Тогда

$$r_t = \lim_{N \rightarrow \infty} N(\beta_N^*(t) - \beta_N(t)) = \frac{1}{2t\sqrt{\lambda I}} \varphi(u_\alpha - t\sqrt{\lambda I}) \text{Var}[\Delta \mid \Lambda = u_\alpha \sqrt{I}],$$

где $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$, $I = E_0(l^{(1)}(X_1, 0))^2$, $\Phi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — ф.р. и плотность стандартного нормального закона, а случайные величины Λ и Δ являются соответственно линейным и квадратичным функционалом от броуновского моста.

З а м е ч а н и я. 1. Двухвыборочные ранговые критерии для случая параметра сдвига ($p(x, \theta) = p(x - \theta)$) рассматривались в работе [2]. Метод доказательства существенно опирался на технически весьма сложное построение асимптотических разложений (а.р.) для мощностей $\beta_N^*(t)$ и $\beta_N(t)$ (для этого сначала строились а.р. для некоторых условных распределений, а затем после усреднения получалось искомое а.р.) и величина r_t находилась из этих а.р. прямыми вычислениями без использования условных дисперсий.

2. При доказательстве теоремы применяется подход, предложенный в [5], не использующий а.р. и состоящий в проверке условий общей теоремы из [6], аналогично случаю одновыборочного рангового критерия (см. [7]). При этом, по сравнению с [2], ослабляются условия регулярности.

3. Величина r_t тесно связана (линейно выражается) с асимптотическим дефектом, введенным в работе [3]. Выражение для условной дисперсии найдено явно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 96-01-01919, 97-01-00271 и РГНФ, проект 97-02-02235.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаек Я., Шудак З. Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971, 375 с.
2. Bickel P. J., van Zwet W. R. Asymptotic expansions for the power of the distribution free tests in the two-sample problem. — Ann. Statist., 1978, v. 6, № 5, p. 937–1004.
3. Hodges J. L. Jr., Lehmann E. L. Deficiency. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 3, p. 783–801.
4. Chibisov D. M., van Zwet W. R. On the Edgeworth expansion for the logarithm of the likelihood ratio. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 3, с. 417–439.
5. Чибисов Д. М. Вычисление дефекта асимптотически эффективных критериев. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 2, с. 269–288.

6. Bening V. E. A formula for deficiency: one sample L- and R-tests 1. — Math. Methods of Statist., 1995, v. 4, № 2, p. 167–188.
7. Bening V. E. A formula for deficiency: one sample L- and R-tests 2. — Math. Methods of Statist., 1995, v. 4, № 3, p. 274–293.

Бенинг В. Е., Королев В. Ю. (Москва, Россия) **Статистическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска.**

1. Введение. Продолжая исследования асимптотических свойств обобщенных процессов риска, начатые в работе [1], мы рассматриваем задачу о статистическом оценивании вероятности разорения для таких процессов и исследуем асимптотические свойства предлагаемых оценок.

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_0(t) = ct - \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $c > 0$ — ставка страховой премии, $\{X_j\}_{j \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $EX_j = a$, имеющие смысл страховых выплат, $N_1(t)$ — стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), независимый от $\{X_j\}_{j \geq 1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t . (Мы рассматриваем классический процесс риска в форме, немного отличающейся от традиционной. Как правило, предполагается, что процесс возникновения страховых требований — однородный пуассоновский с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$. Мы же считаем, что $\lambda = 1$. Это предположение отнюдь не ограничивает общность наших рассуждений, а означает лишь, что мы выбираем единицу времени так, чтобы в среднем на единицу времени приходилась ровно одна страховая выплата. При этом c имеет смысл прироста капитала страховой компании за выбранную таким образом единицу времени.)

Пусть $\Lambda(t)$, $t \geq 0$ — независимый от $N_1(t)$ случайный процесс с неограниченно возрастающими, почти наверное конечными непрерывными траекториями, выходящими из нуля. Процесс Кокса (также называемый дважды стохастическим пуассоновским процессом), управляемый процессом $\Lambda(t)$, определяется как

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим процесс

$$R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Этот процесс является естественным обобщением классического процесса риска (1) и более реалистичной и гибкой моделью, поскольку модель (3) учитывает как флуктуации риска, так и флуктуации объема портфеля. С практической точки зрения бессмысленно считать интенсивность страховых выплат постоянной на *бесконечном* временном интервале (поведение процесса риска на котором учитывается в определении вероятности разорения). Можно показать, что при флуктуациях риска (непостоянной интенсивности страховых выплат) в *разумных* стратегиях страховщика интенсивность пополнения резерва *не должна* быть постоянной [2], [3]. С другой стороны, очевидно, что среднее число выплат должно быть пропорционально количеству страховых договоров в портфеле страховой компании, которому, в свою очередь, в определенном смысле пропорционально значение $\Lambda(t)$. Следуя [1], процесс $R(t)$ мы будем называть обобщенным процессом риска.

Пусть $s > 0$ — начальный капитал страховой компании. Задача статистического оценивания вероятности разорения $\psi(s)$ для обобщенного процесса риска (равно как и для классического процесса риска) по его предыстории до некоторого момента t_0 имеет одну важную особенность. А именно, число $N(t_0)$ страховых выплат, осуществленных до этого момента, случайно. Поэтому на практике вероятность разорения приходится оценивать по выборке $(X_1, X_2, \dots, X_{N(t_0)})$ *случайного объема*. При этом

класс возможных распределений случайной величины $N(t_0)$ даже при описанных выше ограничениях весьма широк и отнюдь не ограничивается только пуассоновскими законами. Например, если $\Lambda(t_0)$ имеет гамма-распределение, то распределение $N(t_0)$ является отрицательным биномиальным.

Символы $\Rightarrow$ и $\xrightarrow{P}$ будут соответственно обозначать слабую сходимость и сходимость по вероятности. Стандартная нормальная функция распределения будет обозначаться $\Phi(x)$.

2. Статистические оценки вероятности разорения. Исходя из принципа неразорения в среднем, предположим, что $c > a$. Несложно видеть, что вероятность разорения для обобщенного процесса риска $\psi(s) = P\{s + \inf_{t>0} R(t) < 0\}$ совпадает с вероятностью разорения для классического процесса риска $\psi_0(s) = P\{s + \inf_{t>0} R_0(t) < 0\}$, поскольку процесс $R(t)$ отличается от $R_0(t)$ лишь случайной (вообще говоря, неоднородной) компрессией времени, не изменяющей амплитуду траекторий. Поэтому мы можем использовать хорошо известное представление вероятности разорения для классического процесса риска

$$\psi_0(s) = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^k \left(1 - G^{*k}(s)\right), \quad (4)$$

где $G(x) = (a)^{-1} \int_0^x (1 - F(y)) dy$, $F(y) = P\{X_1 < y\}$, а символ G^{*k} обозначает k -кратную свертку функции распределения G с самой собой, $G^{*k}(x) = (G^{*(k-1)} * G)(x)$, $k \geq 1$, G^{*0} — функция распределения с единственным единичным скачком в нуле. Соотношение (4) называют формулой Поллачека–Хинчина или формулой Бекмана (см., например, [4]).

Мы будем считать, что параметры c и a известны. Пусть $A \subseteq \mathbf{R}^1$. Символом $1_A(x)$ обозначим индикаторную функцию множества A : $1_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $1_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Пусть $m(n)$ — некоторое целое число, $m(n) \leq n$.

Следуя идеям, изложенным в статье [5], заменим $F(x)$ в выражении для $G(x)$ на эмпирическую функцию распределения, построенную по выборке $(X_1, \dots, X_{N(t_0)})$. Подставив результат в (4), мы получим статистическую оценку $\psi(s)$ вида

$$\psi_{N(t_0)}(s) = \frac{a}{c} - \left(1 - \frac{a}{c}\right) \bar{\psi}_{N(t_0)}(s), \quad (5)$$

где

$$\bar{\psi}_{N(t_0)}(s) = \sum_{k=1}^{m(N(t_0))} \left(\frac{a}{c}\right)^k U_{N(t_0),k}, \quad (6)$$

и при каждом $n \geq 1$ U -статистика $U_{n,k} = (C_n^k)^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} h_k(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ определяется симметричным ядром

$$h_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{a^k} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty 1_{(-\infty, s)}(y_1 + \dots + y_k) \prod_{j=1}^k 1_{[y_j, \infty)}(x_j) dy_1 \dots dy_k.$$

3. Асимптотические свойства оценки вероятности разорения для обобщенного процесса риска. Обозначим

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{k+m} \sigma_{k,m},$$

где $\sigma_{k,m} = E h_k(X_1) h_m(X_1) - G^{*k}(s) G^{*m}(s)$, $h_j(x) = (a)^{-1} \int_0^\infty G^{*j}(s - y) 1_{[y, \infty)}(x) dy$.

Теорема. Пусть оценка $\psi_{N(t)}(s)$ определяется соотношениями (5) и (6), причем функция $m(n) \leq n$ такова, что $m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{m(n)} = 0. \quad (7)$$

Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $d(t) > 0$ — функция такая, что $d(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Для того чтобы случайная величина $\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s))$

имела предельное распределение

$$\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) \Rightarrow Z, \quad t \rightarrow \infty, \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина Y , что

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow Y, \quad t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

При этом

$$P\{Z < x\} = E\Phi(x\sqrt{Y}), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (10)$$

Предельное распределение (10) одно и то же для любого $s > 0$.

Доказательство этой теоремы основано на результатах работ [5], [6] и [7].

Как следует из теоремы, статистика $\psi_{N(t)}(s)$ является по крайней мере асимптотически несмещенной оценкой вероятности разорения. Однако реально судить о точности статистической оценки вероятности разорения можно лишь тогда, когда стохастическая неоднородность процесса заключения договоров регулярна в смысле (9). Более того, необходимо иметь информацию о распределении случайной величины Y .

Особенностью данной задачи является то, что статистические оценки $\psi(s)$ для обобщенного процесса риска в случае невырожденной случайной величины Y реально имеют существенно меньшую точность, чем можно было бы думать, основываясь на результатах работы [5], где доказана асимптотическая нормальность оценок вероятности разорения при *неслучайном* объеме выборки.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда $\Lambda(t)$ имеет показательное распределение с параметром $1/t$. В этом случае распределение случайной величины Y из (9) является стандартным показательным, и, следовательно, распределение случайной величины Z из (8) имеет вид

$$P\{Z < x\} = \int_0^\infty \Phi(\sqrt{y}x) e^{-y} dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \right). \quad (11)$$

У этого распределения отсутствуют моменты какого бы то ни было положительного порядка! Несложно видеть, что разность между квантилями порядков 0.975 и 0.025 этого распределения (что соответствует длине 95%-го «доверительного» интервала) почти в 2,2 раза больше разности соответствующих квантилей нормального закона с тем же параметром масштаба. Этот пример наглядно иллюстрирует, насколько важно учитывать случайность объема выборки, по которой оценивается вероятность разорения. В противном случае можно существенно ошибиться в реальной точности оценок или в их реальной надежности (легко видеть, что «доверительная» вероятность «95%-го нормального» интервала, вычисленная по распределению (11), оказывается меньшей, чем 0.82).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00271, Российского гуманитарного научного фонда, проект 97-02-02235, а также Committee on Knowledge Extension Research (CKER) Американского общества актуариев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска. — Обозрение приклад. и прикл. матем., 1998, т. 5, в. 1, с. 116–133.
2. Bültmann H. Tendencies of development in risk theory. — In: Centennial Celebration of the Actuarial Profession in North America. V. 2. The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, 1989, p. 499–521.
3. Эмбрехтс П., Кляппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 374–416.
4. Asmussen S. Applied Probabilities and Queues. New York: John Wiley, 1987.
5. Croux K., Veraverbeke N. Nonparametric estimators for the probability of ruin. — Insurance: Mathematics and Economics, 1990, v. 9, p. 127–130.

6. Королев В. Ю. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 786–792.
7. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 907–910.

Broniatowski M. (Reims, France) From finite convolutions to large deviations.

Consider a real valued random variable with distribution function (d.f.) F and assume that $\sup\{x: F(x) < 1\} = \infty$. Motivated by the study of extreme values of samples, renewal processes, as well as statistical problems linked with the study of large claims in insurance studies there has been an increasing interest in classifying tail behavior, namely $1 - F(x)$ as $x \rightarrow \infty$, in connection with convolution operations (see [3] and references therein, as well as the considerable more recent literature). In a series of previous works ([1], [2], [4], [6]) we have been interested in the role of extreme values of samples or tail behavior in the large deviation probabilities and their extensions, as well as their role in the shape of the very small increments of partial sum processes.

In [5] the following situation is handled:

Let $X, X_1, \dots, X_n$ be independent identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.'s) with d.f. F . It is shown that a sufficient condition for

$$\log \mathbf{P}\{(X_1 + \dots + X_n)n^{-1} > x\} = n \log \mathbf{P}\{X > x\} (1 + o(1)) \quad (1)$$

as $x \rightarrow \infty$ is

$$-\log \mathbf{P}\{X > x\} = x^\alpha l(x) \quad (2)$$

as $x \rightarrow \infty$ where $l(\cdot)$ is a function slowly varying at infinity and $\alpha > 1$, while $-\log \mathbf{P}\{(X_1 + \dots + X_n)n^{-1} > x\} = n^{1/\alpha} \log \mathbf{P}\{X > x\} (1 + o(1))$ whenever (2) holds with $0 < \alpha < 1$.

In the limiting case $\alpha = 1$, (1) may also hold, for example depending upon the properties of $\varphi(t) := \mathbf{E}e^{tX}$ as $t \rightarrow t_0 := \sup\{t: \varphi(t) < \infty\}$; however (1) may hold even if $\varphi(t) = \infty$ for all t . Those results complete previous works of statistical interest [8], [2]. Whenever $\alpha > 1$, standard tauberian theorems for the Laplace transform imply that

$$-\log(1 - F)(x) = -h(x) (1 + o(1)) \quad (3)$$

as $x \rightarrow \infty$, where $h(x) = \sup_{t>0} \{tx - \log \varphi(t)\}$ is the Chernoff function.

When $(1 - F)(x)$ decreases to 0 as $x \rightarrow \infty$ much faster than indicated in (1), (2) does not hold any longer (nor does (3)). Recall from [3] that a measurable function f from $\mathfrak{R}^+$ to $\mathfrak{R}^+$ belongs to the class $\Gamma(g)$ for some function g from $\mathfrak{R}^+$ to $\mathfrak{R}^+$ when $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x + yg(x))]/f(x) = e^y$ for all $y \in \mathfrak{R}^+$ as $x \rightarrow \infty$. Typical example is $f(x) = e^{x^\beta}$ with $\beta > 0$.

In the case when $-\log(1 - F) \in \Gamma(g)$ for some function g , it is proved in [5] that (3) is replaced by

$$[-\log(1 - F)]^\leftarrow(t) = t^{-1} \log \varphi(t) (1 + o(1)) \quad (4)$$

as $t \rightarrow \infty$, under mild and usual assumptions on F ; here $f^\leftarrow(t) := \inf\{s: f(s) \geq t\}$. In such case (1) is replaced by a quantile relation between mean and min behaviors in the tail, namely

$$F_{S_n/n}^\leftarrow(1 - u) = F_{\text{Min}(X_1, \dots, X_n)}^\leftarrow(1 - u) (1 + o(1)) \quad (5)$$

as $u \rightarrow 0$, and $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

Note that both (3) and (4) imply

$$h([- \log(1 - F)]^\leftarrow)(t) = t(1 + o(1)) \quad (6)$$

as $t \rightarrow \infty$.

The following extensions of (3) and (4) hold, relating fixed sample size results to extended large deviation results:

(i) when (3) holds, then for any sequence $a_n \rightarrow \infty$, $-\log \mathbf{P}\{S_n/n > a_n\} = nh(a_n) (1 + o(1)) = -\log \mathbf{P}\{\text{Min}(X_1, \dots, X_n) > a_n\} (1 + o(1))$ as $n \rightarrow \infty$,

(ii) when (4) holds, then for any sequence $v_n \rightarrow \infty$ such that $v_n/n \rightarrow \infty$, $F_{S_n/n}^{\leftarrow}(1 - e^{-v_n}) = F_{\min(X_1, \dots, X_n)}^{\leftarrow}(1 - e^{-v_n})(1 + o(1)) = F^{\leftarrow}(1 - e^{-v_n/n})(1 + o(1))$ as $n \rightarrow \infty$.

From (1) and (5) all of the results in [9] and [6] can be copied for the study of the a.s. strong behavior of the statistics $\max_{0 \leq i \leq n-k_n-1} \min(X_{i+1}, \dots, X_{i+k_n})$ and the functional version of it.

Much sharper results than (3) and (6) can be obtained when we assume some additional structure on F to hold. A typical example is when dealing with log-concave distribution functions: let $m(t) := (\log \varphi)'(t)$ and $s^2(t) := m'(t)$; the properties of those functions is well known (see [7]). If $t_0 < \infty$, assume that $\liminf_{t \rightarrow t_0} (t_0 - t)s(t) > 0$. Assume $s(\cdot)$ is a self neglecting function (see [3]); then for any sequence $x_n = m(t_n)$ such that $t_n s(t_n) \sqrt{n} \rightarrow \infty$ if $t_0 = \infty$ or $(t_0 - t_n)s(t_n)\sqrt{n} \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{n} > x_n \right\} = \frac{e^{-h(x_n)}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt{n} \chi(x_n)} (1 + o(1)) \quad (7)$$

as $n \rightarrow \infty$; here $\chi(x_n) := t_n s(t_n)$; those results extend the finite size results obtained in [7]; the same asymptotic result (7) holds true when the function $s(\cdot)$ varies regularly in a neighborhood of t_0 (finite or infinite; see [4]); observe that (7) allows to work either with moderate deviations ($x_n \rightarrow \mathbf{E}X$ not too rapidly), or with large deviation (this is Petrov Theorem), or with very large deviations. Sharp results in this vein, handling quite general situations in $\mathbf{R}^d$, can be found in [1]. When sharp second order developments of $\mathbf{P}\{S_n/n > x_n\}$ hold, as in (7), with $x_n \rightarrow \infty$, it is possible to extend [9] in order to enlight the role of extreme values in the small increments of partial sums.

REFERENCES

1. Barbe P., Broniatowski M. A sharp Petrov type large deviation formula, (в печати).
2. Beirlant J., Broniatowski M., Teugels J., Vynker P. The mean residual life function at great age: Applications to tail estimation. — J. of Statist. Planning and Inference, 1995, v. 45, p. 21–45.
3. Bingham N., Goldie C. M., Teugels J. Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
4. Broniatowski M. Grandes, tres grandes et petites déviations pour des suites de variables aléatoires indépendantes, C.R.A.S., Série I, 1987, v. 305, p. 627–630.
5. Broniatowski M., Fuchs A. Tauberian theorems, Chernoff inequality and the tail behavior of finite convolutions of distribution functions. — Advances in Mathematics, 1995, v. 116, № 1, p. 12–33.
6. Broniatowski M., Mason D. M. Extended large deviations. — J. Theor. Probab., 1994, v. 7, p. 647–666.
7. Deheuvels P., Devroye L., Lynch J. Exact convergence rate in the limit theorem of Erdős–Rényi and Shepp. — Ann. Probab., 1986, v. 14, p. 209–223.
8. Jureckova J. Tail behavior of location estimators. — Ann. Statist., 1981, v. 9, p. 578–585.
9. Mason D. M. An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers — Ann. Probab., 1989, v. 17, p. 257–265.

Булинская Е. В. (Москва, Россия) **О выходе на границу в системах типа just-in-time.**

Системы с синхронизацией поставок и потребления (иначе, системы типа just-in-time) получили широкое распространение в 80-е годы (см., например, [1]). Цель их введения — уменьшение издержек за счет сокращения или полной ликвидации запасов. Они изучались с различных точек зрения, однако обычно предполагалось, что все рассматриваемые процессы детерминированные.

Для учета случайных возмущений автором было предложено (см., например, [2]–[4]) использовать специальный класс случайных блужданий в полосе $(0, n)$ и была обоснована необходимость введения управлений.

В данной работе исследование развивается в двух направлениях — дважды стохастические системы и малые случайные возмущения. Главный объект изучения — момент $T_{x,n}$ выхода на поглощающую границу, начиная из состояния x . Верхняя граница n всегда предполагается поглощающей, а в нуле может быть расположен поглощающий, задерживающий или отражающий экран (соответственно речь идет о модели 1, 2, 3).

Для того чтобы сформулировать некоторые из результатов, предположим, что $\{p(i), q(i), i \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, удовлетворяющих следующим условиям $p(i) \geq 0, q(i) \geq 0$ и $p(i) + q(i) \leq 1$. Случайное блуждание строится следующим образом. Сначала выбирается некоторая конкретная последовательность $\{p(i), q(i), i \geq 1\}$ в соответствии с распределением $\{p(i), q(i)\}$, а затем рассматривается однородная цепь Маркова с вероятностями перехода

$$e(i, i+1) = p(i), \quad e(i, i-1) = q(i) \quad \text{и} \quad e(i, i) = 1 - p(i) - q(i). \quad (1)$$

Иными словами, дважды стохастическая система описывается случайным блужданием в случайной среде. Процессы такого типа были введены более 20 лет назад (см., например, [5]) в связи с потребностями физики и продолжают интенсивно изучаться. Для теории запасов интересно асимптотическое поведение (при $n \rightarrow \infty$) нормированного своим средним времени поглощения $\eta_{x,n}^{(l)} = T_{x,n}^{(l)} (\mathbf{E} T_{x,n}^{(l)})^{-1}$, $l = 1, 2, 3$.

Пусть $\hat{\alpha}(i) = q(i)p^{-1}$, $\hat{\beta}(i) = p^{-1}(i)$, обозначим также через $u_k^{(l)}(x, n)$ момент k -го порядка времени поглощения для цепи Маркова с переходными вероятностями (1) и соответствующими $l = 1, 2, 3$ граничными условиями. При исследовании поведения $\eta_{x,n}^{(l)}$ полезен следующий результат.

Лемма 1. При $l = 1, 2, 3$ справедливы рекуррентные соотношения

$$u_k^{(l)}(x, n) = \sum_{m=x}^{n-1} \sum_{i=1}^m \beta(i) f_k^{(l)}(i) \prod_{j=i+1}^m \alpha(j) + v_k^{(l)}(0) \sum_{m=x}^{n-1} \prod_{i=1}^m \alpha(i),$$

(как обычно, сумма по пустому множеству дает 0, а произведение 1), $\alpha(i) = q(i)p^{-1}(i)$, $\beta(i) = p^{-1}(i)$, $f_k^{(l)}(i) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} C_k^m u_m^{(l)}(x, n)$, а $v_k^{(l)}(0)$ определяется в зависимости от граничных условий модели

$$v_k^{(1)}(0) = - \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \beta(j) f_k^{(1)}(j) \prod_{i=j+1}^m \alpha(i) \right) \left(\sum_{m=0}^{n-1} \prod_{i=1}^m \alpha(i) \right)^{-1},$$

$$v_k^{(2)}(0) = \beta(0) \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m u_m^{(2)}(0, n) - \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m v_m^{(2)}(0), \quad v_k^{(3)}(0) = \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m u_m^{(3)}(1, n).$$

Сформулируем наиболее простое утверждение.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E} \hat{\alpha}^2 < 1$, $\mathbf{E} \hat{\beta}^2 < \infty$, тогда $\eta_{x,n}^{(3)} \xrightarrow{P} 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Получены также результаты, справедливые с вероятностью 1.

Предположим теперь, что n фиксировано, а переходные вероятности в (1) не зависят от i . Малость случайных возмущений будет означать, что $p \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$.

Теорема 2. Если при $p \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ величина $\alpha = qp^{-1}$ остается фиксированной, то $\eta_{x,n}^{(1)} \xrightarrow{d} \tau_{x,n,\alpha}$, где случайная величина $\tau_{x,n,\alpha}$ обладает плотностью $f_{x,n,\alpha}^{(1)}(t)$, причём $f_{x,n,\alpha}^{(1)}(t) = f_{n-x,n,\alpha-1}^{(1)}(t)$ при $x = 1, \dots, n-1$ и $n \geq 3$. Далее, при любом α для $n = 2$ и $x = 1$ распределение $\tau_{x,n,\alpha}$ показательное с параметром 1, аналогичное утверждение верно для $n = 3$ и $x = 1, 2$ лишь при $\alpha = 1$. Если $\alpha \neq 1$, то

$$f_{1,3,\alpha}^{(1)}(t) = f_{2,3,\alpha-1}^{(1)}(t) = c_{1,3}^{-1} \left[\cosh(\sqrt{\alpha} c_{1,3}^{-1} t) + \alpha^{3/2} \sinh(\sqrt{\alpha} c_{1,3}^{-1} t) \right] \exp \left\{ -(1 + \alpha) c_{1,3}^{-1} t \right\},$$

где $c_{1,3} = (1 + \alpha + \alpha^2)(2 + \alpha)^{-1}$.

Таким образом, мы видим, что предельное поведение нормированного момента поглощения при уменьшении случайного возмущения существенным образом зависит оттого, каким образом это уменьшение осуществляется.

Следствие 1. Для любых α , $m \geq 1$, $n = 2^{m+1}$, $x = 2^m$, $t > 0$

$$f_{x,n,\alpha}^{(1)}(t) = (1 + \alpha^{2^m}) c_{2^m, 2^{m+1}}^{-1} \sum_{\sigma} \prod_{\sigma' \neq \sigma} (s_{\sigma'} - s_{\sigma}) \exp \left\{ -t(1 + \alpha + s_{\sigma}) c_{2^m, 2^{m+1}}^{-1} \right\}, \quad (2)$$

суммирование в (2) ведется по всем векторам $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ с компонентами σ_j , $j = 1, \dots, m$, принимающими два значения 0 и 1, $s_{\sigma} = (-1)^{\sigma_1} \alpha^{1/2} (2 + (-1)^{\sigma_2} (2 + \dots + (-1)^{\sigma_m} \sqrt{2})^{1/2})^{1/2}$,

$$c_{x,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \left[(n-x) \sum_{i=1}^{n-1} i \alpha^i + x \sum_{i=x+1}^{n-1} (n-i) \alpha^{i-1} \right]^{-1} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ 2[x(n-x)]^{-1} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

Интересно также отметить, что существует связь между предельным поведением систем 1, 2 и 3 при $\alpha = 1$.

Теорема 3. При $l = 2, 3$ предельное распределение $\eta_{x,n}^{(l)}$ обладает плотностью, зависящей не только от x и n , но и от α . При $\alpha = 1$ предельное распределение $\eta_{x,n}^{(l)}$ для $l = 2$ совпадает с предельным распределением $\eta_{n-x, 2n-1}^{(l)}$, а для $l = 3$ с предельным распределением $\eta_{n-x, 2n+1}^{(l)}$.

Рассматриваются также надежность системы и оптимизационные задачи.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, грант 96-01-01092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voss C. A. Just in time manufacture. International trends in manufactural technology. Berlin: Springer, 1987.
2. Булинская Е. В. О пересечении высокого уровня некоторым классом случайных процессов с дискретным временем. — Фундаментальная и прикладная математика, 1995, т. 1, № 1, с. 81–107.
3. Булинская Е. В. Предельные теоремы для моментов остановки случайных блужданий в полосе. — Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, № 4, с. 977–997.
4. Булинская Е. В. Оптимальный контроль и устойчивость некоторых систем. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 386–387.
5. Solomon F. Random walks in a random environment. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 1, p. 1–31.

Виноградов О. П. (Москва, Россия) **Об одном методе получения верхних и нижних оценок различных вероятностных характеристик.**

В ряде разделов теории вероятностей довольно часто интересующие нас характеристики рассматриваемых моделей являются решениями некоторых интегральных уравнений. Можно привести примеры из теории ветвящихся процессов, теории массового обслуживания, математической теории надежности, теории риска и др. Нам хочется обратить внимание на то, что, оказывается, легко сформулировать и доказать ряд утверждений из теории интегральных уравнений, которые дают возможность получить как уже известные, так и новые результаты. Использование интегральных уравнений позволяет также весьма просто получать верхние и нижние оценки для интересующих нас характеристик. Кроме этого, так как линейные интегральные уравнения изучены очень глубоко и имеется обширная литература по их численному решению (см., например, [1]), то можно использовать хорошо развитые методы для их приближенного решения.

Полное изложение предлагаемого подхода будет опубликовано в работе [2], а здесь мы покажем как получить один (видимо, ранее неизвестный) результат из теории ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста, который не содержится в [2].

Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^x K(x-u) \Phi(u) du + f(x),$$

где $\lambda > 0$ и $f(x)$ — непрерывная функция.

Лемма. Если для функции $\bar{\Phi}(x)$ при $0 \leq u \leq x$ выполнено неравенство

$$\bar{\Phi}(u) \geq \lambda \int_0^u K(u-v) \bar{\Phi}(v) dv + f(u),$$

то для $0 \leq u \leq x$ справедливо неравенство $\Phi(u) \leq \bar{\Phi}(u)$.

Доказательство этой леммы содержится в [2].

Из теории ветвящихся процессов известно [3], что $m(t)$, математическое ожидание числа частиц в момент t , удовлетворяет интегральному уравнению $m(t) = \alpha \int_0^t g(t-u) m(u) du + 1 - G(t)$, где $G(t)$ — функция распределения продолжительности жизни одной частицы, $g(t)$ — соответствующая ей плотность, α — математическое ожидание числа частиц, порожденных одной частицей в момент ее смерти.

Утверждение. Предположим, что $\alpha < 1$ и выполнено условие Крамера, т.е. существует постоянная $R > 0$, для которой выполнено равенство $1 = \alpha \int_0^\infty e^{Ru} g(u) du$. Тогда для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство $m(t) \leq \alpha^{-1} e^{-Rt}$.

Доказательство этого утверждения легко следует из леммы и полностью совпадает с доказательством неравенства Лундберга в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 9801-00855.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
2. Виноградов О. П. Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения. — Обзорение прикладной и промышленной математики (в печати).
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.

Грановский Б. (Хайфа, Израиль), **Зейфман А.** (Вологда, Россия) **Нестационарные марковские системы обслуживания.**

Рассматривается общая нестационарная марковская система обслуживания. Пусть $X(t)$ — длина очереди (число требований) в момент t — это процесс рождения и гибели (ПРГ) с интенсивностями $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ и пространством состояний $E = \{0, 1, \dots, N\}$, где $N \leq \infty$. Имеется значительное число работ по исследованию скорости сходимости при $t \rightarrow \infty$ для моделей такого типа в случае конкретных систем обслуживания, см., например, [1]–[8]. Предлагаемый подход базируется на использовании понятия логарифмической нормы матрицы интенсивностей и соответствующих оценках для матрицы вероятностей состояний марковского процесса (см. [7], [8]). При этом основной задачей становится нахождение нужных перенормировок; вопрос о существовании таких перенормировок и их построении для различных моделей изучен в работе [2].

При этом предполагается, что $\lambda_n(t) = \lambda_n \cdot a(t)$; $\mu_n(t) = \mu_n \cdot b(t)$, где $\lambda_n > 0$, $\mu_n > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ (наличие этих пределов существенно для случая счетного пространства состояний) а $a(t)$, $b(t)$ неотрицательны и локально интегрируемы на $[0; \infty)$.

Положим $\tilde{E} = \{0, 1, \dots, N-1\}$, если $N < \infty$, и $\tilde{E} = E$, если $N = \infty$.

Теорема. Пусть при некоторых $c > 0$ и $\Delta > 1$ для всех $k \in \tilde{E}$ справедливо неравенство

$$\frac{\Delta \lambda_{\mu_{k+1}} - \lambda_{k-1} \mu + \sqrt{(\Delta \lambda_{\mu_{k+1}} - \lambda_{k-1} \mu)^2 + 4 \Delta \lambda \mu \cdot (\lambda_{k-1} \mu_{k+1} - \lambda_k \mu_k)}}{2 \Delta \lambda \mu} \geq c$$

и, кроме того,

$$\int_0^\infty (\mu b(t) - \Delta \lambda a(t)) dt = +\infty.$$

Тогда ППГ слабо эргодичен, и найдется такая последовательность $\{\delta_k\}$, что $\delta_0 = 1$, $\liminf \delta_k > 1$ и при всех $s \geq 0$, $t \geq s$

$$\|p^1(t) - p^2(t)\| \leq \frac{4}{g} \cdot \exp\left\{-\int_s^t \alpha(u) du\right\} \cdot \sum_{i \geq 1} g_i |p_i^1(s) - p_i^2(s)|,$$

где $g = \inf d_k$, $g_i = \sum_{m=0}^{i-1} \prod_{k=0}^m \delta_k = \sum_{m=0}^{i-1} d_m$, $\alpha(t) = c \cdot (\mu b(t) - \Delta \lambda a(t))$, а $p^k(*) = (p_i^k(*))$, $k = 1, 2$ — векторы вероятностей состояний в соответствующий момент времени.

Если, кроме того, $a(t) \leq K \cdot \alpha(t)$ при некотором $K < \infty$ и почти всех $t \geq 0$, то при любом $t \geq 0$

$$\sum_{i \geq 1} g_i \cdot p_i(t) \leq \exp\left\{-\int_0^t \alpha(u) du\right\} \cdot \left\{\sum_{i=0}^{k-1} d_i - K \lambda_0\right\} + K \lambda_0.$$

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} P\{X(t) \leq j \mid X(0) = k\} &\geq 1 - \left(\sum_{m=0}^j d_m\right)^{-1} \\ &\times \left\{\exp\left\{-\int_0^t \alpha(u) du\right\} \left(\sum_{i=0}^{k-1} d_i - K \lambda_0\right) + K \lambda_0\right\}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} E(t; k) &\leq \frac{K \lambda_0}{W}, \quad \text{где } W = \inf_{i \geq 1} (g_i/i) > 0. \end{aligned}$$

Получены также другие коэффициентные условия и оценки слабой, сильной и нулевой эргодичности и устойчивости, оценки для среднего числа требований в системе, подробно изучается случай конечного пространства состояний. Общие результаты применяются к исследованию в различных ситуациях таких систем обслуживания, как $M_t/M_t/1$, $M_t/M_t/S$, $M_t/M_t/S/0$, а также многоканальной системы с клиентами, боящимися очереди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Giorno V., Nobile A.* On some time-nonhomogeneous diffusion approximations to queueing systems. — Adv. Appl. Probab., 1987, v. 19, p. 974–994.
2. *Granovsky B. L., Zeifman A. I.* The decay function of nonhomogeneous birth-death processes, with application to mean filed models. — Stoch. Proc. Appl., v. 72, p. 105–120.
3. *Green L., Kolesar P., Svornos A.* Some effects of nonstationarity on multiserver markovian queueing systems. — Oper. Res., 1991, v. 39, p. 502–511.
4. *Keller J. B.* Time-dependent queues. — SIAM Rev., 1982, v. 24, p. 401–412.
5. *Massey W. A.* Asymptotic analysis of the time dependent $M/M/1$ queue. — Math. Oper. Res., 1985, v. 10, p. 305–327.
6. *Reynolds J. E.* The stationary solution of a multiserver queueing model with discouragement. — Oper. Res., 1968, v. 16, p. 64–71.
7. *Zeifman A. I.* Properties of a system with losses in the case of variable rates. — Automation and Remote Control, 1989, v. 50, p. 82–87.
8. *Zeifman A. I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. — Stoch. Proc. Appl., 1995, v. 59, p. 157–173.

Джунгурова О. А. (Казань, Россия) Асимптотически по параметру оптимальные критерии выделения нормального типа из семейства распределений долговечности.

В теории надежности существует ряд вероятностных моделей, которые содержат нормальный закон как предельный случай, соответствующий выходу модели на границу параметрического пространства.

В качестве примера таких моделей можно привести двухпараметрическое семейство гамма распределений с функцией плотности

$$\frac{1}{\theta} f_1\left(\frac{x}{\theta}; \lambda\right) = \frac{1}{\theta \lambda \Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x/\theta}, \quad x > 0, \theta > 0, \lambda > 0$$

и распределение Бирнбаума–Сондерса [1] с функцией плотности

$$\frac{1}{\theta} f_2\left(\frac{x}{\theta}; \lambda\right) = \frac{1}{2\theta\sqrt{2\pi}} \left[\lambda \left(\frac{\theta}{x}\right)^{3/2} + \left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\lambda \sqrt{\frac{\theta}{x}} - \sqrt{\frac{x}{\theta}} \right)^2 \right\},$$

$x > 0, \theta > 0, \lambda > 0$. Если параметр формы λ этих распределений достаточно велик, то оба распределения аппроксимируются ($\lambda \rightarrow \infty$) нормальным законом со средним $\lambda\theta$ и дисперсией $\lambda\theta^2$. В связи с этим возникает естественная проблема проверки нормальности выборочных данных, когда альтернативой служат указанные выше распределения. Различать распределения с разными носителями крайне неудобно, более естественно проверять гипотезу вида $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 выбирается по гарантированной точности ϵ в вычислениях распределения долговечности, т.е. из уравнения $\Delta(\lambda_0) = \sup_{x>0} |F(x, \lambda) - \Phi(x - \lambda/\sqrt{\lambda})| = \epsilon$.

Мы предлагаем новый подход к построению критериев такого рода, суть которого заключается в том, что асимптотический анализ проводится не при больших значениях объема выборки n , как обычно, а при больших значениях параметра формы λ . Это позволило нам строить критерии проверки гипотезы $H_0: \lambda > \lambda_0$ при альтернативе $H_1: \lambda < \lambda_1 (< \lambda_0)$, которые являются асимптотически ($\lambda_0, \lambda_1 \rightarrow \infty$) оптимальными. В рамках того же подхода нами получены асимптотические формулы объемов выборки, необходимых для различения гипотез H_0 и H_1 с заданными ограничениями α и β на вероятности ошибок первого и второго рода.

По существу, строится аналог лекамовской теории близких гипотез с заменой n (объем выборки) на параметр λ . «Близость» гипотез понимается в смысле одинакового порядка роста λ_0 и λ_1 : для обоих распределений рассматривается альтернатива вида $\lambda_1 = u\lambda_0$, где $0 < u < 1$. Интересно отметить, что асимптотики необходимого объема выборки (НОВ) имеют точность в одно наблюдение: $|\tilde{n} - n| \leq 1$ для всех достаточно больших λ_0 и λ_1 .

Что касается гамма распределения, то для проверки гипотезы $\lambda > \lambda_0$ существует не асимптотический, а точный критерий, причем анализ его функции мощности и НОВ при $\lambda_0 \rightarrow \infty$ производится достаточно просто, поскольку характеристическая функция тестовой статистики записывается в явном виде. В этом случае инвариантный равномерно наиболее мощный критерий (он же минимаксный, т.е. соответствующий НОВ) основан на статистике $T_1 = n \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) - \sum_{k=1}^n \ln x_k$. Подробное исследование распределения этой статистики при $n \rightarrow \infty$ проведено в работе [2]: построено полное разложение Эджворта и асимптотическое разложение для НОВ при сближающихся альтернативах. Если $\lambda_0 \rightarrow \infty$, то распределение нормированной статистики $\tilde{T}_1 = 2\lambda_0 T_1$ сходится к хи-квадрат распределению с $n-1$ степенями свободы. Если же истинное значение параметра $\lambda = \lambda_1 = u\lambda_0$, асимптотическая функция мощности критерия $T_1 > c_1(\alpha) = t(n, 1-\alpha)/(2\lambda_0)$, где $t(n, \alpha)$ есть α -квантиль распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, имеет вид $P_{\lambda_1}\{T_1 > c_1(\alpha)\} = 1 - K_{n-1}(t(n, 1-\alpha)u)$.

Для распределения Бирнбаума–Сондерса асимптотический равномерно наиболее мощный критерий уровня α для проверки гипотезы $\lambda > \lambda_0$ имеет критическую область $T_2 = \sum_{k=1}^n X_k \sum_{k=1}^n X_k^{-1} > c_2(\alpha) = n^2 + n t(n, 1-\alpha)/\lambda_0$. Распределение нормированной статистики $\tilde{T}_2 = (\lambda_0/n)T_2 - n/\lambda_0$ также имеет хи-квадрат распределение с $n-1$ степенями свободы, а функция мощности имеет тот же вид, что и в предыдущем случае $P_{\lambda_1}\{T_2 > c_2(\alpha)\} = 1 - K_{n-1}(t(n, 1-\alpha)u)$.

Используя приведенные выше формулы и привлекая соображения, сходные с лекамовскими (с заменой n на λ_0) получаем для рассмотренных семейств распределений следующую теорему

Теорема. Пусть $n^* = n^*(\alpha, \beta; \lambda_0, \lambda_1)$ — объем выборки, для которого существует критерий различения гипотез $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_1 = u\lambda_0$ с ограничениями на вероятности ошибок первого и второго рода α и β соответственно. Тогда $|n^* - \tilde{n}| \leq 1$, для всех достаточно больших λ_0 и λ_1 , где $\tilde{n} = \tilde{n}(\alpha, \beta; u)$ есть

наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству $t(\tilde{n}, \beta)/t(\tilde{n}, 1 - \alpha) \geq u$, $t(n, \alpha)$ — α -квантиль хи-квадрат распределения с $n - 1$ степенями свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birnbaum Z. W., Saunders S. C. A new family of lifelength distribution. — J. Appl. Prob., 1962, v. 6, p. 319–327.
2. Володин И. Н. О числе наблюдений, необходимых для различения двух близких гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, с. 575–581.

Еникеева Ф., Калашников В. В. (Москва, Россия), **Русайтите Д.** (Копенгаген, Дания) **Оценки непрерывности вероятности разорения для марковско-модулированного процесса риска.**

Пусть $J^0(t)$ — однородный марковский процесс с конечным множеством сообщающихся состояний E и непрерывными справа траекториями, α_i ($i \in E$) — интенсивность, с которой $J^0(t)$ покидает состояние i , а J_n^0 — его последовательные значения в моменты скачков. Обозначим через π_i^0 и p_{ij}^0 ($i, j \in E$) стационарные и переходные вероятности цепи Маркова J_n^0 . Рассмотрим процесс риска $R(t)$, определяемый параметром $\gamma = ((\alpha_i)_{i \in E}, (p_{ij}^0)_{i, j \in E}, (\lambda_i)_{i \in E}, (c_i)_{i \in E}, (B_i(u))_{i \in E})$, смысл трех последних компонент которого следующий. Моменты выплат образуют процесс Кокса (см. [1]) с интенсивностью $\lambda_{J^0(t)}$, интенсивность поступления премий в момент t равна $c_{J^0(t)} \geq 0$, а размер выплат случаен и имеет распределение $B_i(u)$, если в момент выплаты $J^0(t) = i$.

Пусть $\mathcal{T}$ — упорядоченные моменты выплат и скачков процесса $J^0(t)$, а J_n — значения процесса $J^0(t)$ при $t \in \mathcal{T}$. Очевидно, $\{J_n\}$ — неприводимая аperiodическая цепь Маркова с вероятностями перехода $p_{ij} = \alpha_i p_{ij}^0 / (\alpha_i + \lambda_i)$, $j \neq i$; $p_{ii} = \lambda_i / (\alpha_i + \lambda_i)$ и стационарными вероятностями $\pi_i = \beta \pi_i^0 (1 + \lambda_i / \alpha_i)$, $\beta = (\sum_{i \in E} (1 + \lambda_i / \alpha_i))^{-1}$. Аналогично, пусть R_n — последовательные значения процесса риска $R(t)$ в моменты времени, принадлежащие множеству $\mathcal{T}$. Определим функции

$$\Psi_i(x) = \mathbf{P} \left\{ \inf_{n \geq 0} R_n < 0 \mid R_0 = x, J_n = i \right\}$$

и

$$\Psi(x) = \sum_{i \in E} \pi_i \Psi_i(x). \quad (1)$$

Функцию (1) будем называть вероятностью разорения.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i \in E} \frac{\pi_i (\alpha_i + \lambda_i b_i(\varepsilon))}{\alpha_i + \lambda_i + c_i \varepsilon} < 1, \quad (2)$$

где $b_i(\varepsilon) = \int_0^\infty \exp(\varepsilon z) dB_i(z)$. Очевидно, левая часть неравенства (2) равна стационарному среднему случайной величины $\exp(\varepsilon(J_{n+1} - J_n))$ и тесно связана с условием Крамера (см. [1] и [2]).

Рассмотрим наряду с процессом $R(t)$ аналогичный процесс $R'(t)$, параметры которого будем отмечать штрихом. Пусть величина

$$\delta = \sup_{i \in E} \max \left(|\alpha_i c_i - \alpha'_i c'_i|, \sum_{j \in E} |p_{ij}^0 - p_{ij}'^0|, |\lambda_i - \lambda'_i|, \int_0^\infty e^{\varepsilon z} d|B_i - B'_i|(z) \right)$$

измеряет расстояние между процессами риска $R(t)$ и $R'(t)$.

Теорема. Если выполнено условие (2), то

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x} d|\Psi - \Psi'| (x) \leq C \delta, \quad (3)$$

при $\delta \leq \delta_0$, где постоянные C и δ_0 выписываются в явном виде.

Полученное неравенство (3) является следствием предложенного общего подхода к получению количественных оценок непрерывности вероятностей разорения в процессах риска относительно вариаций параметров, определяющих динамику этих процессов. Подход состоит в реализации следующих этапов, каждый из которых достаточно хорошо известен, но их совместное применение позволяет получать новые результаты: (1) представление вероятности разорения в виде стационарной вероятности для обращенного процесса риска (см. [3]); (2) вложение обращенного процесса риска в марковскую цепь; (3) использование техники Карташова (см. [4]) для получения оценок непрерывности стационарного распределения построенной цепи и, следовательно, оценок непрерывности вероятности разорения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. New York: Springer-Verlag, 1991.
2. *Kalashnikov V.* Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1997.
3. *Asmussen S.* Stationary distributions via first passage times. — In: Advances in Queueing. Boca Raton: CRC Press, 1995.
4. *Карташов Н. В.* Неравенства в теоремах эргодичности и устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, в. 2, с. 230–240; в. 3, с. 478–485.

Zolotarev V.M. (Moscow, Russia) **Five analytical problems of probability theory.**

The more than two centuries evolution of probability theory by no means exhausted all possible problems of the theory of limit theorems. On the contrary, many new questions appeared, so at present some important problems remain without a solution. Here we list some of them. These problems may indicate some new interesting and important directions of the development of probability theory and its applications.

Problem 1. In the theory of summation of independent random variables (r.v.'s) the central role is played by the class $\mathcal{G}$ of infinitely divisible distributions which is explicitly described by the well-known Lévy–Khinchin representation of characteristic functions (ch.f.'s). By analogy with the theory of summation, the theory of limit theorems for products of real-valued r.v.'s was created, in which the class of limit distributions $\mathcal{M}$ consists of the so-called M -infinitely divisible distributions which are described by their characteristic transforms (ch.t.'s). Namely, for a r.v. X the ch.t. $w_X(t)$ is defined as $w_X(t) = (w_0(t), w_1(t))$, where $w_k(t) = \mathbf{E}|X|^{tk}(\text{sign} X)^k$, $k = 0, 1$. The distribution of a r.v. X belongs to $\mathcal{M}$, if the corresponding ch.t. has the form [1] $w_k(t) = \alpha_k f_k(t)[f_2(t)]^{1-2k}$, $k = 0, 1$, where $f_k(t)$ are infinitely divisible ch.f.'s such that f_2 has the canonical representation $f_2(t) = \int (e^{itx} - 1) dH(x)$ with $0 < \beta \equiv \int dH(x) < \infty$ and $0 < \alpha_0 \leq 1$ and $|\alpha_1| \leq \alpha_0 e^{-2\beta}$. The problem consists in the convenient description of the intersection $\mathcal{S} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}$ which can be very useful and natural in the schemes which imply both summation and multiplication, for example, in limit theorems for random determinants and random permanents [2], [3]. The fact that the class $\mathcal{S}$ is nonempty was discovered by O. Thorin [14] who proved that the log-normal distribution is infinitely divisible (i.e., belongs to $\mathcal{G}$). This distribution obviously belongs to $\mathcal{M}$ as well. Later it was shown [15] that many stable distributions belong to $\mathcal{M}$. It is not convenient to describe distributions from $\mathcal{S}$ by ch.f.'s or by the ch.t.'s. We need to look for a new transform of distributions from $\mathcal{S}$. This transform may have a traditional integral form $k(X) = k(F_X) = \int K(x) dF_X(x)$ with the kernel $K(x)$ depending on two positive parameters r and s so that $k(X)$ possesses the properties of multiplicativity and additivity: if X and Y are independent r.v.'s, then $k(X + Y; s, r) = k(X; s, r)k(Y; s, r)$, $k(X \cdot Y; s, r) = k(X; s, r)k(Y; s, r)$. It can be shown that such kernels exist. So the solution should consist in finding a special form of this new transform $k(X; s, r)$ with analytically most convenient kernel.

Problem 2. This problem has already been touched upon in [4]. As was already mentioned, the theory of limit theorems for sums of independent r.v.'s which is one of

the main achievements of probability theory is closely connected with the notion of infinitely divisible distributions. At present, the focus of attention of the specialists is being transferred to nonlinear systems. One of the objects of investigation is the class of random symmetric polynomials which are natural generalizations of sums of r.v.'s. Consider, for example, symmetric polynomials of n variables of the second degree. Each of these polynomials Q can be written as

$$Q = p(x_1 + \dots + x_n)^2 + q(x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad (1)$$

where p and q are real numbers. What can be an analog of infinitely divisible laws for random symmetric polynomials of the second degree? We will call these analogs quadratically infinitely divisible laws. For a polynomial Q of form (1) we can define a Q -infinitely divisible law in the following way. We say that a r.v. Y has a Q -infinitely divisible distribution if for each $n \geq 2$ there exist independent identically distributed r.v.'s $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ such that the distribution of Y coincides with that of $p(Y_{n1} + \dots + Y_{nn})^2 + q(Y_{n1}^2 + \dots + Y_{nn}^2)$. If one of the coefficients p or q equals zero, then such r.v.'s obviously exist and their description is rather simple. But if both coefficients are nonzero, still no examples are known proving that the class of Q -infinitely divisible laws is nonempty. The above definition of a Q -infinitely divisible distribution has the following equivalent analytical form. Let $f_n(t)$ denote the common characteristic function of the r.v.'s $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ and let $\varphi(u) = \exp\{-u^2/2\}/\sqrt{2\pi}$. Then Y is Q -infinitely divisible, if for each $s > 0$ and any integer $n \geq 2$

$$\mathbf{E} \exp\{-sY\} = \int \varphi(u) \left[\int \varphi(v) f_n(\sqrt{s}(u+v)) dv \right]^n du.$$

So the problem is: (i) to find a Q -infinitely divisible distribution (at least for some p and q ; a particular case of this problem for $p = q = \frac{1}{2}$ was analytically formulated in [1]), (ii) if such a distribution exists, then to describe the class of all Q -infinitely divisible distributions, (iii) if there are no Q -infinitely divisible distributions, then to find a reasonable analog of an infinitely divisible distribution for random symmetric polynomials.

Problem 3. Assume that we are to find a simple approximation to the distribution function (d.f.) of the sum $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}$ of independent symmetric r.v.'s which take the values ± 1 and $\pm n\sqrt{5}$ with probabilities $\frac{1}{2}(1 - 1/n)$ and $1/(2n)$, respectively. Since the distributions are discrete but not lattice, the classical theory can suggest only integral-type limit theorems. Let F_n denote the d.f. of the sum S_n . The summands X_{nj} obviously do not satisfy the condition of uniform asymptotic negligibility, so before choosing a suitable integral theorem we should normalize the r.v.'s S_n . Let us do this by setting $Y_{nj} = X_{nj}/(n\sqrt{5})$ and $Z_n = S_n/(n\sqrt{5})$. We have $\mathbf{E}Z_n = 0$ and $\mathbf{D}Z_n = 1 + (n-1)/(5n^2)$. Denote the d.f. and the ch.f. of the normalized sum Z_n by $G_n(x)$ and $g_n(t)$, respectively. Simple calculations show that $g_n(t) \rightarrow g_*(t) = \exp\{\cos t - 1\}$ as $n \rightarrow \infty$. This means that $L(Z_n, Z_*) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ where $Z_* = \Pi - \Pi'$ and Π and Π' are independent r.v.'s each having the Poisson distribution with parameter $\frac{1}{2}$, and $L(X, Y) = L(F_X, F_Y)$ is the Lévy distance between the d.f.'s of r.v.'s X and Y . Instead of L , we can use any other metric which is topologically equivalent to it such as the Lévy-Prokhorov metric $\pi(X, Y)$ or the metric

$$\lambda(X, Y) = \min_{T>0} \max \left\{ \frac{1}{2} \max_{|t| \leq T} |f_X(t) - f_Y(t)|, \frac{1}{T} \right\},$$

where $f_X(t)$ denotes the ch.f. of a r.v. X .

Thus, the d.f. G_* of the r.v. Z_* gives an asymptotic approximation to the d.f. G_n in the sense of the distances L , π , λ or other equivalent metrics. However, actually G_* does not tell us what should be taken as an asymptotic approximation to the d.f. F_n . Although it might seem that we could carry out the inverse transformation and write $F_n(x) = G_n(x/(n\sqrt{5}))$, this function will not be asymptotically approximated by $G_*(x/(n\sqrt{5}))$ in the L -metric. Indeed, let $n = 2m + 1$. The sum S_n takes the values $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \pm[n(\sqrt{5}-1)+1], \pm[n(\sqrt{5}-1)+3], \dots$. In addition, the approximating r.v. $n\sqrt{5}Z_*$ takes the values $0, \pm n\sqrt{5}, \pm 2n\sqrt{5}, \dots$. Since $\mathbf{P}\{n\sqrt{5}Z_* = 0\} = \mathbf{P}\{Z_* = 0\} = c > 0$, from the definition of the Lévy metric it follows that $L(S_n, n\sqrt{5}Z_*) \geq c/2 > 0$ for all odd n . This means that $G_*(x/(n\sqrt{5}))$ cannot serve as L -approximation to $F_n(x)$.

This would be possible if, instead of L , we considered a metric μ which possesses the property of invariance with respect to linear transformations (linearly invariant metric), that is, $\mu(bX + a, bY + a) = \mu(X, Y)$, since in this case we would have both $\mu(Z_n, Z_*) \rightarrow 0$ and $\mu(n\sqrt{5}Z_n, n\sqrt{5}Z_*) = \mu(S_n, n\sqrt{5}Z_*) \rightarrow 0$ and hence, $F_n(x)$ could be μ -approximated by $G_n(x) = G_*(x/(n\sqrt{5}))$ as $n \rightarrow \infty$.

Linearly invariant metrics do exist. As examples of such metrics we can mention the uniform metric $\rho(X, Y) = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)|$, the characteristic uniform metric $\chi_0(X, Y) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|$, the total variation metric $\sigma(X, Y) = \sup\{|\mathbf{P}\{X \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A\}| : A \in \mathcal{B}\}$, where $\mathcal{B}$ is the system of Borel sets from $\mathbf{R}^1$ and some other metrics (see [1], Chapter 1). We should note that any linear invariant metrics mentioned above are topologically stronger than the Lévy metric.

So there appears the problem of constructing an analog of the classical L -theory of limit theorems for sums of independent random variables in terms of topologically stronger linearly invariant metrics, that is, ρ -theory, χ_0 -theory, or σ -theory of limit theorems. As examples of first results of this kind we mention the following criteria of the convergence of d.f.'s H_n of sums $W_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$ of independent identically distributed r.v.'s with $\mathbf{E}X_1 = 0$ and $\mathbf{D}X_1 = 1$ to the standard normal d.f. Φ .

In [5] it was proved that $\sigma(H_n, \Phi) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ if and only if $L(H_n, \Phi) \rightarrow 0$ and for n large enough the d.f.'s H_n have absolutely continuous components.

In [6] it was proved that $\chi_0(H_n, \Phi) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ if and only if $L(H_n, \Phi) \rightarrow 0$ and the Cramér condition $\limsup_{t \rightarrow \infty} |f_{X_1}(t)| < 1$ holds.

Moreover, in these results the condition of independence of summands can be considerably weakened.

Problem 4. At present, many examples are known of applications of stable laws in physics, astronomy, biology, finance, engineering, and other fields (see [7], [8]). Unfortunately, explicit representations of the densities of stable laws in terms of elementary functions are known only for four cases. This fact presents serious difficulties in statistical inference concerning stable laws. So the problem of finding other convenient representations of stable densities, including new cases where stable densities may be represented via elementary functions, is very important.

After Gauss, Bessel, and Whittaker many mathematicians investigated the properties of generalized hypergeometric series (asymptotics, relations with other special functions, etc.). Among others, we should mention Wright, MacRobert, Fox, and Meijer. Some of them (Schneider [9], Zolotarev [10], and Hoffman-Jørgensen [11]) noticed the connection of these functions with the densities of stable laws. In particular, in [6] it was shown that all the stable densities with the characteristic exponent $\alpha \neq 1$ can be represented in terms of the so-called Fox functions which are some generalizations of the well-known and widely used Meijer's G -functions. However, this result may be regarded as a mere redenotation of stable densities since the Fox functions are somewhat cumbersome. In [7] it was shown that stable densities with rational parameters can be represented via G -functions themselves. It is well-known (see, e.g., [12], vol. 1, p. 210) that G -functions $u = G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{smallmatrix} a_1, & a_p \\ b_1, & b_q \end{smallmatrix} \right. \right)$ satisfy the ordinary differential equation

$$\left[(-1)^{p-m-n} x \prod_{i=1}^p (\delta - a_i + 1) - \prod_{j=1}^q (\delta - b_j) \right] u = 0, \quad \delta = \frac{d}{dx}.$$

Almost all special functions such as Bessel, Whittaker, MacRobert, Gauss, and other functions are particular cases of G -functions.

In many cases the solutions of ordinary differential equations are represented via elementary functions. Therefore, if those equations have the above form we may have a chance to find a new representation of a stable density via elementary functions.

If simpler representations were known for the densities of one-dimensional stable laws, then using the results of [16] it would be possible to easily obtain simple representations for the densities of multivariate spherically symmetric stable distributions.

Problem 5. The last problem considered here concerns a special part of the classical theory of limit theorems dealing with the relaxation of the assumption of independence of summands in the cumulative sums. Consider a sequence $\mathbf{X} = \{\dots X_{-1}, X_0, X_1, \dots\}$

of r.v.'s defined on a probability space $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathbf{P})$. Let $\mathfrak{M}_a^b$ be the σ -algebra generated by the part $\{X_a, X_{a+1}, \dots, X_b\}$ of the initial sequence $\mathbf{X}$. Let $\tau > 0$ be an arbitrary number. Let $\mathbf{P}_{-\infty}^0$ and $\mathbf{P}_{\tau}^{\infty}$ be the restrictions of $\mathbf{P}$ on $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ and $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$, respectively. On the measurable space $(\Omega \times \Omega, \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty})$ define the probability measures $\mathbf{P}^*$ and $\mathbf{P}_{\tau}$ as $\mathbf{P}^*(A \times B) = \mathbf{P}(AB)$ and $\mathbf{P}_{\tau}(A \times B) = \mathbf{P}_{-\infty}^0(A) \cdot \mathbf{P}_{\tau}^{\infty}(B)$, $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0$, $B \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$. In these terms the strong mixing coefficient introduced in the middle of the thirties by M. Rosenblatt can be written as $\alpha_{\sigma}(\tau) = \sup_{A \times B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}} |\mathbf{P}^*(A \times B) - \mathbf{P}_{\tau}(A \times B)|$. This coefficient can be regarded as a measure of dependence analogous to the distance of total variation $\sigma(\cdot, \cdot)$. The *strong mixing condition* consists in

$$(SM) \quad \alpha_{\sigma}(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow \infty.$$

In the monograph [13] we can find some limit theorems based on the (SM) condition.

Following the idea of S. N. Bernshtein, we can introduce the weak measure of dependence by using the following analog of the Lévy-Prokhorov distance $\pi(\cdot, \cdot)$ and propose a weaker type of a mixing condition to be used in limit theorems instead of the (SM) condition.

For a positive ε , the ε -neighborhood of a set $C \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ will be denoted C^{ε} . For any two probability measures $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$ defined on the measurable space $(\Omega \times \Omega, \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty})$ set $r(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \inf\{\varepsilon > 0: \mathbf{P}_1(A \times B) \leq \mathbf{P}_2((A \times B)^{\varepsilon}) + \varepsilon \text{ for all closed } A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0, B \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}\}$. Define the weak mixing coefficient as $\alpha_{\pi}(\tau) = \max\{r(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}_{\tau}), r(\mathbf{P}_{\tau}, \mathbf{P}^*)\}$. The *weak mixing condition* then consists in

$$(WM) \quad \alpha_{\pi}(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow \infty.$$

Using this characteristic of a sequence $\mathbf{X}$ we can prove the following

Lemma. *Let a stationary sequence $\mathbf{X}$ with $\mathbf{E}X_j = 0$ and $\mathbf{D}X_j = 1$ satisfy the (WM) condition. Assume that a r.v. ξ is $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ -measurable and a r.v. η is $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ -measurable, $\tau > 0$, and moreover, $|\xi| \leq C_1$, $|\eta| \leq C_2$. Then*

$$|\mathbf{E}(\xi\eta) - (\mathbf{E}\xi)(\mathbf{E}\eta)| \leq 2C_1C_2\alpha_{\pi}(\tau).$$

This inequality makes it possible to prove the following theorem which is a «weak mixing» analog of Theorem 18.5.1 of [13].

Theorem. *Let a stationary sequence $\mathbf{X}$ satisfy the (WM) condition and $\mathbf{E}(X_1 + \dots + X_n)^2 \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Then the sequence $\mathbf{X}$ satisfies the central limit theorem.*

The problem is to prove other limit theorems which are valid for the sequences with (SM) condition replacing the latter by the (WM) condition.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 96-01-01920.

REFERENCES

1. *Zolotarev V. M.* Modern Theory of Summation of Random Variables. Utrecht: VSP, 1997.
2. *Корольюк В. С., Боровский Ю. В.* Случайные перманенты. Институт математики АН Украины, Киев, 1993.
3. *Гурко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев: Вища школа, 1980.
4. *Золотарев В. М.* О двух аналитических задачах теории вероятностей. — В сб. «Теория вероятностей и математическая статистика». Труды Тбилисского математического института им. А. М. Размадзе, 1989, т. 92, с. 10–12.
5. *Прохоров Ю. В.* Локальные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых. — Успехи матем. наук, 1952, т. 7, № 3 (49), с. 112–125.
6. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
7. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
8. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability: Stable Laws and Their Applications. VSP, Utrecht-Tokyo, 1999.
9. *Schneider W. R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization. — In: Proceedings of the First Ascona-Como International Conference «Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems (1985)», Lect. Notes in Physics, v. 262. Springer, Berlin, 1986.

10. Золотарев В. М. О представлении плотностей устойчивых законов специальными функциями. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, № 2, с. 429–437.
11. Хоффман-Иёнсен И. Устойчивые плотности. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, № 2, с. 470–476.
12. Higher Transcendental Functions. (H. Bateman and A. Erdélyi – Eds.) McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
13. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
14. Thorin O. On the infinite divisibility of the lognormal law. — Scand. Actuar. Journal, 1977, № 1, p. 3.
15. Золотарев В. М. Об M -разложимости устойчивых законов. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 3, с. 559–562.
16. Zolotarev V. M. Integral transformations of distributions and estimates of parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws. — In: Contribution to Probability Theory. Dedicated to E. Lukacs (J. Gani and V. K. Rohatgi, Eds.). Academic Press, New York, 1981, p. 283–305.

Золотарев В. М. (Москва, Россия), **Учайкин В. В.** (Ульяновск, Россия)
Многомерные устойчивые распределения как решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

Характеристические функции сферически симметричных устойчивых N -мерных плотностей $g_N^{(\alpha)}(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^N$, $t > 0$, $\alpha \in (0, 2]$, имеют вид $\varphi_N^{(\alpha)}(k, t) = e^{-t|k|^\alpha}$, $k \in \mathbf{R}^N$ и, следовательно, удовлетворяют уравнениям $\partial \varphi_N^{(\alpha)} / \partial t = -|k|^\alpha \varphi_N^{(\alpha)}(k, t)$ с начальным условием $\varphi_N^{(\alpha)}(k, 0) = 1$. Согласно определению дробной производной Рисса [1] правая часть этого уравнения может быть представлена в виде $-|k|^\alpha \varphi_N^{(\alpha)} = -\hat{F}(-\Delta_N)^{\alpha/2} \varphi_N^{(\alpha)}$, где $\hat{F}$ — оператор преобразования Фурье, а $\Delta_N = \sum_{m=1}^N \partial^2 / \partial x_m^2$ — N -мерный лапласиан. Следовательно, $g_N^{(\alpha)}(x, t)$ удовлетворяет уравнению $\partial g_N^{(\alpha)} / \partial t = -(-\Delta_N)^{\alpha/2} g_N^{(\alpha)}(x, t)$, $g_N^{(\alpha)}(x, 0) = \delta(x)$, описывающему процесс супердиффузии (процесс Леви). При $\alpha \rightarrow 2$ оно переходит в обычное диффузионное уравнение.

Согласно [2], решение уравнения супердиффузии может быть представлено в виде сходящихся рядов

$$g_N^{(\alpha)}(x, t) = \frac{\alpha}{2} |\sqrt{\pi} x t^{-1/\alpha}|^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma((N + \alpha + \alpha n)/2)}{\Gamma(1 - \alpha/2 - \alpha n/2)} \frac{(-1)^n}{n!} \left| \frac{2t^{1/\alpha}}{x} \right|^{\alpha + \alpha n}$$

и

$$g_N^{(\alpha)}(x, t) = \frac{2}{\alpha} (2t^{1/\alpha} \sqrt{\pi})^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma((N + 2n)/\alpha)}{\Gamma(N/2 + n)} \frac{(-1)^n}{n!} \left| \frac{x}{2t^{1/\alpha}} \right|^{2n}$$

для $\alpha < 1$ и $1 \leq \alpha \leq 2$ соответственно, которые в свою очередь могут быть записаны как H -функции, называемые также функциями Фокса (обобщенные функции Меллина–Барнеса) [3]

$$g_N^{(\alpha)}(x, t) = \frac{1}{2} (|x| \sqrt{\pi})^{-N} H_{21}^{11} \left(\left| \frac{2t^{1/\alpha}}{x} \right| \left| \begin{matrix} (1 - N/2, \frac{1}{2}) \\ (1, 1/\alpha) \end{matrix} \right. \right)$$

и

$$g_N^{(\alpha)}(x, t) = \frac{2}{\alpha} (2t^{1/\alpha} \sqrt{\pi})^{-N} H_{12}^{11} \left(\left| \frac{x}{2t^{1/\alpha}} \right|^2 \left| \begin{matrix} (1 - N/\alpha, 2/\alpha) \\ (0, 1)(1 - N/2, 1) \end{matrix} \right. \right)$$

соответственно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 98-01-03307 и 96-01-01920).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2. Zolotarev V. M. Integral transformations of distributions and estimates of parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws. — In: Contributions to probability, Ed. by I. Gani, V. K. Rohatgi, London: Acad. Press, 1981, p. 283–305.
3. Mathai A. M., Saxena R. K. The H -Function with Applications in Statistics and Other Disciplines. New Delhi: Wiley East. Ltd, 1978.

Калинкин А. В. (Москва, Россия) **Свойство ветвления для процесса гибели пуассоновского типа.**

Рассматривается однородный марковский процесс ξ_t , $t \in [0, \infty)$, с состояниями $\{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности которого

$$P_{ij}(t) = P\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

представимы при $t \rightarrow 0$ в виде $P_{i, i-1}(t) = \mu_i t + o(t)$, $P_{ii}(t) = 1 - \mu_i t + o(t)$, где $\mu_0 = 0$, $\mu_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots$. Для определенного процесса чистой гибели известны явные, но громоздкие выражения для переходных вероятностей.

Введем производящие функции переходных вероятностей, $|s| \leq 1$,

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i = 0, 1, \dots$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для процесса ξ_t может быть записана в виде $\partial F_i / \partial t = (1-s) D_s(F_i)$, $F_i(0, s) = s^i$, где D_s — оператор Гельфонда–Леонтьева обобщенной производной, определенный на аналитических в окрестности нуля функциях $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$: $D_s(f) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j s^{j-1}$.

В случае процесса гибели *линейного типа*, когда $\mu_i = i\mu$, $\mu > 0$ ($D_s = \mu(d/ds)$), переходные вероятности $P_{ij}(t)$ обладают свойством ветвления, — справедливо соотношение для производящих функций $F_i(t; s) = (F_1(t; s))^i$, $i = 0, 1, \dots$; $F_1(t; s) = 1 - e^{-\mu t} + s e^{-\mu t}$, ([1, гл. 1, § 8, пример 2]).

В случае процесса гибели *пуассоновского типа*, когда $\mu_0 = 0$, $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2, \dots$ ($D_s(f) = (\mu/s)(f(s) - f(0))$) переходные вероятности равны

$$P_{00}(t) = 1; \quad P_{i0}(t) = 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu t}{1!} e^{-\mu t} - \dots - \frac{(\mu t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\mu t}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$P_{ij}(t) = \frac{(\mu t)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\mu t}, \quad 1 \leq j \leq i; \quad P_{ij}(t) = 0, \quad j > i. \quad (1)$$

Теорема. Для процесса чистой гибели пуассоновского типа имеет место свойство ветвления в виде,

$$F_i(t; s) = 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi\omega} \oint_{0+} \left[\int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{u} + \eta \frac{1-x}{1+\eta} + s \frac{1-x}{1+\eta} \right) \right]' d\eta \right]'_x \frac{e^{\mu t(ux-1)}}{u} du \right) dx, \quad (2)$$

где $\omega = 0, 1, \dots$ ($\omega^2 = -1$).

Доказательство теоремы состоит в вычислении трехкратного интеграла, что приводит к выражениям (1). В вычислениях используется бета-функция.

В [4] приведено обобщенное свойство ветвления для процесса гибели *квадратичного типа*, когда $\mu_i = i(i-1)\mu$ ($D_s = \mu s(d^2/ds^2)$), см. [2], [3]); полученное в [4] интегральное представление для переходных вероятностей аналогично (2). Повторим предположение, обоснование которому (теорема Финетти–Хинчина) дано в [4]: для произвольного процесса чистой гибели имеет место обобщенное свойство ветвления $F_i(t; s) = E(X_t + sY_t)^i$, $i = 0, 1, \dots$, где X_t, Y_t , — некоторые взаимосвязанные случайные процессы.

Для приложений [5] представляет интерес вывод обобщенного свойства ветвления в случае процесса *степенного типа*, когда $\mu_i = i^\rho \mu$, $0 < \rho < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. Севастьянов Б. А. О некоторых типах марковских процессов. — УМН, 1949, т. 4, в. 4, с. 194.
3. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, в. 2, с. 306–308.
4. Калинин А. В. Свойство ветвления для процесса чистой гибели. — В сб.: Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тезисы докладов. М.: ТВП, 1996, с. 62–63.
5. Waugh W. A. O. Uses of the sojourn time series for markovian birth process. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probab. Los Angeles, 1972, v. 3, p. 501–514.

Королев В. Ю. (Москва, Россия) **Об асимптотическом поведении экстремумов обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним.**

Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, — однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью. Пусть $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, — независимый от $N_1(t)$ случайный процесс с неубывающими, непрерывными справа, почти наверное конечными траекториями, выходящими из нуля. Положим

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Процесс $N(t)$ называется дважды стохастическим пуассоновским процессом (или процессом Кокса), управляемым процессом $\Lambda(t)$. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.), независимые от процесса $N(t)$. Положим

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

(для определенности будем считать, что $\sum_{j=1}^0 = 0$). Процесс $S(t)$ называется обобщенным процессом Кокса, управляемым процессом $\Lambda(t)$ и порожденным последовательностью $X_1, X_2, \dots$.

Процессы $S(t)$, определенные соотношениями (1)–(2), являются довольно адекватными моделями поведения некоторых систем в различных областях знания, поскольку они сочетают хаотический характер пуассоновских процессов с наблюдаемой на практике неоднородностью реальных процессов.

Будем считать, что существуют $EX_1 = a$ и $DX_1 = \sigma^2 > 0$. В работах [1]–[4] мы предполагали, что $E\Lambda(t)$ существует и равно t . Это предположение существенно упрощает рассуждения. В [5] и [6] мы привели необходимые и достаточные условия слабой сходимости обобщенных процессов Кокса соответственно с $a = 0$ и $a \neq 0$ без каких бы то ни было предположений моментного характера о $\Lambda(t)$.

Здесь мы рассматриваем экстремумы обобщенного процесса Кокса $\bar{S}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau)$. Мы продолжаем исследования, начатые в работе [7], где рассматривался случай $a = 0$. Здесь же мы сосредоточим внимание на ситуации, в которой $a \neq 0$. Эти два случая оказываются принципиально различными, поскольку, чтобы получить нетривиальные предельные законы для $\bar{S}(t)$, в этих случаях надо по-разному нормировать управляющий процесс $\Lambda(t)$.

Расстояние Леви между функциями распределения F_1 и F_2 будет обозначаться $L_1(F_1, F_2)$. Если X_1 и X_2 — с.в. с функциями распределения (ф.р.) F_1 и F_2 соответственно, то мы считаем, что $L_1(X_1, X_2) = L_1(F_1, F_2)$.

Символы $\xrightarrow{P}$ и $\Rightarrow$ соответственно обозначают сходимость по вероятности и слабую сходимость. Стандартная нормальная ф.р. будет обозначаться $\Phi(x)$.

Теорема. Пусть $S(t)$ — обобщенный процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$ и порожденный последовательностью $\{X_i\}_{i \geq 1}$. Предположим, что $EX_1 = a \neq 0$ и $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $D(t) > 0$ — такая функция, что $D(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда распределения неслучайно центрированных и нормированных экстремумов обобщенного процесса Кокса $\bar{S}(t)$ слабо сходятся к распределению

некоторой с.в. Z при $t \rightarrow \infty$: $\bar{S}(t) - C(t)/D(t) \Rightarrow Z$ ($t \rightarrow \infty$) при некоторой вещественной функции $C(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|C(t)|}{D^2(t)} \equiv k^2 < \infty$$

и существует такая с.в. V , что $Z \stackrel{d}{=} k \cdot \sqrt{(a^2 + \sigma^2)/|a|} \cdot W + V$, где W — с.в. со стандартным нормальным распределением, независимая от V , и $L_1((a\Lambda(t) - C(t))/D(t), V(t)) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), где распределение с.в. $V(t)$ определяется характеристической функцией

$$\mathbf{E} \exp\{isV(t)\} = \exp\left\{-\frac{s^2(a^2 + \sigma^2)}{2|a|} \left[k^2 - \frac{|C(t)|}{D^2(t)}\right]\right\} \mathbf{E} \exp\{isV\}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Следствие. В условиях теоремы, неслучайно центрированные и нормированные экстремумы обобщенного процесса Кокса $\bar{S}(t)$ асимптотически нормальны с некоторой асимптотической дисперсией $\delta^2 > 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\bar{S}(t) - C(t)}{D(t)} < x\right\} \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (t \rightarrow \infty),$$

тогда и только тогда, когда $\limsup_{t \rightarrow \infty} |C(t)|/D^2(t) \leq |a|\delta^2/(a^2 + \sigma^2)$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L_1\left(\mathbf{P}\left\{\frac{a\Lambda(t) - C(t)}{D(t)} < x\right\}, \Phi\left(\frac{\sqrt{|a|D(t)}x}{\sqrt{|a|\delta^2 D^2(t) - (a^2 + \sigma^2)|C(t)|}}\right)\right) = 0.$$

Теорема и следствие верны не только для обобщенных процессов Кокса, но также для любых процессов вида (2), где N_1 — произвольный асимптотически вырожденный и асимптотически нормальный считающий процесс, т.е. такой, что $N_1(t)/t \Rightarrow \gamma$ и $\mathbf{P}\{(N_1(t) - rt)/p\sqrt{t} < x\} \Rightarrow \Phi(x)$ ($t \rightarrow \infty$) для некоторых $\gamma > 0$, $r \in \mathbf{R}$ и $p > 0$.

Доказательства этих результатов основаны на общей теореме о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости суперпозиций независимых случайных процессов [8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 96-01-01919 и 97-01-00271), РГНФ (проект 97-02-02235) и the Committee on Knowledge Extension Research (CKER) Американского общества актуариев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Предельное поведение неслучайно центрированных обобщенных процессов Кокса. — Фундам. и прикл. матем., 1996, т. 2, с. 957–975.
2. Bening V. E., Korolev V. Yu. On approximations to generalized Cox processes. — Probab. Math. Statist., 1998a, v. 18, № 2, p. 247–270.
3. Bening V. E., Korolev V. Yu. Asymptotic behavior of compound non-ordinary Cox processes with nonzero means. — J. Math. Sciences, 1998b. (To appear.)
4. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996.
5. Королев В. Ю. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 786–792.
6. Королев В. Ю. Об асимптотическом поведении обобщенных процессов Кокса. Тезисы докладов Пятой Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам. М.: ТВП, 1998, с. 809–813.
7. Королев В. Ю. Асимптотические свойства экстремумов обобщенных процессов Кокса и их применение к некоторым задачам финансовой математики. — Теория вероятн. и ее примен. (В печати.)
8. Korolev V. Yu. A general theorem on the limit behavior of superpositions of independent random processes with applications to Cox processes. — J. Math. Sciences, 1996, v. 81, № 5, p. 2951–2956.

Круглов В. М. (Москва, Россия) **Об эквивалентности слабой сходимости суммы и максимальной суммы независимых случайных величин.**

В статье [1], в частности, указаны случаи эквивалентности слабой сходимости надлежащим образом центрированных и нормированных суммы и максимальной суммы независимых случайных величин в предположении, что случайные величины имеют равные между собой положительные математические ожидания, а последовательность, составленная из дисперсий последовательных сумм, обладает правильным изменением с показателем изменения меньше единицы. В настоящем сообщении указывается, что метод доказательства утверждений из [1] пригоден в случаях, когда центрирующие и нормирующие постоянные имеют несколько более общий вид.

Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Определим последовательные суммы $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема. *Предположим, что $0 < a \leq \mathbf{E}X_n \leq b < \infty$, $0 < \sigma^2 \leq \text{Var } X_n \leq \Delta^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Для того чтобы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} < x \right\} = F(x), \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad (1)$$

для некоторой функции распределения F , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\max_{1 \leq k \leq n} S_k - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} < x \right\} = F(x), \quad x \in \mathbf{R}^1. \quad (2)$$

Доказательство. Возьмем положительное число γ , $\gamma < \frac{1}{2}$, и положим $r_n = [n - n^{1-\gamma}]$, где квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа. Обозначим $B_n^2 = \text{Var } S_n$, $T_n = S_n - \mathbf{E}S_n$. Для любых вещественных чисел $\varepsilon > 0$ и x справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{S_n \leq \mathbf{E}S_n + x B_n\} &\geq \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \leq \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \max \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} S_k, \max_{r_n < k \leq n} S_k \right\} \leq \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} \\ &\geq \mathbf{P} \left\{ \max_{r_n < k \leq n} S_k \leq \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} - \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} S_k > \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} \\ &\geq \mathbf{P} \left\{ S_n \leq \mathbf{E}S_n + (x - \varepsilon) B_n, \max_{r_n < k \leq n} S_k - S_n \leq \varepsilon B_n \right\} \\ &\quad - \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} S_k > \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} \\ &\geq \mathbf{P} \{S_n \leq \mathbf{E}S_n + (x - \varepsilon) B_n\} - \mathbf{P} \left\{ \max_{r_n < k \leq n} (S_k - S_n) > \varepsilon B_n \right\} \\ &\quad - \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} S_k > \mathbf{E}S_n + x B_n \right\} \geq \mathbf{P} \{S_n \leq \mathbf{E}S_n + (x - \varepsilon) B_n\} \\ &\quad - \mathbf{P} \left\{ \max_{r_n < k \leq n} (T_k - T_n) > \varepsilon B_n \right\} - \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} T_k > \mathbf{E}S_n - \mathbf{E}S_{r_n} + x B_n \right\}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что (1) и (2) эквивалентны, если

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} T_k > \mathbf{E}S_n - \mathbf{E}S_{r_n} + x B_n \right\} \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^1, \quad (3)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{r_n < k \leq n} (T_k - T_n) > \varepsilon B_n \right\} \rightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Докажем (3). Из определения r_n следует, что $ES_n - ES_{r_n} + xB_n \geq 0$ для всех достаточно больших n . Для таких n по неравенству Колмогорова

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq r_n} T_k > ES_n - ES_{r_n} + xB_n \right\} \leq \frac{B_{r_n}^2}{(ES_n - ES_{r_n} + xB_n)^2}.$$

Отсюда следует (2), так как

$$\frac{B_{r_n}^2}{(ES_n - ES_{r_n} + xB_n)^2} \leq \frac{\Delta^2 r_n}{(an^{1-\gamma} - |x|\Delta\sqrt{n})^2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. По неравенству Колмогорова

$$P \left\{ \max_{r_n < k \leq n} (T_k - T_n) > \varepsilon B_n \right\} \leq \frac{B_n^2 - B_{r_n}^2}{\varepsilon^2 B_n^2} \leq \frac{\Delta^2(n - r_n)}{\sigma^2 n} \rightarrow 0,$$

что доказывает (4). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-01-01919, 96-01-01920, INTAS-RFBR грант 95-00-99.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Круглов В. М., Чжан Бо.* Предельные теоремы для максимальных случайных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 520–532.

Линьков Ю. Н. (Донецк, Украина) **Большие отклонения в задаче различения гипотез.**

Пусть $(X^t, \mathcal{B}^t, P^t, \tilde{P}^t)$, $t \in \mathbf{R}_+$ — семейство бинарных статистических экспериментов, z_t — производная Лебега меры $\tilde{P}^t$ относительно меры P^t (отношение правдоподобия) и $H_t(\varepsilon)$ — интеграл Хеллингера порядка $\varepsilon \in \mathbf{R}$ для мер $\tilde{P}^t$ и P^t [1]. Предельные теоремы для отношения правдоподобия z_t играют важную роль в асимптотической теории проверки гипотез [2]. Здесь мы рассмотрим теоремы о больших отклонениях для $\Lambda_t = \ln z_t$ и применим их к исследованию вероятностей ошибок некоторых критериев. Введем условие:

(Н) для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln H_t(\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)$, где $\psi \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\kappa(\varepsilon)$ — собственная выпуклая функция, дифференцируемая на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, с $\gamma_- = \kappa'(\varepsilon_- + 0) < \kappa'(\varepsilon_+ - 0) = \gamma_+$, $\varepsilon_- = \inf\{\varepsilon: \kappa(\varepsilon) < \infty\}$, $\varepsilon_+ = \sup\{\varepsilon: \kappa(\varepsilon) < \infty\}$.

Очевидно, $\varepsilon_- \leq 0$ и $\varepsilon_+ \geq 1$. Введем обозначение $\Gamma_0 = \gamma_0 I(\varepsilon_- < 0) + \gamma_- I(\varepsilon_- = 0)$, $\Gamma_1 = \gamma_1 I(\varepsilon_+ > 1) + \gamma_+ I(\varepsilon_+ = 1)$, где $I(A)$ — индикатор множества A , $\gamma_0 = \kappa'(0)$ в случае $\varepsilon_- < 0$ и $\gamma_1 = \kappa'(1)$ в случае $\varepsilon_+ > 1$.

Вообще говоря, логарифм отношения правдоподобия Λ_t является расширенной случайной величиной относительно P^t и $\tilde{P}^t$. Поэтому, применяя теоремы о больших отклонениях для расширенных случайных величин [3], [4], получаем теоремы о больших отклонениях для Λ_t относительно P^t и $\tilde{P}^t$.

Теорема 1. Если выполняется условие (Н) с $\Gamma_0 < \Gamma_1$, то для любого $\gamma \in (\Gamma_0, \Gamma_1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1} \Lambda_t > \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1} \Lambda_t \geq \gamma) = -I(\gamma),$$

а для любого $\gamma \in (\gamma_-, \Gamma_1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\psi_t^{-1} \Lambda_t < \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\psi_t^{-1} \Lambda_t \leq \gamma) = \gamma - I(\gamma),$$

где $I(\gamma) = \sup_{\varepsilon} (\varepsilon\gamma - \kappa(\varepsilon))$ — преобразование Лежандра–Фенхеля функции $\kappa(\varepsilon)$.

Теорема 1 позволяет исследовать скорости убывания вероятностей ошибок критериев, следуя [2], [5]. Пусть δ_t — критерий Неймана–Пирсона уровня $\alpha_t \in (0, 1)$

для различных гипотез P^t и $\tilde{P}^t$. Через β_t обозначим вероятность ошибки 2-го рода критерия δ_t .

Теорема 2. Если выполняется условие (Н) с $\Gamma_0 < \Gamma_1$, то для любого $a \in (I(\Gamma_0), I(\Gamma_1))$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a)$, где $b(a) = a - \gamma(a) \in (I(\Gamma_1) - \Gamma_1, I(\Gamma_0) - \Gamma_0)$, а $\gamma(a)$ — единственное решение уравнения $I(\gamma) = a$ относительно $\gamma \in (\Gamma_0, \Gamma_1)$.

Пусть δ_t^π — критерий максимума апостериорной вероятности гипотез P^t и $\tilde{P}^t$ при априорных вероятностях $(\pi, 1 - \pi)$. Через $\alpha(\delta_t^\pi)$, $\beta(\delta_t^\pi)$ и $e(\delta_t^\pi)$ обозначим вероятности ошибок 1- и 2-го рода и риск критерия δ_t^π соответственно.

Теорема 3. Если выполняется условие (Н) с $\Gamma_0 < 0 < \Gamma_1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha(\delta_t^\pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln \beta(\delta_t^\pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^{-1} \ln e(\delta_t^\pi) = I(0)$.

Имеет место аналог теоремы 3 также для минимаксного критерия. Мы применяем теоремы 1–3 к статистическим экспериментам, порождаемым наблюдениями различных случайных процессов.

Пример. Пусть $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $n = 1, 2, \dots$, — наблюдения процесса авторегрессии вида $\xi_i = \theta \xi_{i-1} + w_i$, $i = 1, 2, \dots$, где $\xi_0 = 0$, $\theta \in \mathbf{R}$ — неизвестный параметр, а $w_1, w_2, \dots$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Пусть P_θ^n — мера, задающая распределение наблюдения ξ^n . Полагая $P^n = P_\theta^n$ и $\tilde{P}^n = P_{\tilde{\theta}}^n$, где $\tilde{\theta} \neq \theta$, имеем семейство бинарных статистических экспериментов $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, P^n, \tilde{P}^n)$, $n = 1, 2, \dots$, порожденных наблюдениями ξ^n . Следуя [6], где рассмотрен случай $|\theta| < 1$, получаем теорему.

Теорема 4. Для любого $\varepsilon \in \mathbf{R}$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln H_n(\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)$, где для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$

$$\kappa(\varepsilon) = -2^{-1} \ln \left(2^{-1} \left(c(\varepsilon) + \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)} \right) \right), \quad (1)$$

$\kappa(\varepsilon_-)$ при $|\theta| \leq 1$ и $\kappa(\varepsilon_+)$ при $|\tilde{\theta}| \leq 1$ вычисляются по формуле (1), $\kappa(\varepsilon_-) = 0$ при $|\theta| > 1$, $\kappa(\varepsilon_+) = 0$ при $|\tilde{\theta}| > 1$ и $\kappa(\varepsilon) = \infty$ для всех $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, $c(\varepsilon) = 1 + \theta^2 + \varepsilon(\tilde{\theta}^2 - \theta^2)$, $b(\varepsilon) = -\theta - \varepsilon(\tilde{\theta} - \theta)$, $\varepsilon_- = \varepsilon_1 I(-1 < \theta \leq \tilde{\theta}^{-1}) + \varepsilon_2 I(\tilde{\theta}^{-1} < \theta < 1)$, $\varepsilon_+ = \varepsilon_1 I(-1 < \tilde{\theta} \leq \theta^{-1}) + \varepsilon_2 I(\theta^{-1} < \tilde{\theta} < 1) + I(|\tilde{\theta}| > 1)$, а ε_1 и ε_2 — корни уравнения $c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon) = 0$.

Теорема 4 позволяет применить теоремы 1–3. Мы рассматриваем также случай близких гипотез, когда $\tilde{\theta}$ зависит от n и $\tilde{\theta} = \theta_n \rightarrow \theta$ при $t \rightarrow \infty$, а θ не зависит от n и принимает любое значение из $\mathbf{R}$. При $|\theta| < 1$ случай близких гипотез исследован ранее в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1993, 256 с.
2. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the likelihood ratio in the hypotheses testing problems. — ROSE, 1995, v. 3, № 1, p. 23–40.
3. *Линьков Ю. Н.* Теоремы о больших уклонениях. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 406–407.
4. *Lin'kov Yu. N.* Large deviation theorems for extended random variables and some applications. — J. Math. Sci., 1998. (В печати.)
5. *Lin'kov Yu. N.* Large deviation theorems in the hypotheses testing problems. — In: Exploring Stochastic Laws. Eds. by A. V. Skorokhod and Yu. V. Borovskikh. Utrecht: VSP, 1995, p. 263–273.
6. *Линьков Ю. Н., Медведева М. И.* Теоремы о больших уклонениях в задаче различения процессов нормальной авторегрессии. — Теория случайных процессов, 1995, т. 1 (17), № 1, с. 71–81.
7. *Линьков Ю. Н.* Розрізнення процесів авторегресії з нульовим асимптотичним рівнем. — Теорія ймовірн. та математична статистика, 1996, в. 54, с. 82–91.

Mijnheer J. (Leiden, Netherlands) Quadratic forms of stable random variables with a stable limit distribution.

In this note we prove that a properly normalized quadratic form of stable random variables converges in distribution to a stable law.

1. In this note we make use of the notation as used in [1]. Thus we consider independent strictly stable random variables $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ satisfying the stability property $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \varepsilon_0$ for all n . Then we also have the following stability property: for $s, t > 0$ we have $s^{1/\alpha} \varepsilon_1 + t^{1/\alpha} \varepsilon_2 \stackrel{d}{=} (s+t)^{1/\alpha} \varepsilon_0$. Let $e'_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ and, for $0 < \gamma < 1$,

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma & \dots & \gamma^{n-2} \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \gamma^{n-2} & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In [1] we proved the following theorem.

Theorem 1. *Let e_n and Γ_n be defined as above. Then, $(n \log n)^{-1/\alpha} e'_n \Gamma_n e_n$ converges in distribution to a stable law as $n \rightarrow \infty$.*

In the proof we make use of the results of [2]. Let $X_0 = (1 - \gamma^\alpha)^{-1/\alpha} \varepsilon_0$, $X_k = \gamma X_{k-1} + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots$. Essentially it follows from [2] that $\{X_{k-1} \varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ has an independent representation. In the same way we prove the following theorem:

Theorem 2. *Let e_n be defined as above. Let $(\Gamma_n)_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$, then $n^{-2/\alpha} (\log n)^{-1/\alpha} e'_n \Gamma_n e_n$ converges in distribution to a stable law, for $n \rightarrow \infty$.*

REFERENCES

1. *Mijnheer J.* The asymptotic distribution of a sequential estimator for the parameter in an AR(1) model with stable errors. (В печати.)
2. *Jakubowski A.* Minimal conditions in p -stable limit theorems. — Stoch. Proc. Appl., v. 44, p. 291–327.

Omey E. (Brussels, Belgium) Modelling the relative strength index.

1. Introduction. Portfolio-managers are interested in models that can be used in the decision process whether a certain asset should be bought or sold. There are two groups of «techniques». In *fundamental analysis* one uses econometrics and basic economic indicators to analyse the (long term) behavior of stockprices. In *technical analysis* one concentrates on the structure of the price to detect «changes» in its pattern. Using historic prices or returns one tries to detect certain «waves». One of these methods is based on the so-called RSI, the Relative Strength Index. This index is calculated as follows. Let $P(1), P(2), \dots, P(n)$ denote the price of the asset and let $X(i) = P(i+1) - P(i)$, or alternatively, let $X(i) = \log(P(i+1)/P(i))$. If successive values of $X(i)$ are positive, this means that the price is steadily increasing; if successive $X(i)$ are negative, the price is falling down. Let $U(i) = \max(0, X(i))$ denote the size of the «positive» jumps and let $D(i) = -\min(X(i), 0)$ denote the size of the downside jumps. If we consider $X(i)$ for $i = m+1, \dots, m+n$, we can calculate RSI as follows: $RSI = \sum_{i=m+1}^{m+n} U(i) / \sum_{i=m+1}^{m+n} (U(i) + D(i))$. The RSI measures the force with which the price goes up or not. Note that $0 \leq RSI \leq 1$ and that values of RSI near 0 or 1 are critical. In the sequel we are interested in two questions concerning RSI. The first question is how to model RSI for fixed values of n . For different values of m we calculate the index RSI. Using the resulting sample we fit a model. Second we consider the asymptotic behavior of RSI.

2. Modelling RSI.

2.1. Beta (a, b)-models. Since RSI is concentrated in the interval $[0, 1]$ it seems plausible to use a Beta-model. Using a sample of RSI-values we use the method of moments to find estimates for a and b .

2.2. Generalized Lambda Distribution (GLD). The GLD $(\beta(1), \beta(2), \beta(3), \beta(4))$ family is a 4 parameter family defined by its inverse distribution function $G(y)$ as follows: for $0 \leq y \leq 1$ we set $G(y) = \beta(1) + [y^{\beta(3)} - (1-y)^{\beta(4)}]/\beta(2)$. This distribution is very convenient for simulation studies! Note that the GLD is only a valid distribution if the parameters satisfy certain restrictions. To fit the GLD to a given data-set the method of moments or the quantile method can be used. Setting equal the four sample moments $m(1), m(2), m(3), m(4)$ and their theoretical counterpart $\beta(i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, the resulting complex equations can be solved using numerical procedures. Also multivariate GLD can be used, see [2].

2.3. Gamma and Weibull models. We can consider the two terms $T1 = \Sigma U(i)$ and $T2 = \Sigma D(i)$ of RSI separately and find suitable models to fit the ups and the downs. For the ups, e.g., we use a model of the form $U = (1-p)UI\{U=0\} + pV$, where $V = UI\{U>0\}$.

We estimate p by calculating the proportion of U -values which are positive. The variable V can be modelled using a gamma-distribution or using a two-parameter Weibull-distribution. Empirical evidence shows that the gamma model is not a bad choice [1].

3. Asymptotic behavior of RSI. For a random variable (r.v.) X , let $U = \max(0, X)$ and $D = -\min(0, X)$. It can be proved ([3]) that the r.v. (U, V) is in the bivariate domain of attraction ($=: DA$) of the stable r.v. $(Y(\alpha), Y(\beta))$ if and only if the marginals U and V are in the univariate DA of $Y(\alpha), Y(\beta)$, respectively. Define $V_U(x)$ and $W_U(x)$ as follows: $V_U(x) = \int_0^x y^2 dF_U(y)$ and $W_U(x) = x^2/V_U(x)$. Similarly we define $V_D(x)$ and $W_D(x)$. If $U \in DA(Y(\alpha))$, then a sequence of normalizing constants $a(n)$ can be defined through the limit relation $a(n) \sim I(n)$ where $I(x)$ is an inverse of the function $W_U(x)$. Similarly, we define $b(n) \sim II(n)$ where $II(n)$ is an inverse of $W_D(x)$. In what follows, in the definition of the RSI we set $m = 0$ and define $RSI' = RSI - E(U)/(E(U+D))$.

Proposition 3.1 ([1]). *Suppose $U \in DA(Y(\alpha))$ and $V \in DA(Y(\beta))$.*

- (i) *If $1 < \alpha < \beta \leq 2$, then $nRSI'/a(n) \Rightarrow Y(\alpha)E(U)/E^2(U+D)$.*
- (ii) *If $1 < \beta < \alpha \leq 2$, then $nRSI'/b(n) \Rightarrow -Y(\beta)E(U)/E^2(U+D)$.*

In the case where $\alpha = \beta$ we have to be more careful.

Proposition 3.2 ([1]). *Suppose in Proposition 3.1 that $\alpha = \beta$.*

- (i) *If $V_U(x) = o(1)V_D(x)$, then Proposition 3.1 (i) holds.*
- (ii) *If $V_D(x) = o(1)V_U(x)$, then Proposition 3.1 (ii) holds.*
- (iii) *If $V_U(x) \sim cV_D(x)$, then for some constants a and b , $nRSI'/b(n) \Rightarrow aY(\alpha) + bY'(\alpha)$.*

In the special case, where $E(U^2) + E(D^2) < \infty$ we can take $a^2(n) = n\sigma^2(U)$ and $b^2(n) = n\sigma^2(D)$ and we have:

Corollary 3.3 ([1]). *Suppose $E(U^2) + E(D^2) < \infty$. Then $n^{1/2}RSI' \Rightarrow L \sim N(0, \sigma^2(L))$, where $\sigma^2(L) = (\sigma^2(U)E^2(D) + \sigma^2(D)E^2(U) + 2E^2(U)E^2(D))/E^4(U+D)$.*

Remarks. 1) The limiting normal distribution can be used to calculate confidence intervals for the index.

- 2) If $E(U) = E(D)$, the previous expression simplifies to $n^{1/2}(RSI - \frac{1}{2}) \Rightarrow L \sim N(0, \frac{1}{8} + (\sigma^2(U) + \sigma^2(D))/16)$.

This investigation was partly supported by the International Department of the Ministry of Education of the Flemish Government and by the Russian Academy of Sciences.

REFERENCES

1. Cole F., Omev E. Modelling the Relative Strength Index. (В печати.)
2. Dudewicz E. J., Karian Z. A. The extended CLD for fitting distributions to date with moments, II: tables. — Amer. J. of Math. and Man. Sc., 1996, v. 16, № 3, 4, p. 271–332.
3. Omev E. Multivariate Regular Variation and Applications in Probability Theory. — Eclectica, 1989, № 74, Brussels.

Пагурова В.И. (Москва, Россия) **О скорости сходимости считающего процесса в присутствии мешающих параметров.**

Пусть $X_1, \dots, X_n$ означают независимые одинаково распределенные случайные величины с общей непрерывной функцией распределения $F((x-\theta)/\eta)$, $|\theta| < \infty$, $\eta > 0$, $\hat{\theta}$ и $\hat{\eta}$ являются состоятельными оценками параметров θ and η соответственно, построенными по наблюдениям $X_1, \dots, X_n$. Рассмотрим класс (A) распределений $F(x)$, для которых $1 - F(x) \sim ax^c \exp(-bx^\beta)$, $a, b, \beta > 0$ и класс (B) распределений $F(x)$, для которых $1 - F(x) \sim ax^{-\gamma}$, $a, \gamma > 0$, при $x \rightarrow \infty$. Введем

$$Y_i = \begin{cases} \frac{X_i - \hat{\theta}}{\eta}, & \text{если } \eta \text{ известно,} \\ \frac{X_i - \hat{\theta}}{\hat{\eta}}, & \text{если } \theta \text{ неизвестно,} \end{cases} \quad (1)$$

$i = 1, \dots, n$, и считающий процесс $N_n(t) = \sum_{i=1}^n I\{Y_i \geq y_n(t)\}$, $y_n(t) = F^{-1}(1 - t/n)$, $t > 0$. Для классов (A) и (B) исследуем влияние типа оценок $\hat{\theta}$ и $\hat{\eta}$ на скорость сходимости процесса $N_n(t)$ к пуассоновскому процессу $L(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

В случае (1) рассмотрим две оценки параметра θ ,

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad (3)$$

и

$$\hat{\theta} = \text{med}_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}. \quad (4)$$

В случае (2) рассмотрим две оценки параметра η ,

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2}{n}} \quad (5)$$

и

$$\hat{\eta} = \frac{X_{([0,75n])} - X_{([0,25n]+1)}}{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}. \quad (6)$$

Нижеследующие теоремы указывают порядок сходимости $O(R_n)$ при $n \rightarrow \infty$ считающего процесса $N_n(t)$ к $L(t)$ в представлении

$$\mathbf{P}\{N_n(t) = k\} - \mathbf{P}\{L(t) = k\} = O(R_n), \quad (7)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, в зависимости от класса (A) или (B) распределений $F(x)$ и типа оценок параметров θ and η . Теоремы 1 и 2 рассматривают случай (1), теоремы 3 и 4 рассматривают случай (2). Заметим, что в случае известных параметров θ и η в представлении (7) имеем $R_n = n^{-1}$.

Теорема 1. Если $\hat{\theta}$ определяется соотношением (3), $F'(x) = f(x) > 0$ для всех x , $\mathbf{E}X_1^4 < \infty$, $\mathbf{E}[f'(X_1)/f(X_1)]^2 < \infty$, тогда в представлении (7) имеем

$$R_n = \begin{cases} \max(n^{-1} \ln n, n^{-1} (\ln n)^{2(\beta-1)/\beta}) & \text{для класса (A),} \\ n^{-1} & \text{для класса (B).} \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 2. Если $\hat{\theta}$ определяется соотношением (4), $F(x)$ является симметричной функцией, $f(0) > 0$, тогда в представлении (7) мы имеем (8).

Теорема 3. Если $\hat{\eta}$ определяется соотношением (5), $EX_1^6 < \infty$, $f(x) > 0$ для всех x , тогда в представлении (7) мы имеем

$$R_n = \begin{cases} \max(n^{-1}(\ln n)^2, n^{-1}(\ln n)^{(\beta+2)/\beta}) & \text{для класса (A),} \\ n^{-1+2/\gamma} & \text{для класса (B).} \end{cases}$$

Теорема 4. Если $\hat{\eta}$ определяется соотношением (6), $f(F^{-1}(0, 25)) > 0$, $f(F^{-1}(0, 75)) > 0$, тогда в представлении (7) мы имеем

$$R_n = \begin{cases} n^{-1}(\ln n)^2 & \text{для класса (A),} \\ n^{-1} & \text{для класса (B).} \end{cases}$$

Для распределений из класса (A) с тяжелыми хвостами ($\beta \sim 0$) и для распределений из класса (B) оценка параметра масштаба (6), основанная на порядковых статистиках, дает более быструю скорость сходимости $N_n(t)$ к $L(t)$ в сравнении с оценкой (5).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-01919.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galambos J. The asymptotic theory of extreme order statistics. NY: John Wiley, 1978.
2. Пагурова В. И., Нестерова С. А. О слабой сходимости считающих процессов в присутствии мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, № 1, с. 176–183.
3. Пагурова В. И., Чижикова И. Л. Критерий обнаружения выбросов, основанный на робастных оценках мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, № 2, с. 445–452.

Pancheva E. I. (Sofia, Bulgaria) On semi-selfsimilarity.

This is a note on semi-selfsimilar extremal processes. Extremal processes are stochastic processes with increasing right-continuous sample paths and independent max-increments. Without loss of generality, we consider extremal processes $Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ whose time space is the positive axis and state space is the positive ortand in $\mathbf{R}^d$. The independence of max-increments means that for any finite sequence of time points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ there exist independent random vectors $U_0, \dots, U_k$ in $[0, \infty)^d$ such that $(Y(t_0), \dots, Y(t_k)) \stackrel{d}{=} (U_0, U_0 \vee U_1, \dots, U_0 \vee \dots \vee U_k)$.

The main characteristics of an extremal process are its distribution function (d.f.), the lower curve, the max-increments and the associated point process. All they are studied in [1].

Here we are interested in characterising a special type of extremal processes satisfying the characteristic equation

$$Y \circ \sigma(t) \stackrel{d}{=} L \circ Y(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

We call this type semi-selfsimilar extremal processes. We choose the time-space change $\eta(t, x) = (\sigma(t), L(x))$, $t \in (0, \infty)$, $x \in (0, \infty)^d$ continuous and strictly increasing in each coordinate. Below we denote the n -time composition $\xi \circ \dots \circ \xi$ by $\xi^{o(n)}$, $\xi^{-1} \circ \dots \circ \xi^{-1}$ by $\xi^{o(-n)}$ and $\xi^0 = \text{id}$.

Let η be a time-space change of $(0, \infty)^{d+1}$. Suppose the cyclic group $\Gamma(\eta) = \{\eta^{o(n)}, n \in \mathbf{Z}\}$ satisfies the boundary condition (BC), i.e., $\eta^{o(-n)}(z) \rightarrow \vec{0}$ as $n \rightarrow \infty$, $\eta^{o(n)}(z) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Then there exist a continuous homeomorphism $h: (0, \infty)^{d+1} \leftrightarrow \mathbf{R}^{d+1}$ and a real number $\varphi > 1$ such that $\eta(z) = h^{-1}(h(z) + e \cdot \log \varphi)$, where $e = (1, \dots, 1)$. We denote $\eta = [\varphi, h]$, $h(t, x) = (h_0(t), h_*(x))$. Below we consider several direct consequences of (1):

The distribution function $g(t, x) = \mathbf{P}\{Y(t) < x\}$ of a semi-selfsimilar extremal process is invariant with respect to the cyclic group $\Gamma(\eta)$ of a time-space change η , i.e., $g \circ \eta^{b(n)} = g$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

Recall, the univariate marginals $g_t(x) = g(t, x)$ are left-continuous in x .

If Y is a semi-selfsimilar extremal process stochastically continuous at $t = 0$ and if g_1 is continuous at the upper boundary of the support, then $Y(0) = C(0)$ a.s.

Let Y be a semi-selfsimilar extremal process with lower curve C and associated point process $N = \{(T_k, X_k): k = 0, 1, \dots\}$ on $[0, C]^c$. If the distribution functions of X_k are continuous at the upper boundary of the support, then Y is max-id.

A semi-selfsimilar distribution function g is either continuous everywhere or there is at least one infinite sequence $z_n \uparrow \infty$ of discontinuity points.

Let $Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ be a semi-selfsimilar extremal process with respect to $\eta = [\varphi, h]$. Then the stochastic process $X^*: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^d$ defined by $X^*(t) := h_* \circ Y \circ h_0^{-1}(t) - et$ is periodically stationary with a period $\log \varphi$, i.e., $X^*(t + \log \varphi) = X^*(t)$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

The following theorems characterize the class of the semi-selfsimilar extremal processes.

Theorem 1. Let $X: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ be an extremal process with non-degenerate distribution function f and let $\xi_n = (\tau_n, L_n)$ be a sequence of time-space changes of $(0, \infty)^{d+1}$ such that

- a) $\xi_n \rightarrow \infty$, $\xi_n^{-1} \circ \xi_{n+1} \rightarrow \eta = (\sigma, L)$ and $\Gamma(\eta)$ satisfies the boundary condition (BC);
- b) $Y_n = L_n^{-1} \circ X \circ \tau_n \Rightarrow Y$ where Y is a non-degenerate extremal process stochastically continuous at $t = 0$ with d.f. g and lower curve C with $C(0) = 0$. Then

- 1) the limiting process Y is semi-selfsimilar with respect to $\Gamma(\eta)$;
- 2) the associated point process is Poisson;
- 3) the univariate marginals g_t of Y are semi-max-selfdecomposable, i.e., $g_t(x) = g_t(Lx) \cdot Q_t(x)$, where Q_t is a max-id d.f., $x > C(t)$ and $L(x) > x$.

Conversely, if Y is a non-degenerate semi-selfsimilar extremal process stochastically continuous at $t = 0$, then Y is such a limit.

Theorem 2. Suppose G is a non-degenerate d.f. with max-support $[0, \infty)^d$ and continuous at the upper boundary, and suppose L is a space-change which cyclic group satisfies the boundary condition (BC). Then G is semi-max-selfdecomposable with respect to L if and only if there is a Poisson extremal process $Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ with d.f. g and a time-change $\tau: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, such that Y is semi-selfsimilar with respect to (τ, L) and $g_1 = G$.

Theorem 3. Let $Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ be an extremal process with d.f. g and with stationary max-increments. Then Y is semi-selfsimilar if and only if g_1 is a max-semistable d.f.

Example. Let $Y: (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ be an extremal process with d.f. $g(t, x) = \exp\{-te^{-[x]}\}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Then Y is semi-selfsimilar with respect to $\eta(t, x) = (t/\alpha, x+1)$.

This paper is partially supported by the Bulgarian Ministry of Education and Sciences under grant MM-705/97.

REFERENCES

1. Balkema A. A., Pancheva E. I. Decomposition for multivariate extremal processes. — Commun. Statist. Theory Meth., 1996, v. 25, No 4, p. 737–758.
2. Maejima M., Sato K. Semi-selfsimilar processes. — Research Report DSTR/RR-97/005, June 26, 1997.

Plucinska A. (Warsaw, Poland) Properties of characteristic functions of polynomial-normal distributions via Hermite polynomials.

We consider a class of densities formed by taking the product of non-negative polynomials and normal densities. This class is called polynomial-normal densities (PND), see [1]. It is known that every polynomial can be represented as a linear combination of Hermite polynomials. Thus we will consider the random variable (r.v.) X with the density given by one of the following equivalent forms

$$f(x) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} h_r H_r \left(\frac{x}{c} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2c^2} \right) = p_{2n}(x) \exp \left(-\frac{x^2}{2c^2} \right), \quad (1)$$

where p_{2n} — non-negative polynomial of the degree $2n$, ($n \geq 0$; $c > 0$), H_r — Hermite polynomial defined by the formula

$$H_r(x) = \exp \left(\frac{x^2}{2} \right) \frac{d^r}{dx^r} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), \quad h_r = \frac{1}{r!} \int H_r \left(\frac{x}{c} \right) f(x) dx = \frac{1}{r!} \mathbf{E} \left(H_r \left(\frac{x}{c} \right) \right).$$

Distribution (1) will be denoted by $\text{PND}(l, c, h_r; r \leq n)$. The characteristic function corresponding to density (1) is given by the formula

$$\varphi(\xi) = \sum_{r=0}^{2n} (i\xi c)^r h_r \exp \left(-\frac{\xi^2 c^2}{2} \right). \quad (2)$$

When we consider some sets of r.v.'s we write double indices $h_{r,x}$ instead of h_r .

Proposition 1 [3]. *If $X_1, \dots, X_n$ are independent r.v.'s and the distribution of X_j is $\text{PND}(l_j, c_j, h_{r,x_j}; r \leq 2l_j)$, $j = 1, \dots, n$, then the distribution of $S_n = X_1 + \dots + X_n$ is $\text{PND}(L_n, C_n, h_{r,s_n}, r \leq 2L_n)$, where $C_n^2 = c_1^2 + \dots + c_n^2$, $L_n = l_1 + \dots + l_n$, $h_{r,s_n} = (1/r!) \mathbf{E}[H_r(S_n/C_n)]$.*

We will consider the functions of the form

$$\varphi_{2n}(\xi) = q_{2n}(i\xi) \exp \left(-\frac{C_n^2 \xi^2}{2} \right) = \sum_{r=0}^{2n} a_{r,2n}(i\xi)^r \exp \left(-\frac{C_n^2 \xi^2}{2} \right), \quad (3)$$

where $a_{r,2n}$ are some coefficients such that $a_{0,2n} = 1$, $a_{2n,2n} \neq 0$. We give some criteria for (3) to be a ch.f. and we consider the problem when function (3) admits a n -decomposition (defined by Lukacs [2]).

Proposition 2. *Function (3) is a ch.f. and admits a n -decomposition if the zeros $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ of the polynomial $q_{2n}(\xi)$ satisfy the condition*

$$\frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} + \dots + \frac{1}{(\xi_{2n-1} - \xi_{2n})^2} < \frac{C_n^2}{4}, \quad (4)$$

where ξ_{2k-1}, ξ_{2k} ($k = 1, \dots, n$) are located symmetrically with respect to the imaginary axis.

Proposition 3. *Let q_{2n} be a polynomial of degree $2n$, $\varphi_{2n}(0) = 1$. The function*

$$\varphi_{2n}(\xi) = q_{2n}(i\xi c) \exp \left(-\frac{c^2 \xi^2}{2} \right), \quad c > 0, \quad (5)$$

is a characteristic function if and only if

$$\varphi_{2n}(\xi) = \sum_{r,s=0}^n (b_r b_s + d_r d_s) H_{r+s}(c\xi) i^{r+s} \exp \left(-\frac{c^2 \xi^2}{2} \right), \quad (6)$$

where b_r, d_r ($r = 0, 1, \dots, n$) are optional parameters satisfying the condition

$$\sum_{r+s=0,2,\dots,2n} (b_r b_s + d_r d_s) (r+s-1)!! = 1, \quad (7)$$

$r, s \leq n, (-1)!! = 1$.

Proposition 4. Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. with the ch.f. $\varphi(\xi) = (1 + i\xi\beta - \xi^2\alpha) \exp(-\xi^2 c^2/2)$, where $0 < \alpha < 1$, $\beta^2 < 4\alpha(1 - \alpha)$.

Then the ch.f. of $S_n = X_1 + \dots + X_n$ has form (3), where

$$q_{2n}(i\xi) = \sum_{r=0}^{2n} (i\xi)^r \sum_{k=0}^{[r/2]} \binom{n}{r-k} \binom{r-k}{k} \alpha^k \beta^{r-2k} \quad (8)$$

and $\binom{M}{N} = 0$ for $M < N$.

The proofs of Propositions 2–4 are given in [4].

REFERENCES

1. *Ewans M., Swartz T.* Distribution theory and inferences for polynomial-normal densities. — Commun. in Statistics, 1994, v. 23, № 4, p. 1123–1148.
2. *Lukacs E.* Characteristic Functions. London: Griffin, 1970.
3. *Plucinska A.* Some properties of polynomial-normal distribution. — Demonstratio Math., 1999, № 1. (To appear.)
4. *Plucinska A., Plucinski E.* Characteristic functions of polynomial-normal distribution. (To appear.)

Сапожников П. Н. (Пермь, Россия) **О характеристизации экспоненциального семейства сдвигов достаточной статистикой.**

Пусть $f(x)$ — плотность распределения случайного элемента со значениями на однородном пространстве X связной группы $\mathbb{L}$ и со счетным топологическим базисом относительно квазиинвариантной меры μ . Семейство сдвигов

$$\mathcal{F} = \{f(x | g) = f(g^{-1}x) \cdot \Delta(g)\}$$

будем называть регулярным, если $f(x) > 0$ для всех $x \in X$ и $f(x) \in C^{(1)}(X)$. Хорошо известно, что регулярное семейство сдвигов тогда и только тогда допускает нетривиальную достаточную статистику размерности m на основе повторной выборки объема n , $n > m$, когда оно представимо в виде

$$f(x | g) = \exp\{c_0(g) + c_1^\top(g) \varphi(x)\} \cdot h(x), \quad g \in G. \quad (1)$$

Поэтому проблема характеристизации экспоненциального семейства сдвигов направляющими функциями $\varphi^\top(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, которые можно считать линейно независимыми с константой, эквивалентна проблеме характеристизации регулярного семейства достаточной статистикой

$$T_n(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j). \quad (2)$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что семейство сдвигов $f_1(x | g)$ отличается от семейства $f(x | g)$ лишь выбором начала отсчета, если $f_1(x | g) = f(x | g\sigma)$ при всех $g \in G$. Семейства, отличающиеся только выбором начала отсчета, будем также называть подобными.

Положим $a^\top(g) = c^\top(g) - c^\top(e)V(g)$, где e — единица группы, а $V(g)$ — матрица представления G в базисе $(1, \varphi^\top(x))^\top$. Так как соответствие между весовыми функциями $h(x)$ экспоненциального семейства сдвигов и параметрическими функциями устанавливается формулой

$$a^\top(g) \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \ln \frac{\Delta(g)h(g^{-1}x)}{h(x)}, \quad (3)$$

то $h(x)$ определяет $a(g)$ единственным образом и наоборот [1].

Поэтому решение вопроса о существовании единственного с точностью до выбора начала отсчета семейства зависит от числа существенно различных решений уравнения

$$a^T(g_1 g_2) = a^T(g_1) + a^T(g_2) \cdot V(g_1), \quad g_1, g_2 \in G, \quad (4)$$

с начальным условием $a(e) = 0$.

Необходимые и достаточные условия характеристики представлены в следующем утверждении. Пусть E — единичная матрица.

Теорема 1. Пусть $f_1(x | g)$, $f(x | g)$ — экспоненциальные семейства сдвигов с одной и той же направляющей функцией. Тогда $f_1(x | g) = f(x | g\sigma)$ в том и только в том случае, если соответствующая пара $\tilde{a}(g)$, $a(g)$ решений уравнения (4) связана соотношением $\tilde{a}^T(g) = a^T(g) + a^T(\sigma)(V^T(g) - E)$. В частности, $f(x | g)$ единственно с точностью до выбора начала отсчета, в том и только в том случае, если для каждой пары решений $\tilde{a}(g)$, $a(g)$ уравнения (4) найдется элемент $\sigma \in G$ такой, что

$$\tilde{a}^T(g) = a^T(g) + a^T(\sigma)(V(g) - E). \quad (5)$$

Классический подход к характеристике семейств свойствами статистик, разработанный в книге [2], основан на применении аппарата характеристических функций. Упрощение выводов здесь достигнуто за счет предъявления более жестких требований к исходному семейству, а именно условия регулярности. Однако поскольку существуют два подхода к характеристике распределений свойством достаточности, то появляется возможность получения принципиально новых доказательств аналитических свойств характеристических функций.

Рассматриваемый подход позволяет получить целый ряд характеристик в определенной мере нейтральных по отношению к высокой размерности пространства X . В частности, — характеристики невырожденных p -мерных нормальных семейств направляющими функциями

$$(z_1, \dots, z_m; z_i^2, z_i z_j, j \geq i, i = 1, 2, \dots, p). \quad (6)$$

Спрашивается существуют ли еще какие-либо экспоненциальные семейства с данной направляющей функцией или ее частью, порожденные сдвигами аффинной группы и ее подгрупп? Ниже дается исчерпывающий ответ на этот вопрос.

1. Семейства, порожденные аддитивными сдвигами. Направляющая функция z характеризует нормальное семейство с точностью до выбора начального значения параметра сдвига, и ковариационной матрицы, которая, как известно, не меняется при аддитивных сдвигах.

2. Семейства, порожденные группой движений $\mathbf{R}^m$. Статистика $\bar{X}_n$ характеризует нормальное семейство, ковариационная матрица которого пропорциональна единичной.

3. Семейства, порожденные скрещенными произведениями аддитивной группы векторов и подгруппами полной линейной группы преобразований $\mathbf{R}^m$. Существует единственное с точностью до выбора начала отсчета семейство сдвигов в $\mathbf{R}^m$ с направляющей функцией $(z^T, z_1^2, \dots, z_m^2)$, порожденное прямым произведением групп линейных преобразований прямой.

4. Экспоненциальные семейства сдвигов в $\mathbf{R}^m$ с направляющей функцией (6), порожденное группой аффинных преобразований.

Существует единственное с точностью до выбора начала отсчета семейство сдвигов, порожденное группой аффинных преобразований $\mathbf{R}^p$, а именно многомерное нормальное семейство.

Рассматриваемый подход к характеристике семейств сдвига на основе повторной выборки может быть распространен и на более общий случай. Например, можно показать, что если вектор X_n независимых наблюдений представим в виде $\Phi\theta + \sigma\epsilon$, где

Φ — известная $(n \times m)$ -матрица ранга m , скаляр σ и вектор θ неизвестны и компоненты вектора ϵ одинаково распределены и общая плотность удовлетворяет условиям регулярности, то из предположения о достаточности статистик $\Phi^T X_n$, $X_n^T X_n$ следует, что они распределены так же, как в нормальной линейной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сапожников П. Н. Алгебраические методы оптимального статистического оценивания. Пермь: ПГУ, 1997, 168 с.
2. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.

Сенатов В. В. (Москва, Россия) **Несколько замечаний об оценках скорости сходимости.**

Цель данного доклада — показать, что среди задач, связанных с оценками точности нормальной аппроксимации в центральной предельной теореме (ЦПТ), есть много нерешенных и что решение некоторых из этих задач приводит к результатам, которые сильно отличаются от традиционных (типа теоремы Берри–Эссеена).

Приводимые ниже результаты не претендуют на общность. Их, скорее, можно назвать «наблюдениями» за теми явлениями, которые могут происходить в ЦПТ. Особое внимание автора привлекают те результаты, в которых точность нормальной аппроксимации отличается от традиционной точности порядка $n^{-1/2}$, где n — число суммируемых случайных величин. Основным стимулом к решению упомянутых задач является тот факт, что точность аппроксимации, гарантируемая теоремой Берри–Эссеена, очень мала.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные действительные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Пусть F — распределение X_1 , F_n — распределение $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, Φ — нормальный закон с нулевым средним и единичной дисперсией. Мы не будем стеснять себя ограничениями на существование моментов $\alpha_k = \int x^k dF(x)$, далее предполагается, что существуют все моменты, которые нам потребуются. Иногда будет предполагаться та или иная гладкость F , например, выполнение условия Крамера $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$, где f — характеристическая функция распределения F .

Теорема Берри–Эссеена гарантирует, что

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq c\beta_3 n^{-1/2},$$

где β_3 — абсолютный третий момент F , c — постоянная. Известно, что $1/\sqrt{2\pi} < 0.4097 \leq c \leq 0.7655$.

Из нижней оценки c следует, что гарантировать $\rho(F_n, \Phi) \leq 0.001$ можно лишь при $n \geq 160\,000$. В то же время применение нормальной аппроксимации при суммировании нескольких десятков слагаемых зачастую дает хорошие результаты. Поэтому возникает вопрос о том, какая дополнительная информация о распределении F может улучшить точность нормальной аппроксимации.

Прежде всего отметим, что для одного и того же распределения F скорость стремления к нулю при $n \rightarrow \infty$ величины $\mu(F_n, \Phi)$, где μ — та или иная метрика в пространстве распределений, может быть различной. Так, для симметричного распределения Бернулли $\zeta_s(B_n, \Phi) \leq (\zeta_s(B, \Phi) + c_s \zeta_s(B, \Phi))n^{-1/2}$, $0 < s < 2$. Здесь и далее c, c_s обозначают абсолютные постоянные, ζ_s — идеальные метрики, введенные В. М. Золотаревым. Порядки этих оценок по n являются правильными при всех $0 < s < 2$.

В связи с упомянутым вопросом о дополнительной информации о распределении F приведем простую модификацию теоремы Берри–Эссеена. Для любого $n \geq 1$ величина

$$\rho(F_n, \Phi) \leq c_1 |\alpha_3| n^{-1/2} + c_2 \beta_4 n^{-1} c_3 q^n \log \frac{c_4 \sqrt{\beta_4}}{\beta_1} + c_5 \beta_1 n^{-1/2},$$

где $q = \max\{|f(t)|: 1/\sqrt{32\beta_4} \leq t \leq 1/(2\beta_1)\} < 1$, а в качестве постоянных можно взять числа $c_1 = 2/(3\sqrt{\pi})$, $c_2 = 192/\pi$, $c_3 = 2/\pi$, $c_4 = \sqrt{8}$, $c_5 = 96/(\sqrt{2\pi})$.

При оценке точности нормальной аппроксимации в ЦПТ может случиться, что тот или иной функционал от F_n стремится к величине соответствующего функционала от Φ быстрее, чем стремится к нулю величина $\rho(F_n, \Phi)$. Это явление иногда называют «сверхсходимостью». Примеры таких функционалов хорошо известны. Это, в частности, семиинварианты порядка выше третьего. Такими же функционалами являются моменты четных порядков и абсолютные моменты порядков выше третьего. Для них можно получить оценки, убывающие как n^{-1} при $n \rightarrow \infty$. Если распределение F является достаточно гладким, то аналогичный результат имеет место и для $|F_n(a) - \Phi(a)|$ при $a = \pm 1$ (и для плотностей в точках $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$).

Известно, что если F — решетчатое распределение с шагом h , то $\rho(F_n, \Phi) \geq chn^{-1/2}$, начиная с некоторого n . Пусть A_n — решетка, на которой сосредоточено распределение F_n . Оказывается, что величина

$$\delta_n = \max \left\{ \left| F_n \left(x + \frac{h}{2\sqrt{n}} \right) - \Phi \left(x + \frac{h}{2\sqrt{n}} \right) \right| : x \in A_n \right\}$$

может стремиться к нулю быстрее, чем $n^{-1/2}$. В частности, для симметричного распределения Бернулли $\delta_n \leq cn^{-1}$. В связи с этим возникает задача о количестве решений уравнения $F_n(x) = \Phi(x)$. Ответ на этот вопрос сейчас неизвестен.

В докладе рассматриваются и другие оценки точности нормальной аппроксимации, а также вопрос о точности аппроксимации F_n при помощи асимптотических разложений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 96-01-01920.

Reza Soltani A. (Shiraz, Iran), Marco Dozzi (Cedex, France) Berman's integral for stable noise.

In a series of papers Berman developed his method on the existence of a jointly continuous version of local time for a given stochastic process. The central piece of Berman's work is tackling with the integral

$$I(Q, 2m, \eta) = \int_{Q^{2m}} \int_{\mathbf{R}^{2m}} \left| \mathbf{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^{2m} \gamma^j Z(t^j) \right) \right] \right| \prod_{j=1}^{2m} |\gamma^j|^\eta d\gamma^j dt^j, \quad (1.1)$$

where $Q \subset \mathbf{R}^N$ is an interval, $m \in \mathcal{N}$ (set of natural numbers), $\eta > 0$, and $Z(t)$, $t \in \mathbf{R}^N$, is the given process. The finiteness or having a sharp bound on $I(Q, 2m, \eta)$ lead to some desirable results in the local time theory. Regardless the applications, dealing with the integral (1.1) has its own mathematical significance. The consideration of different processes creates many challenging problems. Interestingly different cases require different techniques. The LND approach which was introduced by Berman (1973) as a tool in working with (1.1) for the Gaussian processes, by itself is a deep notion in stochastics and analysis.

In the present work we assume that the process $Z(t)$ is a stable $(N, 1, \alpha)$ noise, namely, $Z(t) = Z((0, t])$ with Z being a random measure on bounded Borel sets in $\mathbf{R}^N$ with values in a Banach space of jointly symmetric α -stable random variables for which $\mathbf{E}[\exp(i\gamma Z(B))] = \exp(-c\lambda(B)|\gamma|^\alpha)$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $\alpha \in (1, 2]$; and consider the case that the rectangle Q does touch the boundary of $\mathbf{R}^{N+}$. This case was left open by Ehm (1982). We are mainly concerned with (1.1) itself rather than with its applications. Our approach leads to a new and interesting two dimensional selection procedure.

Let us present an upper bound of $I(Q, 2m, \eta)$ for the stable $(N, 1, \alpha)$ noise Z when Q does touch the boundary.

Theorem. Let Z be a stable $(N, 1, \alpha)$ noise, $1 < \alpha \leq 2$. Then for $Q = [0, v] \subset \mathbf{R}^N$ and $\eta \in [0, \alpha - 1]$,

$$I(Q, 2m, \eta) \leq [(2m)!]^{N/2} 2^{2m-1} k^{2m} [\lambda(Q)]^{2m(1-(1+\eta)/\alpha)} \left[\Gamma \left(1 + 2m \left(1 - \frac{1+\eta}{\alpha} \right) \right) \right]^{-N},$$

where $K = \max\{k_1, (\eta/\alpha)^{\eta/\alpha} k_0\}$, $K_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|y|^\alpha) |y|^{i\eta} dy$ ($i = 0, 1$).

Sztrik J. (Debrecen, Hungary) **Reliability analysis of complex communication systems.**

Consider a finite-source communication system with N heterogeneous sources and a single processor. The sources and the receiver operate in independent random environments. The environmental changes are reflected in the values of the access and service rates that prevail at any point of time. The main objective is to adapt these parameters to respond to random changes effectively and thus maintain derived level of system performance.

Source p is assumed to operate in a random environment governed by an ergodic Markov chain $(\xi_p(t), t \geq 0)$ with state space $(1, \dots, r_p)$ and with transition density matrix $(a_{i_p j_p}^{(p)}, i_p, j_p = 1, \dots, r_p, a_{i_p i_p}^{(p)} = \sum_{k \neq i_p} a_{i_p k}^{(p)})$.

Whenever the environmental process $\xi_p(t)$ is in state i_p the probability that the source generates a request in the time interval $(t, t+h)$ is $\lambda_p(i_p, \varepsilon) + o(h)$, $p = 1, \dots, N$. Each message is transmitted to a receiver where the service immediately starts if the processor is idle, otherwise a queueing line is formed. The service discipline is First-Come, First-Served (FCFS). The receiver is also supposed to operate in a random environment governed by an ergodic Markov chain $(\xi(t), t \geq 0)$ with state space $(1, \dots, r_{N+1})$ and with transition density matrix

$$\left(a_{i_{N+1} j_{N+1}}^{(N+1)}, i_{N+1}, j_{N+1} = 1, \dots, r_{N+1}, a_{i_{N+1} i_{N+1}}^{(N+1)} = \sum_{k \neq i_{N+1}} a_{i_{N+1} k}^{(N+1)} \right).$$

Whenever the environmental process $\xi_{N+1}(t)$ is in state i_p the probability that the service of message p is completed in time interval $(t, t+h)$ is $\mu_p(i_{N+1})h + o(h)$. If a given source has sent a message it stays idle and it can not generate another one. After being serviced each message immediately returns to its source which hence becomes active. All random variables involved here and the random environments are supposed to be independent of each other.

In practical applications it is very important to know the distribution of time until the receiver becomes empty, which is actually the busy period of the processor. For example, if it is a satellite, an aircraft or any flying object which needs orientation.

Let us consider the system under the assumption of «fast» arrivals, i.e., $\lambda_p(i_p, \varepsilon) \rightarrow \infty$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. For simplicity let $\lambda_p(i_p, \varepsilon) = \lambda_p(i_p)/\varepsilon$, $p = 1, \dots, N$.

Denote by $Y_\varepsilon(t)$ the number of active sources at time t , and let

$$\Omega_\varepsilon(m) = \inf \{t: t > 0, Y_\varepsilon(t) = m + 1/Y_\varepsilon(0) \leq m\},$$

that is, the instant at which the number of active sources reaches the $(m+1)$ -th level for the first time, provided that at the beginning their number is not greater than m , $m = 0, \dots, N-1$. In the following $\Omega_\varepsilon(m)$ is referred to as the time to the first system failure. In particular, for $m = N-1$ we get the case when the processor becomes idle, i.e., $\Omega_\varepsilon(N-1)$ is the busy period length of the receiver, or processor.

Denote by $\pi_0(i_1, i_2, \dots, i_N, i_{N+1}; 0; k_1, \dots, k_N)$ the steady-state probability that random environment $\xi_p(t)$ is in state i_p , $p = 1, \dots, N+1$, there is no active source and the order of arrival of messages to the processor is $(k_1, \dots, k_N)$. Similarly, denote by $\pi_0(i_1, i_2, \dots, i_N, i_{N+1}; 1; k_2, \dots, k_N)$ the steady-state probability that the p -th random

environment is in state i_p , $p = 1, \dots, N+1$, source k_1 is active and the other sources sent their messages in the order $(k_2, \dots, k_N)$. Clearly, $(k_s, \dots, k_N) \in V_N^{N-s+1}$, $s = 1, 2$, where V_N^{N-s+1} denotes the set of all variations of order $N-s+1$ of elements $1, \dots, N$.

Theorem. *For the system in question under the above assumptions, independently of the initial state, the distribution of the normalized random variable $\varepsilon^m \Omega_\varepsilon(m)$ converges weakly to an exponentially distributed random variable with parameter*

$$\Lambda = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_{N+1}=1}^{r_{N+1}} \sum_{(k_1, \dots, k_N) \in V_N^N} \pi_0(i_1, \dots, i_{N+1}; 1; k_2, \dots, k_N) \\ \times \frac{\mu_{k_2}(i_{N+1})}{\lambda_{k_1}(i_{k_1})} \times \frac{\mu_{k_3}(i_{N+1})}{\lambda_{k_1}(i_{k_1}) + \lambda_{k_2}(i_{k_2})} \times \dots \times \frac{\mu_{k_{m+1}}(i_{N+1})}{\lambda_{k_1}(i_{k_1}) + \dots + \lambda_{k_m}(i_{k_m})} \frac{1}{D},$$

where

$$D = \sum_{p=1}^{N+1} \sum_{j_p=1}^{r_p} \sum_{\substack{i_p=1 \\ i_p \neq j_p}}^{r_p} \sum_{(k_1, \dots, k_N) \in V_N^N} \pi_0(i_1, \dots, i_{N+1}; 0; k_1, \dots, k_N) \\ \times \frac{a_{i_p j_p}^{(p)}}{(\sum_{q=1}^{N+1} a_{i_q i_q}^{(q)} + \mu_{k_1}(i_{N+1}))^2}.$$

Research is partially supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research, grant OTKA T14974/95.

REFERENCES

1. Anisimov V. V. Asymptotic analysis of switching queueing systems in condition of low and heavy loading. Matrix-analytic methods in stochastic models. — Lecture Notes in Pure and Appl. Mathem., v. 183, Marcel Dekker, Inc. 1996.
2. Kovalenko I. N. Rare events in queueing systems. A survey. — Queueing Systems, 1994, v. 16, p. 1–49.
3. Sztrik J., Lukashuk L. Modelling of a communication system evolving in a random environment. — Acta Cybernetica, 1991, v. 10, p. 85–91.
4. Sztrik J., Rigo R. On a closed communication system with fast sources and operating in Markovian environments. — J. Inform. Process. Cybernet., 1993, v. 29, p. 241–246.

Учайкин В. В. (Ульяновск, Россия) **Точные решения задачи об одномерном асимметричном блуждании.**

Рассматривается одномерное блуждание частицы с постоянной скоростью v и плотностью распределения пробега ξ (до изменения направления движения) $p_1(\xi)$ при движении налево (в сторону отрицательных x) и $p_2(\xi)$ — при движении направо. В начальный момент $t = 0$ частица находится в точке $x = 0$ и с вероятностями ε_1 и ε_2 начинает движение налево или направо соответственно. Для плотности вероятности $\rho_i(x, t)$ координаты частицы, движущейся в момент времени t в i -м направлении, получено выражение

$$\rho_i(x, t) = \left(\frac{1}{v} \right) \int_0^{\xi_i(x, t)} d\xi P_i(\xi) f_i \left(x - (-1)^i \xi, t - \frac{\xi}{v} \right),$$

где $P_i(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} p_i(x) dx$, $\xi_i(x, t) = [vt + (-1)^i x]/2$, и $f_i(x, t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$f_i(x, t) = \int_0^{\xi_j(x, t)} d\xi p_j(\xi) f_j \left(x - (-1)^j \xi, t - \frac{\xi}{v} \right) + \varepsilon_i \delta(x) \delta(t), \quad j \neq i.$$

Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned}\rho_i(x, t) &= \varepsilon_1 \rho_{i1}(x, t) + \varepsilon_2 \rho_{i2}(x, t), \\ \rho_{i1}(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta F_i^{(n)}(\xi_i) p_j^{(n)}(\xi_j), \quad j \neq i, \\ \rho_{i2}(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_i^{(n+1)}(\xi_i) \Delta F_j^{(n)}(\xi_j), \quad j \neq i,\end{aligned}$$

где $p_i^{(n)}(\xi)$ — свертки плотностей, а $\Delta F_i^{(n)}(\xi) = F_i^{(n)}(\xi) - F_i^{(n+1)}(\xi)$ — разность свертков функций распределения ($F_i^{(0)}(x)$ — единичная ступенчатая функция).

Найденное представление позволяет записать решение задачи в явном виде в случаях, когда в явном виде вычисляются свертки распределений $p_i^{(n)}(\xi)$ (такие решения в работе названы точными). К их числу относятся: 1) равномерное на $[0, a_i]$ распределение, 2) плотность $p_i(\xi) = (\nu/\xi) \exp(-\xi/a_i) I_\nu(\xi/a_i)$, $a_i > 0$, 3) односторонние устойчивые распределения [1], 4) гамма распределение $p_i(\xi) = \mu_i [(\mu_i \xi)^{\nu_i-1} / \Gamma(\nu_i)] \exp(-\mu_i \xi)$, $\mu_i > 0$.

Последний случай рассмотрен подробнее. Показано, что при $\nu_i = 1$ регулярная составляющая решения имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(x, t) &= \bar{\mu} \bar{\varepsilon} I_0 \left(\tilde{\mu} \sqrt{(vt)^2 - x^2} \right) + \frac{\tilde{\mu}(vt + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x)}{2\sqrt{(vt)^2 - x^2}} I_1(\tilde{\mu} \sqrt{(vt)^2 - x^2}) \\ &\times \exp \left\{ -\bar{\mu} vt - (\mu_2 - \mu_1) \frac{x}{2} \right\},\end{aligned}$$

где $\bar{\mu} = (\mu_1 + \mu_2)/2$, $\bar{\mu} \bar{\varepsilon} = (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2)/2$, $\tilde{\mu} = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$, и удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{2\bar{\mu}v} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \frac{v}{2\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)v}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}.$$

Последнее при $\bar{\mu}v \rightarrow \infty$, $v/(2\bar{\mu}) \rightarrow D < \infty$ и $(\mu_2 - \mu_1)v/(2\bar{\mu}) \rightarrow B < \infty$ переходит в уравнение Фоккера–Планка. Другими словами, асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть решения интегральных уравнений удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка. Этот вывод справедлив и для остальных случаев, кроме 3). В случае 3) асимптотика $\tilde{\rho}$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка в дробных производных, описывающему аномальную диффузию [2]. Наличие точных решений позволяет детально проследить этот предельный переход.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 98-01-03307.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
2. Isichenko M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media. — Rev. Mod. Phys., 1992, v. 64, p. 961–1043.

Ушаков В. Г. (Москва, Россия), Ушаков Н. Г. (Черноголовка, Россия) Неравенства для характеристических функций многомерных распределений.

В работе получены новые верхние и нижние оценки для характеристических функций многомерных распределений. Оценки могут быть полезны при исследовании скорости сходимости в предельных теоремах, а также в различных задачах, связанных с устойчивостью. Ниже приводятся формулировки некоторых результатов. Доказательства полученных оценок существенно опираются на результаты работ [1], [2].

Определим $h_1(x) = (2/x^2) \ln(2/(2-x^2))$, $h_2(x) = 2(1 - \cos x)/x^2$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с плотностью распределения $p(\mathbf{x})$ и характеристической функцией $f(\mathbf{t})$. Если $\|\mathbf{X}\| \leq c$ и $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a$, то

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{2a_0}{\|\mathbf{t}\|} \sin \frac{\|\mathbf{t}\|}{2a_0} \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2c}$$

и

$$|f(\mathbf{t})| \leq \frac{4a_0 c}{\pi} \sin \frac{\pi}{4a_0 c} \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2c},$$

где $a_0 = \pi^{(m-1)/2} c^{m-1} / \Gamma((m+1)/2) a$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{3\pi^2 a_0^2} \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2c}$$

и

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{1}{12a_0^2 c^2} \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2c}.$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с характеристической функцией $f(\mathbf{t})$ и ковариационной матрицей Σ . Предположим, что выполнено условие $\|\mathbf{X}\| \leq c$.

Тогда $|f(\mathbf{t})| \leq 1 - h_2(a) \mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}' / 2$ для любого $a \in [0, \pi/4]$ при $\|\mathbf{t}\| \leq a/c$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с характеристической функцией $f(\mathbf{t})$ и ковариационной матрицей Σ . Если распределение $\|\mathbf{X}\|$ симметрично, и $\mathbf{E}\|\mathbf{X}\|^4 < \infty$, то

$$1 - \frac{\mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}'}{2} \leq f(\mathbf{t}) \leq 1 - \frac{\mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}'}{2} + \frac{\mathbf{E}\|\mathbf{X}\|^4}{24} \|\mathbf{t}\|^4$$

при всех $\|\mathbf{t}\| \in \mathbf{R}^m$.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с характеристической функцией $f(\mathbf{t})$ и ковариационной матрицей Σ . Тогда $|f(\mathbf{t})| \geq 1 - \mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}' / 2$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^m$.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с характеристической функцией $f(\mathbf{t})$. Если $\beta_1 = \mathbf{E}\|\mathbf{X}\| < \infty$, то $\Re f(\mathbf{t}) \geq 1 - \beta_1 \|\mathbf{t}\|$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^m$.

Теорема 6. Пусть $F(\mathbf{x})$ — m -мерная функция распределения с характеристической функцией $f(\mathbf{t})$ и ковариационной матрицей Σ . Тогда $|f(\mathbf{t})| \geq \exp\{-h_1(a) \mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}' / 2\}$ для любого $a \in (0, \sqrt{2})$ и всех $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^m$, удовлетворяющих условию $\mathbf{t} \Sigma \mathbf{t}' \leq a^2$.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с плотностью распределения $p(\mathbf{x})$ и характеристической функцией $f(\mathbf{t})$, и пусть δ — произвольное действительное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \delta \leq 1$. Если $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a < \infty$ и $\mathbf{E}g(\|\mathbf{X}\|) < \infty$, то

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3}{3\pi^2 a_0^2} \|\mathbf{t}\|^2 \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| \leq \frac{\pi}{2c}$$

и

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3}{12a_0^2 c^2} \quad \text{при } \|\mathbf{t}\| > \frac{\pi}{2c},$$

где $c = g^{-1}(\mathbf{E}g(\|\mathbf{X}\|)/\delta)$ и $a_0 = [\pi^{(m-1)/2} c^{m-1} / \Gamma((m+1)/2)] a$.

Следствие. Пусть $\mathbf{X}$ — m -мерный случайный вектор с плотностью распределения $p(\mathbf{x})$ и характеристической функцией $f(\mathbf{t})$, и пусть δ — произвольное действительное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \delta \leq 1$. Предположим, что $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m} p(\mathbf{x}) \leq a < \infty$ и $\mathbf{E}\|\mathbf{X}\|^\alpha < \infty$ ($\alpha > 0$) и обозначим $\gamma_\alpha = \min_{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m} \mathbf{E}\|\mathbf{X} - \mathbf{b}\|^\alpha$. Тогда

$$|f(\mathbf{t})| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 \delta^{2(m-1)/\alpha} [\Gamma((m+1)/2)]^2}{3\pi^{m+1} \gamma_\alpha^{2(m-1)/\alpha} a^2} \|\mathbf{t}\|^2$$

при $\|t\| \leq (\pi/2) (\delta/\gamma_\alpha)^{1/\alpha}$ и

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{(1-\delta)^3 \delta^{2m/\alpha} [\Gamma((m+1)/2)]^2}{12\pi^{m-1} \gamma_\alpha^{2m/\alpha} a^2}$$

при $\|t\| > (\pi/2) (\delta/\gamma_\alpha)^{1/\alpha}$.

Теорема 8. Пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$ — m -мерный случайный вектор с плотностью распределения $p(x)$, характеристической функцией $f(t)$ и ковариационной матрицей Σ . Если $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} p(x) \leq a$, то

$$|f(x)| \leq \frac{9[\Gamma((m+1)/2)]^2 \|t\|^2}{2^{m+8} \pi^{m+1} a^2 (\sigma^2)^{m-1}} \quad \text{при } \sqrt{t\Sigma t'} \leq \frac{\pi}{4}$$

и

$$|f(x)| \leq \frac{9[\Gamma((m+1)/2)]^2 \|t\|^2}{2^{m+12} \pi^{m-1} a^2 (\sigma^2)^{m-1} (t\Sigma t')} \quad \text{при } \sqrt{t\Sigma t'} > \frac{\pi}{4}, \text{ где } \sigma^2 = E\|X\|^2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 97-01-00273, 98-01-00621, 98-01-00926 и ИНТАС-РФФИ, грант IR-97-0537.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков Н. Г. Некоторые неравенства для характеристических функций одновершинных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 3, с. 606–609.
2. Ushakov N. G. Lower and upper bounds for characteristic functions. — J. of Math. Sciences, 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.

Ушакова А. П. (Черноголовка, Россия), **Ушаков В. Г.** (Москва, Россия) **Об устойчивости характеристики распределением любой порядковой статистики.**

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с абсолютно непрерывным распределением и пусть $X'_{r:n}$ обозначает r -ю порядковую статистику. В работе [1] показано, что распределение $X'_{r:n}$ характеризует (однозначно определяет) распределение X_1 . В этой статье мы доказываем устойчивость этой характеристики в равномерной метрике, а также получаем верхние и нижние оценки устойчивости.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ и $Z_1, \dots, Z_n$ — две совокупности независимых одинаково распределенных в каждой совокупности абсолютно непрерывных случайных величин $X'_{r:n}$ и $Z'_{r:n}$, $1 \leq r \leq n$, — соответствующие r -е порядковые статистики. Обозначим функции распределения случайных величин $X_1, Z_1, X'_{r:n}, Z'_{r:n}$ через $F(x), G(x), F^{(r)}(x), G^{(r)}(x)$ соответственно.

Теорема 1. Если $\sup_x |F^{(r)}(x) - G^{(r)}(x)| \leq \varepsilon \leq 1$, то

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq c(n, r) \cdot \varepsilon^{1/\max(r, n-r+1)},$$

где

$$c(n, r) = \max \left(\left[\frac{r!(n-r)!}{n!} \right]^{1/r} 2^{(n-r)/r}, \left[\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!} \right]^{1/(n-r+1)} 2^{(r-1)/(n-r+1)} \right).$$

Следствие. Если $\sup_x |F^{(r)}(x) - G^{(r)}(x)| \leq \varepsilon \leq 1$, то

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq 2^{n-1} \varepsilon^{1/n}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — класс всех абсолютно непрерывных функций распределения. Для $F(x) \in \mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{A}_r(F, \varepsilon)$ класс абсолютно непрерывных функций распределения $G(x)$, удовлетворяющих условию $\sup_x |F^{(r)}(x) - G^{(r)}(x)| \leq \varepsilon$.

Теорема 2. Для любой функции распределения $F(x) \in \mathcal{A}$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{G \in \mathcal{A}_r(F, \varepsilon)} \sup_x |F(x) - G(x)| \geq c_0(n, r) \varepsilon^{1/\max(r, n-r+1)},$$

где $c_0(n, r) = \min([r!(n-r)!/n!]^{1/r}, [(r-1)!(n-r+1)!/n!]^{1/(n-r+1)})$.

Теорема 3. Для любой функции распределения $F(x) \in \mathcal{A}$

$$\sup_{G \in \mathcal{A}_r(F, \varepsilon)} \sup_x |F(x) - G(x)| \geq 1 - \left(1 - \frac{(r-1)!(n-r)!}{(n-1)!} \varepsilon\right)^{1/n}.$$

З а м е ч а н и е. Порядок по ε оценки в теореме 3 хуже, чем в теореме 2. Однако константа несколько лучше. Таким образом, оценка теоремы 3 иногда может оказаться более точной.

Доказательство теорем 1–3 опирается на результаты следующих двух лемм.

Положим

$$I_{n,r}^{(1)}(y) = \int_0^y t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \quad I_{n,r}^{(2)}(y) = \int_{1-y}^1 t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt.$$

Лемма 1. Для любого $0 < y < 1$ и всех $r = 1, \dots, n$ справедливы следующие неравенства:

$$y \geq [r I_{n,r}^{(1)}(y)]^{1/r}, \quad y \geq [(n-r+1) I_{n,r}^{(2)}(y)]^{1/(n-r+1)}.$$

Если $2 \leq r \leq n-1$, то $y \geq 1 - (1 - n I_{n,r}^{(i)}(y))^{1/n}$, $i = 1, 2$.

Лемма 2. Если $0 < y \leq \frac{1}{2}$, то $y \leq r^{1/r} 2^{(n-r)/r} [I_{n,r}^{(i)}(y)]^{1/r}$, $i = 1, 2$.

Если $\frac{1}{2} < y < 1$, то

$$y \leq 2^{(r-1)/(n-r+1)} (n-r+1)^{1/(n-r+1)} [I_{n,r}^{(i)}(y)]^{1/(n-r+1)}, \quad i = 1, 2.$$

Мы доказали (и оценили) устойчивость восстановления распределения случайной величины по распределению порядковых статистик для равномерной метрики. В других метриках устойчивость может и не иметь места. Например, легко построить пример, когда «локальная» устойчивость (устойчивость для плотностей распределения) не имеет места.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson N. L., Kotz S. Characterization of an absolutely continuous distribution by the distribution of any order statistic. — Indian J. of Math., 1990, v. 32, № 2, p. 193–194.

Ушакова А. П. (Черноголовка, Россия), Ушаков В. Н. (Москва, Россия)
Оценка устойчивости восстановления мультипликативного нормального типа.

Пусть $F(x)$ — функция распределения. Множество функций распределения вида $F((x-a)/b)$, $-\infty < a < \infty$, $b > 0$, называется типом (полным типом) распределения F . Множества функций распределения вида $F(x-a)$, $-\infty < a < \infty$ и $F(x/b)$, $b > 0$, называются соответственно аддитивным и мультипликативным типами распределения F .

При достаточно широких условиях на распределение F мультипликативный тип распределения F однозначно определяется распределением инвариантной статистики вида

$$\mathbf{X} = \left(\log \left| \frac{X_1}{X_n} \right|, \operatorname{sgn} X_1, \dots, \log \left| \frac{X_{n-1}}{X_n} \right|, \operatorname{sgn} X_{n-1} \right), \quad (1)$$

причем данная характеристика обладает, по крайней мере, слабой устойчивостью (см. [2], [4]). В данной работе получена количественная оценка устойчивости восстановления мультипликативного нормального типа по распределению инвариантной статистики (1). Зависимость оценки от n не исследуется, поэтому мы предполагаем, что объем выборки, при котором однозначное восстановление возможно, минимален, т.е. $n = 3$. Разумеется, оценка справедлива и для всех $n \geq 3$. Проблема получения количественных оценок устойчивости восстановления типов рассматривалась ранее в работах [1], [3], [5]–[10].

Итак, пусть X_1, X_2, X_3 — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а Z_1, Z_2, Z_3 — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальную функцию распределения $G(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{(t-a)^2/(2\sigma^2)} dt$. Рассмотрим случайные векторы

$$\mathbf{X} = \left(\log \left| \frac{X_1}{X_3} \right|, \operatorname{sgn} X_1, \log \left| \frac{X_2}{X_3} \right|, \operatorname{sgn} X_2 \right)$$

и

$$\mathbf{Z} = \left(\log \left| \frac{Z_1}{Z_3} \right|, \operatorname{sgn} Z_1, \log \left| \frac{Z_2}{Z_3} \right|, \operatorname{sgn} Z_2 \right).$$

Обозначим их функции распределения $F_0(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $G_0(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Имеет место следующая

Теорема. Пусть $F(a) = \frac{1}{2}$, где $a = \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x)$, $F(x)$ абсолютно непрерывна, и ее плотность $p(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$c = \min \left\{ \int_0^{\infty} x p(x) dx + \sup_{x>0} x p(x), \int_{-\infty}^0 |x| p(x) dx + \sup_{x<0} |x| p(x) \right\} < \infty.$$

Если

$$\int_{\mathbf{R}^4} (1 + |x_1| + |x_3|) \left| d(F_0(x_1, x_2, x_3, x_4) - G_0(x_1, x_2, x_3, x_4)) \right| \leq \varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

то $\inf_{b>0} \sup_x |F(x/b) - G(x)| \leq c_1 \varepsilon^{1/3} \log(c_2/\varepsilon)$, где c_1 и c_2 — абсолютные постоянные.

Основную роль в доказательстве теоремы играет следующая лемма.

Лемма. Пусть X и Z — случайные величины, причем Z имеет стандартное нормальное распределение, а функция распределения $F(x)$ случайной величины X абсолютно непрерывна с плотностью $p(x)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$1) F(0) = \frac{1}{2},$$

$$2) c = \min \left\{ \int_0^{\infty} x p(x) dx + \sup_{x>0} x p(x), \int_{-\infty}^0 |x| p(x) dx + \sup_{x<0} |x| p(x) \right\} < \infty.$$

Обозначим

$$f_L(t_1, t_2) = \mathbb{E} \exp\{t_1 \log |X| + t_2 \operatorname{sgn} X\}, \quad g_L(t_1, t_2) = \mathbb{E} \exp\{t_1 \log |Z| + t_2 \operatorname{sgn} Z\}$$

(характеристические функции случайных векторов $(\log |X|, \operatorname{sgn} X)$ и $(\log |Z|, \operatorname{sgn} Z)$ соответственно).

Если

$$\sup_{-\infty < t_1 < \infty, t_2 \in \{0, \pi/2\}} |f_L(t_1, t_2) - g_L(t_1, t_2)| \leq \varepsilon < 1,$$

то $\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq a_1 \varepsilon \log(a_2/\varepsilon)$, где a_1 и a_2 — абсолютные постоянные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 97-01-00273, 97-01-621, 98-01-00926 и ИНТАС-РФФИ, грант IR-97-0537.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каган А. М., Клебанов Л. Б.* Об оценке устойчивости в задаче восстановления аддитивного типа распределения. — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1976, т. 61, с. 68–74.
2. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
3. *Клебанов Л. Б.* Еще раз об оценке устойчивости в задаче восстановления аддитивного типа распределения. — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, т. 87, с. 74–78.
4. *Прозоров Ю. В.* Характеризация класса распределений по распределению некоторых статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, № 3, с. 479–487.
5. *Зингер А. А.* К вопросу оценки устойчивости в задачах восстановления типа распределения. — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, т. 87, с. 7–17.
6. *Золотарев В. М.* Об эффекте устойчивости в задачах восстановления для аддитивного и полного типов. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, № 3, с. 451–453.
7. *Hohlov Yu. S.* On stability estimation of certain characterization of the exponential distribution. — Lectures Notes in Math., 1983, v. 982, p. 32–37.
8. *Ushakova A. P.* Estimates of the characterization stability of additive types of distributions. — J. of Math. Sciences, 1998, v. 89, № 5, p. 1582–1589.
9. *Ushakova A. P.* Estimates of stability reconstruction of the exponential type. — J. of Math. Sciences. (В печати.)
10. *Ushakova A. P., Ushakov V. N.* On stability estimation in the problem of reconstructing symmetric types of distributions. — J. of Math. Sciences. (В печати.)

Хохлов Ю. С. (Тверь, Россия) **Многомерная задача Гнеденко при операторной нормировке.**

В пятидесятые годы Б. В. Гнеденко была поставлена задача описания класса G_r предельных распределений для нормированных сумм случайных величин, распределения которых принадлежат некоторому конечному множеству распределений. Решение этой задачи было получено В. М. Золотаревым и В. С. Королуком (1961) для $r = 2$ и А. А. Зингером [1] для $r \geq 3$. Мы рассматриваем аналогичную задачу для случайных векторов в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями в $\mathbf{R}^d$, распределения $\mathcal{L}(X_n)$ которых принадлежат конечному множеству $\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, $r \geq 2$, распределений в $\mathbf{R}^d$. Образует нормированные суммы

$$S_n^* = A_n^{-1}(X_1 + \dots + X_n) + c_n, \quad (1)$$

где A_n — невырожденные линейные операторы в $\mathbf{R}^d$, а $c_n \in \mathbf{R}^d$. Пусть имеет место слабая сходимость

$$\mathcal{L}(S_n^*) \Rightarrow \mu. \quad (2)$$

Обозначим через G_r класс всех предельных распределений μ в схеме (1)–(2). Очевидно, что любое распределение μ из G_r является безгранично делимым. Такое распределение определяется канонической тройкой (a, C, L) , где $a \in \mathbf{R}^d$, C — ковариационный оператор, а L — спектральная мера Леви. Аналогично тому, как это сделано в одномерном случае (см. [1]), можно показать, что существуют невырожденный линейный оператор A и такие вещественные числа $\beta_0, \dots, \beta_r$, что

$$\beta_0 A^r(L) + \beta_1 A^{r-1}(L) + \dots + \beta_r L = 0, \quad (3)$$

где $A(L)(E) := L(A^{-1}(E))$. Так как A — невырожденный линейный оператор, то его можно представить в виде t_0^B , где $t_0 > 0$, B — некоторый линейный оператор. Оператор A можно выбрать таким образом, что B имеет собственные значения z_j , вещественные части которых положительны. З. Юрек (1984) показал, что в $\mathbf{R}^d$ существует такое скалярное произведение, при котором функция $t \rightarrow \|t^B x\|$ является

стро́го мо́нотонной для любого $x \in \mathbf{R}^d$, $x \neq 0$. Тогда имеет место полярное разложение для любого $x \in \mathbf{R}^d$: $x = t^B q$, где $t > 0$, $q \in Q := \{x \in \mathbf{R}^d: \|x\| = 1\}$.

Основным результатом нашего сообщения является следующая

Теорема. Пусть L есть спектральная мера Леви некоторого распределения $\mu \in G_r$, удовлетворяющая уравнению (3). Тогда справедливо следующее представление $L(E) = - \int_Q \int_0^\infty I_E(t^B q) dh(q, s) \lambda(dq)$, где λ — ограниченная борелевская мера на Q , $h(q, s)$ — некоторая невозрастающая функция от s при фиксированном $q \in Q$. Более того,

$$h(q, s) = \sum_{k=1}^l h_k(q, s), \quad l \leq r,$$

и

$$h_k(q, s) = s^{-\alpha_k} \left[a_{k0}(q) + \sum_{m=1}^{p_k} \left(a_{km}(q) \cos(\omega_{km} \ln s) + b_{km}(q) \sin(\omega_{km} \ln s) \right) \right],$$

где константы $0 < \alpha_k < 2 \min\{\operatorname{Re} z_j\}$ и $\omega_{km} > 0$ не зависят от q и определяются коэффициентами $\beta_0, \dots, \beta_r$ уравнения (3), $1 + \sum_{k=1}^l 2p_k \leq r$.

Аналогичный результат можно получить для случайных элементов со значениями в односвязной нильпотентной группе Ли N , если предположить, что распределения $\nu_1, \dots, \nu_r$ коммутативны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зингер А. А. Об одном классе предельных распределений для нормированных сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 4, с. 672–692.

Чичагов В. В. (Пермь, Россия) **О схеме редких событий для однородной цепи Маркова.**

Наблюдается однородная цепь Маркова (ОЦМ) ζ_n с дискретным временем $n = 0, 1, \dots$, конечным множеством состояний $\kappa = \{1, 2, \dots, k\}$, начальным распределением $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ и матрицей переходных вероятностей за один шаг $\Theta(\varepsilon) = \|\theta_{i,j}(\varepsilon)\|_1^k$. Как в [1] наблюдение ОЦМ осуществляется до момента ее ℓ -го перехода на множестве $IJ \subset \kappa \times \kappa$. Переход ОЦМ на множестве IJ происходит при совершении ею перехода из состояния i в состояние j для $(i, j) \in IJ$.

У1. Элементы матрицы $\Theta(\varepsilon)$ являются непрерывными функциями малого параметра ε на $[0; \varepsilon_*)$.

У2. $\theta_{i,j}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; $\theta_{i,j}(\varepsilon) > 0$ для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $(i, j) \in IJ$.

У3. Матрица $\Theta(\varepsilon)$ является регулярной для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$; при $\varepsilon = 0$ она имеет единственный неподвижный вероятностный вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$.

Ниже для этой схемы редких событий приводятся результаты, определяющие асимптотическое поведение вектора чисел выходов ОЦМ ζ_n и вектора времен пребывания полумарковского процесса (ПМП), порожденного этой цепью. Впервые, по-видимому, подобная задача была поставлена в работе [2]. В. В. Анисимовым в [3] исследовано асимптотическое поведение времени пребывания ПМП в связном и асимптотически связном подмножестве состояний. Насколько известно автору, эти результаты наиболее близки по форме к содержанию данной работы. С иных позиций схема редких событий исследовалась в [4] и [5].

Далее $P(\varepsilon) = \|p_{i,j}(\varepsilon)\|_1^k$, где $p_{i,j}(\varepsilon) = 0$ для $(i, j) \in IJ$ и $p_{i,j}(\varepsilon) = \theta_{i,j}(\varepsilon)$ для $(i, j) \notin IJ$; $Q(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon) - P(\varepsilon)$; $\mathbf{Z}(\ell) = (Z_1(\ell), \dots, Z_k(\ell))$, где $Z_j(\ell)$ — число выходов ОЦМ ζ_n из состояния j до момента остановки.

Теорема 1. Пусть $\gamma(\varepsilon) = \mathbf{a}(I - P(\varepsilon))^{-1} \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — вектор-столбец размерности k , все компоненты которого единицы, I — единичная матрица порядка

к. Тогда, если выполнены условия У1–У3, то распределение случайного вектора $\gamma^{-1}(\varepsilon)Z(\ell)$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к распределению с характеристической функцией $h_Z(u) = [1 - i \cdot (p, u)]^{-\ell}$, $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbf{R}^k$.

Следствие 1. Пусть $p_1 > 0$; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, V — случайный вектор с обобщенной плотностью распределения

$$f_V(v_1, \dots, v_k) = \frac{v_1^{\ell-1}}{p_1^{\ell}(\ell-1)!} \cdot e^{-v_1/p_1} \prod_{j=2}^k \delta\left(v_j - \frac{p_j}{p_1} v_1\right), \quad v_1 \geq 0.$$

Тогда $\gamma^{-1}(\varepsilon)Z(\ell)$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к V .

Следствие 2. Пусть $p > 0$. Тогда для $[b; d] = \cap_{j=1}^k [b_j; d_j]$, $0 \leq b \leq d$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \left\{ \bigcap_{j=1}^k \left[b_j \leq \frac{Z_j(\ell)}{p_j \gamma(\varepsilon)} \leq d_j \right] \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \left\{ b \leq \frac{Z_j(\ell)}{p_j \gamma(\varepsilon)} \leq d \right\} = \int_b^d \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{-x} dx.$$

Следствие 3. Пусть $0 \leq c_j < \infty \quad \forall j \in \kappa$, $\lambda = (c_1 p_1 + \dots + c_k p_k)^{-1} < \infty$. Тогда при $0 \leq b \leq d$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \left\{ b \leq \sum_{j=1}^k c_j \frac{Z_j(\ell)}{\gamma(\varepsilon)} \leq d \right\} = \int_b^d \frac{\lambda^{\ell} x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{-\lambda x} dx.$$

Рассмотрим теперь $\xi(t)$, $t \geq 0$, — ПМП с множеством состояний κ , заданный описанной выше ОЦМ ζ_n и набором независимых в совокупности одинаково распределенных при одном и том же j случайных величин $\{\eta(j, r), r = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, k\}$, где $\eta(j, r)$ — время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии j с момента r -го попадания до момента выхода из него. Остановка этого процесса происходит после l -го перехода вложенной ОЦМ на множестве IJ . Следуя ходу доказательства теоремы 2.2.1 [6] и используя следствие 1, приходим к утверждению.

Теорема 2. Пусть $\{\eta_{\varepsilon}(j, r)\}_{r=1}^{Z_j(\ell)}$ — последовательность случайных величин, полученная из случайных величин $\{\eta(j, r)\}_{r=1}^{Z_j(\ell)}$ путем их одинаковой нормировки при одном и том же j , причем случайная величина $S_{m(\varepsilon)}(j) = \sum_{r=1}^{m(\varepsilon)} \eta_{\varepsilon}(j, r)$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к распределению с характеристической функцией $h_j(u_j)$, $u_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, k$, $m(\varepsilon)$ — целая часть числа $\gamma(\varepsilon)$. Тогда, если выполнены условия У1–У3, то при $p > 0$ распределение случайного вектора $S_{Z(\varepsilon)} = (S_{Z_1(\varepsilon)}(1), \dots, S_{Z_k(\varepsilon)}(k))$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к распределению с характеристической функцией

$$h_S(u) = \int_0^{\infty} \prod_{j=1}^k [h_j(u_j)]^{p_j x} \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{-x} dx, \quad u \in \mathbf{R}^k.$$

Теорема 2 далее используется для нахождения асимптотического распределения вектора времен пребывания ПМП в каждом из состояний.

Численные расчеты на модельных примерах показали приемлемую точность полученных в работе асимптотических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чичагов В. В. Асимптотическое поведение времени первого достижения в схеме марковских случайных блужданий. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Перм. ун-т. Пермь, 1982, с. 183–189.
2. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний. — Украинский матем. журнал, 1965, т. 17, № 3.
3. Анисимов В. В., Закусило О. К., Донченко В. С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. К.: Вища школа, 1987, 248 с.

4. Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. М.: Сов. Радио, 1980, 209 с.
5. Соловьев А. Д. Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе. — Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, т. 6, с. 79–89.
6. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 269 с.

Chuprunov A. (Kazan, Russia) **Functional limit theorems for sums of i.i.d. random variables with replacements.**

We will denote by $\xrightarrow{d}$ the convergence in distribution.

Let I_A denote the indicator of an event A and $k_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, be such that $k_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Let $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ and $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$ be probability spaces. Let $\mathbf{E}_1$ be the expectation with respect to $\mathbf{P}_1$.

Let $C_b(\mathbf{R}^+)$ be the spaces of bounded continuous functions defined on $\mathbf{R}^+$.

Throughout the paper, $m \in \mathbf{N}$ will be fixed, $A_{ij} = A_{ij}(n) \in \mathfrak{A}_1$, $i, j, n \in \mathbf{N}$, will be events which are independent for all $n \in \mathbf{N}$, and $\mathbf{P}_1(A_{ij}(n)) = p_j(n) = p_j$ for all $i \in \mathbf{N}$. Let $I_{ij} = I_{ij}(n) = I_{A_{ij}(n)}(\omega_1)$, $\omega_1 \in \Omega_1$. We will suppose that $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_1 I_{11}(n) I_{21}(n) \cdots I_{[k_n x]1}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_1(n) p_2(n) \cdots p_{[k_n x]}(n) = f(x)$, for all $x \in \mathbf{R}^+$ and f is a continuous function.

(Y) Let $Y_n, Y_{n1}, n, 1 \leq n, 1 \leq n$, be an array of random variables defined on $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ which are independent and identically distributed in each string and $\sum_{i=1}^{k_n} Y_{ni} \xrightarrow{d} \gamma_D$, $n \rightarrow \infty$, where $\gamma(\sigma)$ is a centered Gaussian random variable with the variance σ^2 . Let $W_D(x)$, $x \in \mathbf{R}^+$, be a homogeneous infinitely divisible random process such that $W_D(1) = \gamma_D$.

(Y') Let $Y'_n, Y'_{n1}, 1 \leq n, 1 \leq n$, be an array of independent and identically distributed in each string random variables defined on $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ such that $Y'_{n1}, Y_{n1}, 1 \leq n, 1 \leq n$, are independent random variables for all $n \in \mathbf{N}$ and $\sum_{i=1}^{k_n} Y'_{ni} \xrightarrow{d} \gamma(\sigma')$, $n \rightarrow \infty$. Let the random processes W and W' be independent Wiener processes.

We start with the summands $Y_{n1}, 1 \leq 1 \leq k_n$, and in each step, in the random way, we change Y_{n1} to $Y'_{n1}, 1 \leq 1 \leq k_n$. More precisely, let

(X2)

$$\begin{aligned}
 X_0^{(1n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} Y_{ni}, \\
 X_1^{(1n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{11}(n) Y_{ni} + \sum_{i=1}^{k_n} (1 - I_{11}(n)) Y'_{ni}, \\
 X_2^{(1n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{11}(n) I_{21}(n) Y_{ni} + \sum_{i=1}^{k_n} (1 - I_{11}(n) I_{21}(n)) Y'_{ni}, \\
 &\vdots \\
 X_k^{(1n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{11}(n) I_{21}(n) \cdots I_{k1}(n) Y_{ni} + \sum_{i=1}^{k_n} (1 - I_{11}(n) I_{21}(n) \cdots I_{k1}(n)) Y'_{ni}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

We will consider the following random processes: $Z_{1n}(x) = Z_{1n}(\omega_1)(x) = X_{[k_n x]}^{(1n)} + \{[k_n x]\} X_{[k_n x]+1}^{(1n)}$, $x \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}$, $\omega_1 \in \Omega_1$.

Theorem 1. One has $Z_{1n}(\omega_1) \xrightarrow{d} W_{f\sigma\sigma'}, n \rightarrow \infty$ in $C_b(\mathbf{R}^+)$ for almost all $\omega_1 \in \Omega_1$, where $W_{f\sigma\sigma'}(x) = \sigma W(f(x)) + \sigma'(W'(1) - W'(f(x)))$, $x \in \mathbf{R}^+$.

Consider the case of a replacement on a nonrandom number of random variables. Let

$$\begin{aligned}
(X3) \quad X_0^{(2n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} Y_{ni}, \\
X_1^{(2n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{1i}(n) Y_{ni} + \sum_{i=k_n+1}^{k_n+m} Y'_{ni}, \\
X_2^{(2n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{1i}(n) I_{2i}(n) Y_{ni} + \sum_{i=k_n+1}^{k_n+m} I_{2i}(n) Y'_{ni} + \sum_{i=k_n+m+1}^{k_n+2m} Y'_{ni}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
X_{k_n}^{(2n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} I_{1i}(n) I_{2i}(n) \cdots I_{k_n i}(n) Y_{ni} \\
&+ \sum_{j=1}^{k_n-1} \sum_{i=k_n+(j-1)m+1}^{k_n+jm} I_{(j+1)i}(n) I_{(j+2)i}(n) \cdots I_{(k_n)i}(n) Y'_{ni} + \sum_{i=(k_n-1)m+1}^{k_n m} Y_{ni}.
\end{aligned}$$

We will consider the following random processes $Z_{2n}(x) = Z_{2n}(\omega_1)(x) = X_{[k_n x]}^{(2n)} + \{[k_n x]\} X_{[k_n x]+1}^{(2n)}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega_1 \in \Omega_1$.

Theorem 2. Let $P(A_{ij}(n)) = 1 - m/k_n$ for all $i, j \in \mathbb{N}$. Then we have $Z_{2n}(\omega_1) \xrightarrow{d} W_{1\sigma\sigma'}(x)$, $n \rightarrow \infty$ in $C[0, 1]$ for almost all $\omega_1 \in \Omega_1$, where $W_{1\sigma\sigma'}(x) = \sigma W(e^{-mx}) + \sigma' W'(1 - e^{-mx})$, $x \in [0, 1]$.

Also we will consider some analogs of Theorem 1 and Theorem 2 for another replacements and for random step lines, in Skorokhod spaces.

Шоргин С. Я. (Москва, Россия) **Гарантированные оценки вероятности разорения и допустимых страховых ставок в классической модели риска с факторизуемыми исками.**

Автором введена [1] так называемая факторизационная модель (Ф-модель) индивидуального страхового иска, суть которой изложена в определениях 1–3.

О п р е д е л е н и е 1. Случайный страховой иск (т.е. сумма всех страховых выплат по некоторому договору страхования (д.с.)) Y удовлетворяет *факторизационной модели* (Ф-модели), если на том же вероятностном пространстве, что и случайная величина (с.в.) Y , определены случайные величины S (*страховая сумма*) и X (*относительный иск*), такие, что с.в. S строго положительна, $Y \leq S$, с.в. X неотрицательная и невырождена, с.в. S и X некоррелированы и $Y = SX$. Будем называть случайный иск Y , удовлетворяющий Ф-модели, *факторизуемым*. Случайные величины S, X называются в этом случае *компонентами* факторизуемого случайного иска Y .

Рассмотрим страховой портфель, т.е. произвольное множество исков (страховых договоров) $\{Y_j\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Страховой портфель $\{Y_j\}$ называется *портфелем однородных факторизуемых исков*, если

1) все иски портфеля факторизуемы;

2) все случайные векторы $\{(S_j, X_j)\}$ независимы в совокупности и одинаково распределены.

О п р е д е л е н и е 3. Величина $z \in (0, 1)$ называется *страховой ставкой* для некоторого портфеля однородных факторизуемых исков, если страховые премии (взносы страхователя) Z_j для всех страховых договоров, входящих в этот портфель, определяются по формуле $Z_j = zS_j$.

При этом подходе, очевидно, страховая премия Z_j и страховая выплата Y_j по определенному договору страхования оказываются зависимыми случайными величинами.

Основные полученные до сих пор результаты, связанные с исследованием Ф-модели, относятся к так называемой модели индивидуального риска (статической модели страхования; см. [1]–[2]).

Рассмотрим вопрос о внесении идеи факторизуемых исков в динамическую модель страхования (классическая модель риска). Напомним, что классическая модель риска (КМР) Лундберга–Крамера записывается формально следующим образом:

$$R(t) = r + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, \quad (1)$$

где $R(t)$ — остаток средств страховой компании (surplus), r — начальный капитал, c — коэффициент, характеризующий процесс поступления премий, $N(t)$ — точечный процесс моментов выплат, Y_j ($j = 1, 2, \dots$) — сумма, выплачиваемая в j -й момент скачка процесса $N(t)$.

Пусть $\{T_j\}$ — последовательность длин случайных интервалов между очередными выплатами. При этом величина $R(t)$ в моменты выплат $\{t_j = T_1 + \dots + T_j\}$ может быть записана как

$$R(t_j) = R(t_{j-1}) - (Y_j - cT_j), \quad (2)$$

где $j = 1, 2, \dots$, $t_0 = 0$, $R(t_0) = r$.

Будем в дальнейшем использовать обозначение $R_j = R(t_j)$. В промежутках между моментами $\{t_j\}$ функция $R(t)$ в рамках этой модели является линейно возрастающей.

Одним из путей обобщения представления (1)–(2) является изучение вместо (2) представления

$$R_j = R_{j-1} - U_j, \quad (3)$$

где $j = 1, 2, \dots$, $R_0 = r$, а с.в. U_j имеет смысл разности величины выплаты в момент t_j и суммы поступивших за время $(t_{j-1}, t_j]$ премий. Этот подход позволяет рассматривать более общие, чем линейная детерминированная функция ct , процессы поступления премий; кроме того, при этом не нужно делать никаких предположений о распределении процесса $\{t_j\}$.

В частности, именно этот подход дает возможность «внесения» в КМР идеи факторизации исков. Однако при этом мы сталкиваемся с существенными трудностями: если под процессом t_j понимается точечный процесс моментов выплат по *отдельным* договорам страхования, с.в. U_j и $R_j = R(t_j)$ оказываются для ситуации факторизуемых исков зависимыми, так как, с одной стороны, U_j зависит от страховой суммы S по договору, для которого выплата произошла в момент t_j , однако при этом «в состав» величины R_{j-1} может входить премия по этому же договору, естественно, также зависящая от S . Независимость с.в. U_j и R_{j-1} достигается в ситуации факторизуемых исков, очевидно, лишь в том случае, если в сумму R_{j-1} входят только премии по договорам, «не имеющим отношения» к выплате в момент t_j .

Для достижения независимости с.в. U_j и R_{j-1} в [2] предложено рассмотреть несколько видоизмененную модель — так называемую дискретную динамическую модель (ДДМ) страхования (изучавшуюся ранее, в частности, в [3]). В рамках этой модели в качестве процесса $\{t_j\}$ моментов «уменьшения» величины $R(t)$ рассматриваются не моменты выплат по отдельным д.с., а некоторые, вообще говоря, «более редкие» моменты времени, относительно которых существует соглашение, что все выплаты, которые следовало произвести на интервале $(t_{j-1}, t_j]$, «откладываются» до момента t_j , при этом действие всех имеющихся договоров прекращается в каждый из таких моментов. Пусть количество д.с., заключаемых между моментами t_{j-1} и t_j ,

равно N_j ; предполагается, что с.в. $\{N_j, j = 1, 2, \dots\}$ независимы в совокупности и не зависят от компонент всех рассматриваемых случайных исков $\{Y_j\}$.

Обозначим точечный процесс, описывающий остаток средств страховщика в моменты $\{t_j\}$, символом $\{R_j^*\}$; в рамках ДДМ этот процесс может быть формально записан следующим образом:

$$R_j^* = R_{j-1}^* - U_j, \quad (4)$$

где $j = 1, 2, \dots$, $R_0^* = r$, U_j — сумма разностей величин выплат и поступивших премий по д.с., заключенным (и завершенным) между моментами t_{j-1} и t_j , т.е. $U_j = \sum_{i=1}^{N_j} \nu_i$, $\nu_i = Y_i - Z_i$.

Отметим, что остаток средств страховщика $R^*(t)$ в этой модели в промежутках между моментами $\{t_j\}$ является кусочно-постоянной функцией.

В [2] получены с использованием неравенства Лундберга (в той его модификации, которая относится к ДДМ [3]) оценки вероятности разорения $\psi^*(r, z) = \mathbf{P}\{\inf_{t \geq 0} R^*(t) \geq 0\}$ и допустимой страховой ставки $z_0^* = \inf\{z: \psi^*(r, z) \geq 1 - Q\}$, где Q — заданная вероятность разорения.

Поставим теперь задачу таким образом: получить в рамках классической модели (3) гарантированные верхние оценки вероятности разорения страховщика и допустимой страховой ставки. Для этого вместо процесса $R(t)$ рассмотрим некоторый вспомогательный процесс $\tilde{R}(t)$, отличающийся от $R(t)$ тем, что премия по каждому заключаемому договору не включается в $\tilde{R}(t)$ вплоть до момента осуществления страховой выплаты по данному договору или момента истечения срока действия этого договора без страховой выплаты (предполагается, что по каждому договору страхования происходит не более одной страховой выплаты).

Предположим, что $t_j, j = 1, 2, \dots$, — последовательность моментов завершения действия договоров страхования для данного страхового портфеля. Будем полагать рассматриваемый страховой портфель портфелем однородных факторизуемых исков.

Для удобства записей будем считать, что $Y_j = S_j X_j$ — страховой иск, относящийся к тому д.с., действие которого завершилось в момент t_j .

Описанный выше вспомогательный процесс

$$\tilde{R}_j = \tilde{R}_{j-1} - \nu_j, \quad (5)$$

где $j = 1, 2, \dots$, $\tilde{R}_0 = r$, $\nu_j = Y_j - Z_j$.

Отметим, что величины $\tilde{R}_{j-1}$ и ν_j независимы. При этом очевидно, что $\tilde{R}(t) \leq R(t)$ с вероятностью 1. Тем самым вероятность разорения $\tilde{\psi}(r, z) = \mathbf{P}\{\inf_{t \geq 0} \tilde{R}(t) \geq 0\}$ для процесса $\tilde{R}(t)$ заведомо не ниже, чем вероятность разорения $\psi(r, z) = \mathbf{P}\{\inf_{t \geq 0} R(t) \geq 0\}$ для процесса $R(t)$, а страховая ставка, обеспечивающая заданную вероятность разорения Q , для $\tilde{R}(t)$ заведомо выше, чем для $R(t)$: $\tilde{z}_0 \geq z_0$, где $\tilde{z}_0 = \inf\{z: \tilde{\psi}(r, z) \geq 1 - Q\}$, $z_0 = \inf\{z: \psi(r, z) \geq 1 - Q\}$.

Нетрудно видеть, что процесс $\{\tilde{R}_j\}$, задаваемый формулой (5), является частным случаем процесса страхового риска для ДДМ (4) $\{R_j^*\}$ при $N_j = 1$ с вероятностью 1. Тем самым оказывается, что дискретная динамическая модель может быть использована для построения гарантированных оценок для таких характеристик классической модели, как вероятность разорения страховщика и допустимая страховая ставка.

Пусть $E(x) = (e^x - 1 - x)/x$; при $x = 0$ доопределим функцию $E(x)$ по непрерывности значением $E(0) = 0$. Функция $E(x)$ строго монотонно возрастает при $x \geq 0$. Значит, функция $G(y)$, обратная функции $E(x)$, однозначно определена при всех $y \geq 0$.

Пусть $\mathbf{E}X_1 = A$, $\mathbf{D}X_1 = B^2$, $\mathbf{E}S_1 = \mu$, $\mathbf{D}S_1/\mu^2 = V^2$.

Пусть $d = z - A$; предположим, что $z \geq A$, т.е. $d \geq 0$. Пусть $h = \mu d$, $g^2 = \mu^2[V^2 d^2 + (1 + V^2)B^2]$, $\rho = r/\mu$.

Предположим, что существует такая постоянная C , что $S \leq C$ с вероятностью 1.

Пусть $\omega = Ch/(h^2 + g^2)$ и

$$q = q(r) = C \left[\mu E \left(\frac{C}{r} \ln \frac{1}{1-Q} \right) \right]^{-1}.$$

Исходя из проведенных выше рассуждений и результатов [2], получаем следующий результат

Теорема. В приведенных условиях вероятность разорения в модели (3) при $A \leq z < 1$ удовлетворяет неравенству

$$\psi(r, z) \leq \tilde{\psi}(r, z) \leq \exp \left(-\frac{G(\omega)r}{C} \right);$$

для любого фиксированного значения Q , $0 < Q < 1$, в случае, если выполняется условие $q > (1 + V^2)[(1 - A)^2 + B^2](1 - A)^{-1}$, имеют место неравенства $z_0 \leq \tilde{z}_0 \leq A + d' < 1$, где $d' = 2(1 + V^2)B^2\{\rho q + [\rho^2 q^2 - 4(1 + V^2)^2 B^2]^{1/2}\}^{-1}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00271) и Российского гуманитарного научного фонда (грант 97-02-02235).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шоргин С. Я. Асимптотические оценки оптимальных страховых тарифов в условиях вариации страховых сумм. — Обзор. прикл. и промышл. матем., 1997, т. 4, в. 1, с. 124–156.
2. Шоргин С. Я. Верхние оценки оптимальных страховых тарифов в условиях вариации страховых сумм. — Обзор. прикл. и промышл. матем., 1998, т. 5, в. 1, с. 147–172.
3. Beard R. E., Pentikainen T., Pessonen E. Risk Theory. London: Chapman and Hall, 1978.

Yamazato M. (Ruku, Japan) On storage processes.

1. Introduction. Let $\{A(t)\}$ be a subordinator with $A(0) = 0$ and $E(e^{-\theta A(t)}) = \exp \int_0^\infty t(e^{-\theta y} - 1) \nu(dy)$ for $\theta \geq 0$, where ν is a Lévy measure satisfying $0 < \int_0^\infty (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$. Let r be a function defined on $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ to $\mathbf{R}_+$, $r(0) = 0$, $r(x) > 0$ for $x > 0$ and left continuous with positive right limits on $(0, \infty)$. We roughly say that a stochastic process is a storage process if it satisfies the following stochastic integral equation:

$$X(t) = x - \int_0^t r(X(s)) ds + A(t). \quad (1.1)$$

Refer [1] for precise definition and construction. The storage processes are known to be Hunt processes.

We discuss the properties of semigroups corresponding to the storage processes and give recurrence criteria.

2. Semigroups corresponding to storage processes. Let $T_t f(x) = E_x f(X(t))$. Let C_0 be the class of continuous functions on $\mathbf{R}_+$ vanishing at infinity.

Theorem 2.1. Assume that (1) $\int_1^\infty [r(y)]^{-1} dy = \infty$ and (2) $\nu(\mathbf{R}_+) < \infty$ or r is non-decreasing. Then $\{T_t\}$ is a C_0 -strongly continuous nonnegative contraction semigroup.

Let G be a generator of $\{T_t\}$ and let $D(G)$ be its domain. Let D_1 be the class of $f \in C_0$ with derivatives f' such that $rf' \in C_0$ and $(rf')(0) = 0$.

Theorem 2.2. Assume that $\nu(\mathbf{R}_+) < \infty$ and $\int_1^\infty [r(y)]^{-1} dy = \infty$. Then $D(G) = D_1$ and

$$Gf(x) = -r(x)f'(x) + \int_0^\infty \{f(x+z) - f(x)\} \nu(dz) \quad (2.1)$$

for $x \geq 0$, $f \in D(G)$.

Let $D_2 = \{f \in D_1: f' \text{ is bounded}\}$.

Theorem 2.3. Suppose that r is nondecreasing and $\int_1^\infty [r(y)]^{-1} dy = \infty$. Then, D_2 is a core for G and $Gf(x)$ has the representation (2.1) for $f \in D_2$.

3. Recurrence classification of storage processes. Let τ_y be the hitting time for $[0, y]$.

Theorem 3.1. The storage processes are classified into the following three types:

(a) For all $x > y > 0$, $0 < \mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} < 1$.

(b) For all $x > y > 0$, $\mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} = 1$ but $\mathbf{E}_x(\tau_y) = \infty$.

(c) For all $x > y > 0$, $\mathbf{P}_x\{\tau_y < \infty\} = 1$. For some y and for all $x > y$, $\mathbf{E}_x(\tau_y) < \infty$.

We say that a storage process is transient, null recurrent or positive recurrent according as (a), (b) or (c) holds, respectively. Null or positive recurrent process is said to be a recurrent process.

Theorem 3.2. If, for some $c > 0$,

$$\int_c^\infty \frac{\nu(x, \infty)}{r(x)} dx = \infty \quad (3.1)$$

and

$$\int_c^\infty \frac{1}{r(x)} \exp \left\{ - \int_c^x \frac{\nu(y, \infty)}{r(y)} dy \right\} dx < \infty, \quad (3.2)$$

then $\{X(t)\}$ is transient.

Remark 3.1. If $r(x) = cx$, $c > 0$, then the necessary and sufficient condition for transience is the following [2]:

$$\int_0^1 z^{-1} \exp \left\{ - \int_z^1 \frac{\tilde{\nu}(y)}{r(y)} dy \right\} dz < \infty, \quad (3.3)$$

where $\tilde{\nu}(y) = \int_1^\infty (1 - e^{-yx}) \nu(dx)$. It can be shown that (3.2) is equivalent to (3.3) without the assumption (3.1).

Theorem 3.3. Assume that $\inf_{x \geq 1} r(x) > 0$. If there is $c > 0$ such that

$$\int_c^x \frac{\nu(x-y, \infty)}{r(y)} dy \leq 1$$

for all $x \geq c$, then $\{X(t)\}$ is recurrent.

Remark 3.2. It is shown in [1] that (3.1) for some $c > 0$ is a necessary and sufficient condition for non-positive recurrence, provided that r is nondecreasing.

REFERENCES

1. Brockwell P. J., Resnick S. I., Tweedie R. L. Storage processes with general release rule and additive inputs. — Adv. Appl. Prob., 1982, v. 14, p. 392–433.
2. Shiga T. A recurrence criterion for Markov processes of Ornstein-Uhlenbeck type. — Probab Theory Rel. Fields, 1990, v. 85, p. 425–447.

Янушкявичюс Р. (Вильнюс, Литва) Об устойчивости одной теоремы А. А. Зингера.

А. А. Зингер [1] отмечает, что из условия независимости соответствующих статистик можно вывести некоторые уравнения для характеристических функций исходных случайных величин $X_1, \dots, X_n$. Эти уравнения, как правило, имеют сложный характер и для их решения очень важно использовать различные аналитические свойства распределений случайных величин $X_1, \dots, X_n$.

Так, например, в работах [2] и [3] доказывается существование моментов $X_1, \dots, X_n$ в случае независимости линейной формы и полинома при условии существования степенного момента какого-нибудь положительного порядка δ . А. А. Зингер [4] показал, что это условие излишне и обобщил этот результат для произвольных полиномиальных статистик.

Теорема Зингера. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, а S_1 и S_2 — две полиномиальные статистики,

$$S_1 = S_1(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n},$$

$$S_2 = S_2(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n \leq l} B_{\beta_1 \dots \beta_n} X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n}.$$

Если статистики S_1 и S_2 независимы, то каждая из случайных величин X_j ($j = 1, \dots, n$) имеет конечные моменты всех порядков.

В формулировке теоремы очевидным предполагается исключение из рассмотрения тривиальных случаев. Если, например, $S_1 = X_1$ и $S_2 = X_2$ и известно лишь, что X_1, X_2 независимы, то, разумеется, никаких выводов относительно моментов случайных величин X_1 и X_2 мы сделать не можем. Поэтому при формулировке теоремы можно добавить, что для любого $j = 1, 2, \dots, n$ должны существовать такие $\alpha_j \neq 0$ и $\beta_j \neq 0$, что $A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \neq 0$, $B_{\beta_1 \dots \beta_n} \neq 0$.

Теорема Зингера, сформулированная для полиномиальных статистик, допускает обобщение на более широкий класс так называемых квазиполиномиальных статистик, включающий в себя и некоторые разрывные статистики (см. [1], [4]).

В задачах устойчивости, естественно, возникают не менее сложные (по сравнению с самими характеристизационными задачами) уравнения. Поэтому извлечение дополнительной информации о свойствах исходных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ при исследовании устойчивости характеристик позволяет порой существенно улучшить порядок количественной оценки устойчивости. Рассмотрим соответствующий пример.

Первая оценка устойчивости характеристики нормального закона независимостью выборочного среднего $\bar{X}$ и выборочной дисперсии S^2 была получена Хоанг Хыу Ньы. В своей работе [5] он первым рассмотрел дифференциальное уравнение

$$f''(t) f^{k-1}(t) - f'^2(t) f^{k-2}(t) + D f^k(t) = R(t) \quad (1)$$

для характеристической функции $f(t)$, $f(t) = \mathbb{E} \exp(itX_j)$, причем $|R(t)| \leq \varepsilon$ в некотором интервале $|t| \leq T$, а D — некоторый параметр. Уравнение (1), однако, Хоанг Хыу Ньы рассматривал лишь при дополнительных моментных ограничениях

$$\mathbb{E} X_j = 0, \quad \mathbb{E} X_j^2 = 1, \quad \mathbb{E} |X_j|^{2+\delta} \leq M_\delta < \infty. \quad (2)$$

Существенное продвижение в рассматриваемом вопросе принадлежит Ю. Р. Габовичу. В своей статье [8] он отказался от моментных ограничений (2). Основой для такого продвижения явилась сформулированная выше теорема Зингера.

Однако следует отметить, что Ю. Р. Габовичем использовались ограничения на класс рассматриваемых случайных величин. Это были ограничения типа неутечки существенной вероятностной массы в бесконечность, а также ограничения типа невырожденности в нуле.

Автору настоящего замечания удалось отказаться от этих ограничений и упростить само доказательство Ю. Р. Габовича.

Говоря об уравнении (1), предложен новый подход к его анализу. А именно, предлагается использовать масштабирование исходных случайных величин и строгий учет вероятностной массы в нуле. Предлагаемый подход (см. [7]) позволяет отказаться от таких конструкций, используемых Ю. Р. Габовичем, как сглаживание, дифференцирование остаточных членов и т.п.

При всей полезности теоремы Зингера для построения характеристик нормального распределения, эта теорема, на наш взгляд, имеет и самостоятельный интерес. В самом деле, в теореме Зингера характеризуется класс случайных векторов, компоненты которых имеют конечные моменты всех порядков.

Аналогично, устойчивость этой теоремы полезна не только для построения оценки устойчивости характеристик нормальных распределений, но и имеет самостоятельный интерес.

Перед формулировкой задачи устойчивости теоремы Зингера полезно вспомнить понятие ε -сети в метрическом пространстве ([8], гл. II, § 7).

О п р е д е л е н и е. Пусть M — некоторое множество в метрическом пространстве R и ε — некоторое положительное число. Множество A из R называется ε -сетью для M , если для любой точки $x \in M$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$ такая, что $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

Теперь задачу устойчивости теоремы Зингера можно сформулировать следующим образом:

Найти такую ε -сеть $\{X_j^{N(\varepsilon)}\}$, чтобы статистики $S_1(X_1^{N_1(\varepsilon)}, \dots, X_n^{N_n(\varepsilon)})$ и $S_2(X_1^{N_1(\varepsilon)}, \dots, X_n^{N_n(\varepsilon)})$ являлись почти независимыми, а любой элемент этой ε -сети обладал свойством $E|X_j^{N(\varepsilon)}|^r \leq M_r$ для любого $r > 0$.

В статье автора [9] такая сеть найдена для случая характеристики Гнеденко, т.е., для случая $S_1 = L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$, $S_2 = L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$.

Элементы этой ε -сети $\{X_j^{N_j}\}$ имеют следующий вид:

$$X_j^{N_j} = \begin{cases} N_j, & \text{если } X_j > N_j, \\ X_j, & \text{если } |X_j| \leq N_j, \\ -N_j, & \text{если } X_j < -N_j, \end{cases}$$

где $N_1 = N$, $n_2 = NM$, если $|a_1/a_2| = M := \max\{|a_1/a_2|, |b_1/b_2|\}$ и $N_1 = NM$, $N_2 = N$, если $|a_1/a_2| \neq M$. Здесь $N = 3(\log_2(1/\varepsilon))^{\log_2 3}$.

Однако решение задачи устойчивости теоремы Зингера для произвольных полиномиальных статистик S_1 и S_2 автору этих строк неизвестно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зингер А. А. Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1958, т. III, № 3, с. 265–284.
2. Линник Ю. В. О полиномиальных статистиках в связи с аналитической теорией дифференциальных уравнений. — Вестник ЛГУ, 1956, т. 1, с. 35–48.
3. Chanda K. On some moment properties when two polynomials have independent distributions. — Calcutta Stat. Assoc. Bull., 1955, v. 6, № 4, p. 40–48.
4. Зингер А. А. О независимости полиномиальных и квазиполиномиальных статистик. — Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 319–322.
5. Хоанг Хыу Ньы. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормальной совокупности. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, № 2, с. 308–314.
6. Габович Ю. Р. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, № 2, с. 374–382.
7. Yanushkevichius R. Stability for characterizations of distributions. Vilnius: Mokslas Publishers, 1991.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
9. Yanushkevichius R. About almost independent linear statistics. — Lietuvos matem. rink., 1996, v. 36, № 3, p. 322–329.