Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, О вероятностных и моментных неравенствах для супермартингалов и мартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 2, 391–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 08:14:13

9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
10. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 264 с.
11. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982, 256 с.

Поступила в редакцию

02.VIII.2004

Исправленный вариант

27.V.2005

© 2006 г.

НАГАЕВ С. В.*

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ И МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ И МАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказывается вероятностное неравенство для $\max_{k \leq n} S_k$, где $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ в предположении, что последовательность S_k , $k = \overline{1, n}$, образует супермартингал. Неравенство формулируется в терминах вероятностей $P(X_j > y)$ и условных дисперсий случайных величин X_j , $j = \overline{1, n}$. В качестве простого следствия выводится известное моментное неравенство Буркхольдера. Даются численные оценки постоянных в неравенстве Буркхольдера.

Ключевые слова и фразы: математическое ожидание, мартингал, неравенство Буркхольдера, неравенства Бернштейна и Беннета-Хёфдинга, неравенство Розенталя, неравенство Фука, сепарабельное банахово пространство, супермартингал, фильтрованное вероятностное пространство.

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть последовательность случайных величин S_k , $k \geq 1$, образует супермартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}, P)$ с $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, т.е.

$$E\{S_k | \mathcal{F}_{k-1}\} \leq S_{k-1}.$$

Положим $X_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 0$. Определим случайные величины σ_k^2 равенствами

$$\sigma_k^2 = E\{X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}.$$

Обозначим

$$B_k^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \quad \bar{X}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k, \quad A_t = \sum_{j=1}^n E|X_j|^t.$$

Определим

$$Q(x) = P(\bar{X}_n > x) + P(B_n > x).$$

Вероятностным неравенствам для мартингалов и семимартингалов посвящено довольно много работ, начиная с классических результатов Дуба (см. [1]).

В 1969 г. Стейгер [2] вывел для $\bar{S}_n$ неравенство типа Беннета-Хёфдинга при условии, что $|X_i| < L_i < \infty$, $\sigma_i^2 \leq b_i^2 < \infty$, где L_i и b_i^2 — некоторые постоянные.

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, Университетский пр., 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01252) и INTAS (код проекта 03-51-5018).

Верхние оценки для $P(\bar{S}_n > y)$, обобщающие соответствующие неравенства из [3], были получены в 1973 г. Фуком [4] в предположении, что для некоторой последовательности $(y_k)_{k \geq 1}$, $y_k > 0$,

$$E\{X_k^2(y_k) | \mathcal{F}_{k-1}\} < d_k^2, \quad E\{(X_k^+)^t(y_k) | \mathcal{F}_{k-1}\} < a_k, \quad (1)$$

где d_k^2 и a_k постоянные, $t > 2$,

$$X_k(y) = \begin{cases} X_k, & X_k \leq y, \\ 0, & X_k > y, \end{cases}, \quad X_k^+(y) = \max[0, X_k(y)].$$

Эти условия могут показаться слишком ограничительными. Однако выяснилось, что они выполняются, в частности, для мартингала

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^n X_j\right\| \middle| \mathcal{F}_k\right\},$$

где X_j — независимые случайные величины со значениями в сепарабельном банаховом пространстве, $\mathcal{F}_k$ — σ -алгебра, порожденная случайными величинами $X_1, X_2, \dots, X_k$, если при этом $E\|X_j\|^t < \infty$, $j \in \overline{1, n}$ (см. по этому поводу [5]–[7]).

Если мартингал S_n не удовлетворяет условиям Фука, то при определенных ограничениях можно этого добиться с помощью подходящего преобразования $f(S_n)$. Применительно к критическому процессу Гальтона–Ватсона это делается в [8].

Хойслер [9] получил следующее обобщение одного из неравенств Фука: для любых $x, u, v > 0$

$$P(\bar{S}_n > x) < \sum_{i=1}^n P(X_i > u) + P(B_n > v) + P_0(x, u, v), \quad (2)$$

где

$$P_0(x, u, v) = \exp\left(\frac{x}{u} \left(1 - \ln\left(\frac{xu}{v^2}\right)\right)\right).$$

В [10] этот результат переносится на мартингалы с непрерывным временем. В статье [11] P_0 заменяется на

$$P_1(x, u, v) = \exp\left(\frac{x}{u} - \left(\frac{v^2}{u^2} + \frac{x}{u}\right) \ln\left(\frac{xu}{v^2} + 1\right)\right). \quad (3)$$

Неравенство (2) используется в [9] для оценки скорости сходимости в функциональной предельной теореме для мартингалов с дискретным временем. Аналогичным образом используются вероятностные неравенства, полученные в [10] и [11].

В статье Пинелиса [12] даются обобщения неравенств Бернштейна и Беннета–Хёфдинга на мартингалы со значениями в банаховом пространстве. Применительно к обычным мартингалам условия Пинелиса содержат ограничение $B_n^2 < c < \infty$. В работе [13] одно из неравенств Фука, содержащее нормальную компоненту, переносится на банахово пространство в предположении, что

$$E\|X_j\|^3 < \infty, \quad j \in \overline{1, n}.$$

При этом на условные вторые моменты накладывается ограничение того же типа, что и у Фука. Обобщения неравенств Бернштейна и Беннета–Хёфдинга получены также в [14]–[18]. Вероятности больших отклонений S_n изучались в [19] при условии $\max_{1 \leq k \leq n} E|X_k|^t < \infty$.

В настоящей работе получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $0 < \gamma \leq 1$ и t удовлетворяет условию $t \geq \max(e^6, e^4/\gamma^2)$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(\bar{S}_n > x) < c(t, \gamma) x^{-t} \int_0^x Q(\varepsilon_t u) u^{t-1} du, \quad (4)$$

где $\varepsilon_t = \ln t - 2 \ln \ln t / (2t)$, $c(t, \gamma) = 2e^{6\gamma t} / \gamma$.

Если $\varepsilon_t = \eta/t$, $\eta > 0$, то неравенство (4) справедливо для всех $t > 0$ с заменой $c(t, \gamma)$ на $c_1(t, \eta) = te^{3\eta\alpha(\eta)} / \eta\alpha(\eta)$, где $\alpha(\eta) = e^{\eta+1}$.

Заметим, что

$$\frac{1}{x^t} \int_0^x Q(\varepsilon_t u) u^{t-1} du = \int_0^1 Q(\varepsilon_t s x) s^{t-1} ds,$$

а значит правая часть (4) убывает по x .

Оценка (4) обобщает неравенство в теореме 4 статьи [3] (см. также [21, теорема 1.10]). По форме неравенство (4) близко к основному неравенству работы [23]. Метод доказательства аналогичен тому, что использовался в работах [20]–[24].

Естественно возникает вопрос, как теорема 1 соотносится с неравенством Хойслера (2). Поскольку неравенства (2) и (4) сильно отличаются по форме, сравнивать их непросто. В работе [25] показано, что (4) не является следствием (2). Аналогичные рассуждения показывают, что нельзя посредством неравенства Хойслера вывести неравенство Буркхольдера (8), которое является обобщением неравенства Розенталя [26].

Доказательство теоремы 1, содержащееся в первоначальном варианте статьи, опубликовано в [25]. В предлагаемом варианте оно усовершенствовано, а именно, из прежнего текста выделены два утверждения, которые делают изложение более прозрачным. Впрочем, последние имеют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. При всех $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 1$ выполняется неравенство

$$f(x + \alpha y) < f(x) e^{\alpha(1 - \ln \alpha)} + Q(y), \quad (5)$$

где $f(x) = P(\bar{S}_n \geq x)$.

Предложение 2. Если функция $f(x)$ не возрастает и при всех $x > 0$, $y > 0$, $\alpha > 1$ удовлетворяет неравенству (5), то для любых $\alpha > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$f(x) < \frac{\omega(\alpha, \varepsilon)}{x^{s(\alpha, \varepsilon)}} \int_0^x Q(\varepsilon u) u^{s(\alpha, \varepsilon)-1} du,$$

где $s(\alpha, \varepsilon) = \alpha(\ln \alpha - 1)/(\varepsilon(1 + \alpha\varepsilon))$, $\omega(\alpha, \varepsilon) = (\alpha\varepsilon)^{-1} e^{3\alpha(\ln \alpha - 1)}$.

Из теоремы 1 без труда выводятся моментные неравенства, аналогично тому, как это делается для независимых случайных величин (см. по этому поводу [20]–[23]).

Действительно, умножая обе части неравенства (4) для $t+1$ на tx^{t-1} и интегрируя по x от 0 до ∞ , мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Для любых t и γ таких, что $t > \max(e^6, e^2/\gamma^2) - 1$, $0 < \gamma \leq 1$,

$$\mathbf{E}\{\bar{S}_n^t; \bar{S}_n \geq 0\} < c(t+1, \gamma) \varepsilon_{t+1}^{-t} (\bar{D}_t + \mathbf{E}B_n^t), \quad (6)$$

где $\bar{D}_t = \mathbf{E}\{\bar{X}_n^t; \bar{X}_n \geq 0\}$. Если $\varepsilon_t = \eta/t$, то неравенство (6) верно для всех $t > 0$ с заменой $c(t+1, \gamma)$ на $c_1(t+1, \eta)$.

Если $(S_k)_{k \geq 1}$ — мартингал, то неравенства следствия 1 остаются справедливыми для $\mathbf{E}\{\tilde{S}_n^t; \tilde{S}_n \leq 0\}$, где $\tilde{S}_n = \min_{1 \leq k \leq n} S_k$, с заменой $\bar{D}_t$ на $\bar{D}_t = \mathbf{E}\{|X_n|^t; \min_{1 \leq k \leq n} X_k < 0\}$. Суммируя неравенства для $\mathbf{E}\{\bar{S}_n^t; \bar{S}_n \geq 0\}$ и $\mathbf{E}\{\tilde{S}_n^t; \tilde{S}_n < 0\}$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть S_n — мартингал. Тогда для любых $t > 0$ и $\eta > 0$

$$\mathbf{E}\hat{S}_n^t < c_t(\eta)(D_t + 2\mathbf{E}B_n^t), \quad (7)$$

где $\hat{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $D_t = \mathbf{E}(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^t)$, $c_t(\eta) = c_1(t+1, \eta)((t+1)/\eta)^t$.

Если $t > \max(e^6, e^4/\gamma^2) - 1$, $0 < \gamma \leq 1$, то неравенство (7) верно с постоянной $c'_t(\gamma) = c(t+1, \gamma) \varepsilon_{t+1}^{-t}$.

Возводя обе части неравенства (7) в степень $1/t$, имеем для $t \geq 1$

$$\mathbf{E}^{1/t} \hat{S}_n^t < \hat{c}_t(D_t^{1/t} + 2^{1/t} \mathbf{E}^{1/t} B_n^t), \quad (8)$$

где $\hat{c}_t = c_t^{1/t}(\eta)$. Если $t > e^6 \vee e^4/\gamma^2$, то в качестве $\hat{c}_t$ можно взять $(c'_t(\gamma))^{1/t}$. Последнее неравенство было получено Буркхольдером [27] без явного выражения для постоянной $\hat{c}_t$.

Хитченко [28] показал, что

$$\mathbf{E}\widehat{S}_n^t < K \frac{t}{\ln t} (D_t^{1/t} + \mathbf{E}^{1/t} B_n^t), \quad (9)$$

где K — абсолютная постоянная (см. также [29]).

В связи с неравенством (9) представляет интерес оценка величины

$$K_t = \frac{\mathbf{E}^{1/t} \{\bar{S}_n^t; S_n \geq 0\}}{\bar{D}_t^{1/t} + \mathbf{E}^{1/t} B_n^t} \frac{\ln t}{t}.$$

Полагая в (8) $\widehat{c}_t = (c'_t(\gamma))^{1/t}$, мы приходим к оценке

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} K_t \leq 2e^{6\gamma}.$$

Поскольку γ может быть сделано сколь угодно малым, мы вправе утверждать, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} K_t \leq 2. \quad (10)$$

В [30] показано, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{c}_t((\ln t)/t) = 1/e$, если X_k — независимые симметрично распределенные случайные величины.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку

$$\mathbf{P}(\bar{X}_n > x) \leq \sum_1^n \mathbf{P}(X_j > x), \quad (11)$$

можно заменить $\bar{D}_t$ в неравенстве (6) на $A_t^+ = \sum_1^n \mathbf{E}\{X_j^t; X_j \geq 0\}$. Соответственно в неравенстве (7) можно заменить D_t на A_t , делая его тем самым ближе по форме к неравенству Розенталя [26]. Точные оценки в неравенстве Розенталя для $\mathbf{E}S_n^{2k}$, где S_n — сумма независимых случайных величин с нулевым средним, даются в [31]. Подробный обзор моментных неравенств для мартингалов содержится в [32].

В формулируемой ниже теореме 2 даются оценки для K_t при $t > 2$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{2,76}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(t+1) - \ln t + \ln \ln t + 1,39, \\ g_2(t) &= \frac{3,694}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(t+1) - \ln t + \ln \ln t + 1,064, \\ g_3(t) &= \frac{1,74}{\ln t - 1,1} - \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(\ln t - 2,86) + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(t+1) \\ &\quad - \ln t + \ln \ln t + 0,57 \left(1 + \frac{1}{t}\right) + \frac{0,57}{t} (2,86 - \ln t) \end{aligned}$$

при $\ln t > 2,86$ и $g_3(t) = \infty$ при $\ln t \leq 2,86$.

Теорема 2. Для любого $t > 2$

$$K_t < g(t) := \min_{1 \leq j \leq 3} e^{g_j(t)}. \quad (12)$$

Очевидно, $g_2(t) - g_1(t) = 0,934/t - 0,326$. Отсюда $g_1(t) < g_2(t)$ при $t < t_0 = \frac{0,934}{0,326} \approx 2,865$ и $g_1(t) > g_2(t)$ при $t > t_0$. Заметим, что

$$g'_1(t) = \frac{1}{t \ln t} - \frac{\ln(t+1) + 2,76}{t^2} = t^{-2} \left(\frac{t}{\ln t} - \ln(t+1) - 2,76 \right).$$

Функция $t/\ln t$ убывает при $2 < t < e$. Поэтому при $2 < t < e$

$$g'_1(t) < g'_1(2) = 4^{-1} \left(\frac{2}{\ln 2} - \ln 2 - 2,76 \right) < 0.$$

При $e < t < 3$ функция $t/\ln t$ возрастает. Следовательно, для этих значений t

$$g_1'(t) < 4^{-1} \left(\frac{3}{\ln 3} - \ln 2 - 2,76 \right) < 0.$$

Таким образом, мы показали, что функция $g_1(t)$ убывает на интервале $(2, 3)$. Отсюда

$$g_1(t) \wedge g_2(t) < g_1(2) = g_1(2) \wedge g_2(2).$$

Функция $g_2(t)$ убывает при $t < t_1 \approx 20,1$. При $t > t_1$ она возрастает, но очень медленно. Например, $g_2(10^8) \approx 3,977$. Функция $g_3(t)$ убывает в области $t > e^{2,86} \approx 17,46$, причем $g_3(t) > g_2(t)$ для $t < t_2 \approx 49,94$ и $g_3(t) < g_2(t)$ для $t > t_2$.

Таким образом,

$$K_t < \begin{cases} e^{g_1(t)}, & 2 < t < 3, \\ e^{g_2(t)}, & 3 \leq t < t_2, \\ e^{g_3(t)}, & t > t_2. \end{cases}$$

Заметим, что $g_3(t_2) < g_2(50) \approx 2,6 < g_2(4) \approx 2,94$.

Из сказанного, в частности, вытекает

Следствие 3. *Имеют место оценки*

$$\sup_{2 < t < 3} K_t \leq e^{g_1(2)} \approx 29, \quad \sup_{3 \leq t < 4} K_t \leq e^{g_2(3)} \approx 23,1, \quad \sup_{t \geq 4} K_t \leq e^{g_2(4)} \approx 18,9.$$

Нетрудно видеть, что $g_3(t) \rightarrow 0,57$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\limsup_{t \rightarrow \infty} K_t \leq e^{0,57} < 1,77$.

Близкие оценки в случае, когда X_i независимы, получены в [33], а также в [34].

Теорема 1 позволяет оценивать $\mathbf{E}\{G(\bar{S}_n); \bar{S}_n \geq 0\}$ для более широкого класса функций, нежели степенные. Мы приведем один из возможных результатов такого рода.

Следствие 4. *Пусть дифференцируемая функция $G(x)$ с $G(0) = 0$ удовлетворяет условию: существуют $t > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любых $x > y > 0$*

$$\frac{G'(x)}{x^{t-2}} < \alpha \frac{G'(y)}{y^{t-2}}.$$

Тогда для любого $\eta > 0$

$$\mathbf{E}\{G(\bar{S}_n); \bar{S}_n \geq 0\} < \alpha c_1(t, \eta) \left(\mathbf{E}\{G(\epsilon_t^{-1} \bar{X}_n); \bar{X}_n \geq 0\} + \mathbf{E}G(\epsilon_t^{-1} B_n) \right), \quad (13)$$

где $\epsilon_t = \eta/t$.

В самом деле, в силу второго утверждения теоремы 1

$$\mathbf{E}\{G(\bar{S}_n); \bar{S}_n \geq 0\} < c_2(t, \eta) \int_0^\infty \left(x^{-t} \int_0^x Q(\epsilon_t u) u^{t-1} du \right) G_1'(u) dx \equiv c_2(t, \eta) I_t.$$

Меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^\infty u^{t-1} Q(\epsilon_t u) \left(\int_u^\infty x^{-t} G'(x) dx \right) du < \alpha \int_0^\infty Q(\epsilon_t u) G'(u) du \\ &= -\alpha \int_0^\infty G(u) dQ(\epsilon_t u) = \alpha (\mathbf{E}\{G(\epsilon_t^{-1} \bar{X}_n); \bar{X}_n \geq 0\} + \mathbf{E}G(\epsilon_t^{-1} B_n)). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений следует нужный нам результат.

Неравенство типа (13) выведено в [27] при менее жестких ограничениях на функцию G .

2. Доказательство предложения 1. Для любых положительных t, s, y, C имеет место неравенство (см. [25, лемма 4])

$$P(\bar{S}_n > t + s + y) < P(\bar{S}_n > t)P_1(s, y, C) + P(B_n > C) + P(\bar{X}_n > y),$$

где $P_1(s, y, C)$ определено равенством (3). Полагая в этом неравенстве $s = (\alpha - 1)y$, $C = y$, имеем $P(\bar{S}_n > t + \alpha y) < P(\bar{S}_n > t)P_1((\alpha - 1)y, y, y) + Q(y)$. Нетрудно видеть, что

$$P_1((\alpha - 1)y, y, y) = e^{\alpha - 1 - \alpha \ln \alpha} \leq e^{\alpha(1 - \ln \alpha)}.$$

Чтобы закончить доказательство, остается подставить эту оценку в правую часть предыдущего неравенства.

3. Доказательство предложения 2. Пусть β — любое положительное число. Рассмотрим последовательность

$$y_m = (1 + \alpha\varepsilon)^m \beta, \quad m \geq 1. \quad (14)$$

Заметим, что

$$y_m - y_{m-1} = \alpha\varepsilon y_{m-1}. \quad (15)$$

Полагая в (5) $x = y_{m-1}$, $y = \varepsilon y_{m-1}$, имеем при $m > 1$

$$f(y_m) < f(y_{m-1})p + Q(\varepsilon y_{m-1}), \quad (16)$$

где $p = p(\alpha) := \exp\{\alpha - 1 - \alpha \ln \alpha\}$.

Очевидно, при $\alpha > e$

$$p(\alpha) < \rho = \rho(\alpha) := \exp\{\alpha(1 - \ln \alpha)\} < 1. \quad (17)$$

Поскольку $f(y) \leq 1$, из (16) и (17) следует, что для $m \geq 1$

$$f(y_m) < \sum_{k=1}^{m-1} Q(\varepsilon y_k) \rho^{m-k-1} + \rho^{m-1}. \quad (18)$$

В силу (14) $k = \ln(y_k/\beta)/\ln(1 + \alpha\varepsilon)$. Отсюда

$$\rho^k = \left(\frac{y_k}{\beta}\right)^{\ln \rho / \ln(1 + \alpha\varepsilon)} \quad (19)$$

Подставляя это выражение в (18), получаем оценку

$$f(y_m) < \sum_{k=1}^{m-1} Q(\varepsilon y_k) \left(\frac{\beta}{y_{m-k-1}}\right)^{s(\alpha, \varepsilon)} + \left(\frac{\beta}{y_{m-1}}\right)^{s(\alpha, \varepsilon)}, \quad (20)$$

где $s(\alpha, \varepsilon) = -\ln \rho(\alpha)/\ln(1 + \alpha\varepsilon)$. Далее, вследствие (14)

$$\frac{\beta}{y_{m-k-1}} = \frac{1}{(1 + \alpha\varepsilon)^{m-k-1}} = \frac{y_{k-1}}{y_{m+1}} (1 + \alpha\varepsilon)^3.$$

Используя это равенство, (14), (15) и монотонность функций $Q(x)$ и x^{t-1} получаем, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} Q(\varepsilon y_k) \left(\frac{\beta}{y_{m-k-1}}\right)^t &= (1 + \alpha\varepsilon)^{3t} \left(\frac{y_{k-1}}{y_{m+1}}\right)^t \frac{y_k - y_{k-1}}{\alpha\varepsilon y_{k-1}} Q(\varepsilon y_k) \\ &< \frac{(1 + \alpha\varepsilon)^{3t}}{\alpha\varepsilon y_{m+1}^t} \int_{y_{k-1}}^{y_k} Q(\varepsilon u) u^{t-1} du. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует

$$f(y_m) < \frac{\omega(\alpha, \varepsilon)}{y_{m+1}^{s(\alpha, \varepsilon)}} \int_0^{y_m} Q(\varepsilon u) u^{s(\alpha, \varepsilon)-1} du + \left(\frac{\beta}{y_{m-1}}\right)^{s(\alpha, \varepsilon)}, \quad (22)$$

где

$$\omega(\alpha, \varepsilon) = \frac{(1 + \alpha\varepsilon)^{3s(\alpha, \varepsilon)}}{\alpha\varepsilon} = \frac{1}{\alpha\varepsilon\rho^3}. \quad (23)$$

Пусть $y_m \leq x < y_{m+1}$. Тогда ввиду (22)

$$f(x) < f(y_m) < \frac{\omega(\alpha, \varepsilon)}{x^{s(\alpha, \varepsilon)}} \int_0^x Q(\varepsilon u) u^{s(\alpha, \varepsilon)-1} du + \left(\frac{(1 + \alpha\varepsilon)^2 \beta}{x} \right)^{s(\alpha, \varepsilon)}$$

Отсюда в силу произвольности β

$$f(x) < \frac{\omega(\alpha, \varepsilon)}{x^{s(\alpha, \varepsilon)}} \int_0^x Q(\varepsilon u) u^{s(\alpha, \varepsilon)-1} du. \quad (24)$$

Предложение 2 доказано.

4. Доказательство теоремы 1. Доказательство сводится к оценке величин $\omega(\alpha, \varepsilon)$ и $s(\alpha, \varepsilon)$ в неравенстве (24) при специальном выборе параметров α и ε . Положим $\alpha = \gamma t / (\ln t - 2 \ln \ln t)$, где γ — положительное число, удовлетворяющее единственному ограничению $\gamma \leq 1$. При $\varepsilon = (\frac{1}{2})(\ln t - 2 \ln \ln t)/t$ имеет место неравенство (см. [25, формула (31)])

$$\frac{1}{\rho^3 \alpha \varepsilon} < \frac{2e^{6\gamma t}}{\gamma}. \quad (25)$$

Кроме того,

$$s(\alpha, \varepsilon) > 1 \quad (26)$$

[25, формула(30)].

В силу предложений 1 и 2 функция $f(x) = P(\bar{S}_n > x)$ удовлетворяет неравенству (24). Поэтому из (23)–(26) следует неравенство (4). Обратимся теперь к случаю $\varepsilon_t = \eta/t$. Легко видеть, что

$$s\left(\alpha(\eta), \frac{\eta}{t}\right) = \frac{\alpha(\eta)\eta}{\ln(1 + \alpha(\eta)\eta/t)} > t. \quad (27)$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае

$$\omega(\alpha, \varepsilon_t) = \frac{te^{3\alpha(\eta)\eta}}{\alpha(\eta)\eta}. \quad (28)$$

Из (24), (27), (28) следует второе утверждение теоремы.

5. Доказательство теоремы 2. Согласно второму неравенству следствия 1,

$$E^{1/t} \{\bar{S}_n^t; \bar{S}_n \geq 0\} < c_2^{1/t}(t, \eta) \frac{t}{\ln t} (\bar{D}_t^{1/t} + E^{1/t} B_n^t), \quad (29)$$

где

$$c_2(t, \eta) = \frac{e^{3\eta\alpha(\eta)}(t+1)^{t+1}(\ln t)^t}{\alpha(\eta)\eta^{t+1}t^t}. \quad (30)$$

Нетрудно показать, что

$$c_2^{1/t}(t, \eta) = \exp \left\{ \frac{f(t, \eta)}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(t+1) - \ln t + \ln \ln t \right\}, \quad (31)$$

где $f(t, \eta) = 3\eta\alpha(\eta) - (t+1) \ln \eta - \ln \alpha(\eta)$. Обозначим

$$\omega_t = \min_{\eta} f(t, \eta).$$

Пусть η_t — значение η , при котором достигается ω_t , т.е. $\omega_t = f(t, \eta_t)$. Нетрудно видеть, что η_t удовлетворяет уравнению $f'_\eta(t, \eta) = 0$. Это уравнение можно записать в виде

$$(\eta + 1)(3\eta e^{\eta+1} - 1) = t. \quad (32)$$

Функция, стоящая в левой части уравнения (32), строго возрастает при $\eta > 0$ и стремится к бесконечности при $\eta \rightarrow \infty$. Кроме того, она отрицательна в нуле. Поэтому уравнение (32) имеет единственное решение при любом $t > 0$.

Приближенное значение $\eta_2 \approx 0,249$, соответственно, $-\ln \eta_2 \approx 1,39$. Далее, $\eta_4 \approx 0,345$, $-\ln \eta_4 \approx 1,064$. Все численные значения даются здесь с недостатком.

Заметим, что в силу (32)

$$3\eta e^{\eta+1} = \frac{t}{\eta+1} + 1.$$

Отсюда

$$f(t, \eta) = \frac{t}{\eta+1} - (t+1) \ln \eta - \eta. \quad (33)$$

Рассмотрим функцию

$$f_s(t) = \frac{\omega_s}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(t+1) - \ln t + \ln \ln t,$$

зависящую от параметра $s \geq 2$. Ввиду (31) $c_2^{1/t}(t, \eta_s) = e^{f_s(t) + (s/t-1) \ln \eta_s}$. Согласно определению $f_s(t)$,

$$f_s(t) + \left(\frac{s}{t} - 1\right) \ln \eta_s = \frac{\omega_s + (s-t) \ln \eta_s}{t} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(1+t) - \ln t + \ln \ln t. \quad (34)$$

Подставляя в (33) найденные выше значения η_s , $\ln \eta_s$, $s = 2, 4$, находим, что

$$\omega_2 < 5,54, \quad \omega_4 < 7,955.$$

Возвращаясь теперь к (34), мы заключаем, что $f_s(t) + (s/t-1) \ln \eta_s < g_s(t)$, $s = 2, 4$. В результате мы получаем оценку

$$Kt \leq c_2^{1/t}(t, \eta_2) \wedge c_2^{1/t}(t, \eta_4) \leq e^{g_1(t)} \wedge e^{g_2(t)}. \quad (35)$$

Если η удовлетворяет уравнению (32), то $(\eta+1)^2 e^{\eta+1} > t/3$. Полагая $y = \eta+1$, имеем $e^{y+2 \ln y} > 3^{-1}t$, т.е. $y + 2 \ln y > \ln(3^{-1}t)$. Отсюда

$$y > \ln(3^{-1}t) \left(1 + \frac{2 \ln y}{y}\right)^{-1} > c_0^{-1} \ln(3^{-1}t), \quad (36)$$

где $c_0 = 1 + 2/e$, поскольку

$$\max_{y>0} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{e}.$$

Ввиду (36) при $t > 3$

$$\frac{1}{\eta+1} < \frac{c_0}{\ln t - \ln 3} < \frac{1,74}{\ln t - 1,1} \quad (37)$$

и

$$\eta > 0,57(\ln t - \ln 3) - 1 > 0,57(\ln t - 2,86). \quad (38)$$

Наконец, в силу (38) при $\ln t > 2,86$

$$\ln \eta > \ln(\ln t - 2,86) - 0,57. \quad (39)$$

Из (33) и (37)–(39) следует оценка

$$\frac{f(t, \eta)}{t} < \frac{1,74}{\ln t - 1,1} - \left(1 + \frac{1}{t}\right) \ln(\ln t - 2,86) + \frac{0,57}{t} (2,86 - \ln t) + 0,57 \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

при условии, что $\ln t > 2,86$. Подставляя эту оценку в правую часть (31), имеем при $\ln t > 2,86$

$$c_3^{1/t}(t, \eta) < e^{g_3(t)}. \quad (40)$$

Комбинируя оценки (35) и (40), мы получаем желаемый результат.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту, который обратил его внимание на работу [11], а также Э.Л. Пресману, чьи замечания позволили существенно улучшить изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
2. Steiger W. A best possible Kolmogoroff type inequality for martingales and characteristic property. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, № 3, p. 764–769.
3. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
4. Фук Д. Х. Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов. — *Сиб. матем. журн.*, 1973, т. 14, с. 185–193.
5. Юринский В. В. Показательные оценки для больших уклонений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, т. 19, в. 1, с. 152–154.
6. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. О больших уклонениях для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве. — Тезисы докладов 2-й Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, т. 2, Вильнюс, 1977, с. 66–67.
7. Володин Н. А., Морозова Л. Н. Некоторые оценки вероятностей больших уклонений для мартингалов и сумм случайных векторов. — *Вероятностные процессы и математическая статистика*. Ташкент: Фан, 1978, с. 35–43.
8. Нагаев С. В., Вахтель В. И. Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 3, с. 266–291.
9. Haeusler E. An exact rate of convergence in the functional central limit theorem for special martingale difference arrays. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 1984, v. 65, № 4, p. 523–534.
10. Kubilius K., Mémin J. Inégalité exponentielle pour les martingales locales. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1994, v. 319, № 7, p. 733–738.
11. Corbrot B. Rates of convergence in the functional CLT for martingales. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1999, v. 328, № 6, p. 509–513.
12. Pinelis I. Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces. — *Ann. Probab.*, 1994, v. 22, № 4, p. 1679–1706.
13. Dehling H., Utev S. A. An exponential inequality for martingales. — *Siberian Adv. Math.*, 1993, v. 3, № 3, p. 197–203.
14. Azuma K. Weighted sums of certain dependent random variables. — *Tôhoku Math. J.*, 1967, v. 19, p. 357–367.
15. Van de Geer S. Exponential inequalities for martingales' with applications to maximum likelihood estimation for counting process. — *Ann. Statist.*, 1995, v. 23, № 5, p. 1779–1801.
16. De la Peña V. H. A general class of exponential inequalities for martingales and ratios. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 1, p. 537–564.
17. Dzharaparidze K., van Zanten J. H. On Bernstein-type inequalities for martingales. — *Stochastic Process. Appl.*, 2001, v. 93, № 1, p. 109–117.
18. Bentkus V. On Hoeffding's inequalities. — *Ann. Probab.*, 2004, v. 32, № 2, p. 1650–1673.
19. Lesigne E., Volný D. Large deviations for martingales. — *Stochastic Process. Appl.*, 2001, v. 96, № 1, p. 143–159.
20. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. 22, в. 2, с. 254–263.
21. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
22. Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве. — *Труды Ин-та математики СО АН СССР*, 1982, т. 1, с. 159–167.
23. Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховом пространстве. — *Сиб. матем. журн.*, 1987, т. 28, № 4, с. 171–184.
24. Нагаев С. В. О вероятностных и моментных неравенствах для сумм зависимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 1, с. 194–202.

25. Nagaev S. V. On probability and moment inequalities for supermartingales and martingales. — Acta Appl. Math., 2003, v. 79, № 1–2, p. 35–46.
26. Rosenthal H. P. On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. — Israel J. Math., 1970, v. 8, p. 273–303.
27. Burkholder D. L. Distribution function inequalities for martingales. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 19–42.
28. Hitczenko P. Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 4, p. 1656–1668.
29. Hitczenko P. Upper bounds for the L_p -norms of martingales. — Probab. Theory Related Fields, 1990, v. 86, № 2, p. 225–238.
30. Ибрагимов Р., Шараметов Ш. О точной константе в неравенстве Розенталя. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 2, с. 341–350.
31. Ибрагимов Р., Шараметов Ш. Точная константа в неравенстве Розенталя для случайных величин с нулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 134–138.
32. Пешкир Г., Ширяев А. Н. Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 3–62.
33. Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J. Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 1, p. 234–253.
34. Нагаев С. В. Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 832–838.

Поступила в редакцию
11.VI.2002

Исправленный вариант
14.IV.2005

© 2006 г.

ЯРЫКИН П. Н.*

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СИСТЕМУ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Рассматривается нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение типа Маккина–Власова без «внешнего поля». Доказывается существование и сильная единственность решения уравнения. Далее доказывается существование и слабая единственность стационарного решения в классе распределений с заданным математическим ожиданием, а также сходимость по вероятности любого решения к стационарному распределению с соответствующим математическим ожиданием при больших временах.

Ключевые слова и фразы: нелинейный стохастический процесс, уравнение Маккина–Власова, устойчивость.

Введение Настоящая статья посвящена исследованию решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ) вида

$$\tilde{X}_t = X_0 + W_t + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^1} b(\tilde{X}_s, y) \mu_s^{\tilde{X}}(dy) ds, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\mu_s^{\tilde{X}}$ является распределением $\tilde{X}_s \in \mathbf{R}^1$, W_t — броуновское движение, не зависящее от начального значения X_0 , $b(\tilde{X}_s, y)$ — функция попарного взаимодействия.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: yarykin@plushka.msk.ru