Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Гущин, Рецензия
на книгу Christopher C. Heyde. “Quasi-Likelihood
And Its Application. A General Approach to Optimal
Parameter Estimation”, *Теория вероятн. и ее при-
мен.*, 1999, том 44, выпуск 1, 233–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:57:31

© 1999 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Christopher C. Heyde. **Quasi-Likelihood And Its Application. A General Approach to Optimal Parameter Estimation.** New York et al.: Springer-Verlag, 1997, ix+235 p.

Одним из наиболее общих и достаточно широко применимых методов оценивания параметров статистических моделей является так называемый метод квази-правдоподобия, основанный на понятии оценивающей функции. Он включает в себя такие стандартные методы оценивания, как метод максимального правдоподобия, методы наименьших квадратов и условных наименьших квадратов, метод минимума хи-квадрат, М-оценивание. В рецензируемой монографии впервые дается систематическое изложение методологии квазиправдоподобия, отражающее итог ее интенсивного развития (в значительной степени благодаря вкладу автора монографии) на протяжении последних пятнадцати лет.

Напомним определение оценивающей функции. Пусть наблюдается r -мерный случайный процесс $\{X_t, t \leq T\}$ с дискретным или непрерывным временем, распределение которого зависит от неизвестного p -мерного параметра θ , который требуется оценить. Возможны как параметрическая, так и семипараметрическая постановки задачи. В последнем случае распределение $\{X_t\}$ принадлежит объединению семейств $\{P_\theta\}$ вероятностных мер, параметризованных θ (примеры: θ — среднее стационарного процесса или среднее число потомков ветвящегося процесса). Оценивающей функцией называется p -мерная функция данных и параметра $G_T = G_T(\{X_t, t \leq T\}, \theta)$ (в дальнейшем зависимость функции G_T от данных не указывается), для которой $EG_T(\theta) = 0$, где математическое ожидание берется по любой мере P_θ из соответствующего семейства. При анализе асимптотических свойств при $T \rightarrow \infty$ часто рассматривают мартингальные оценивающие функции $G = \{G_T(\theta), T \geq 0\}$, которые при фиксированном θ являются мартингалами по каждой мере P_θ . Оценка параметра, отвечающая оценивающей функции G , определяется как решение «оценивающего» уравнения $G_T(\cdot) = 0$.

Основное внимание в книге уделяется именно оценивающим функциям, а не отвечающим им оценкам. Как указывает автор, основная причина заключается в более фундаментальном характере понятия оценивающей функции, в подтверждение чему он приводит следующие аргументы:

- оценивающие функции инвариантны относительно взаимно однозначных преобразований параметра θ ;

- при слабых условиях регулярности производная (по параметру) логарифма отношения правдоподобия, являющаяся оценивающей функцией, осуществляет минимальное достаточное разбиение выборочного пространства, однако единственной достаточной статистики часто не существует;

- информация Фишера является свойством скорее оценивающих функций (а именно, она равна дисперсии производной логарифма отношения правдоподобия), чем оценки максимального правдоподобия;

- неравенство Рао–Крамера является свойством скорее оценивающих функций, чем оценок: оно указывает, что дисперсия производной логарифма отношения правдоподобия является границей дисперсий оценивающих функций, приведенных к стандартной форме;

- как и в случае оценки максимального правдоподобия, асимптотические свойства оценок выводятся из асимптотических свойств отвечающих им оценивающих функций;

— отдельные оценивающие функции, каждая из которых дает информацию о неизвестном параметре, могут быть скомбинированы гораздо легче, чем отвечающие им оценки.

Важным, если не определяющим, моментом является выбор класса оценивающих функций для конкретной модели, после чего в этом классе ищется оптимальная (в том или ином смысле) оценивающая функция. Именно понятие оптимальной оценивающей функции (в английском языке это выражение имеет синоним — *quasi-score estimating function*) является центральным в книге. Напомним, что оценка максимального правдоподобия обычно ищется как решение уравнения правдоподобия, получаемого приравниванием к нулю градиента логарифма функции правдоподобия (*score function*; различные переводы этого термина на русский язык не слишком удачны). Соответственно, оценка, отвечающая оптимальной оценивающей функции, называется оценкой квазиправдоподобия. Предположение о том, что существует скалярная функция («функция квазиправдоподобия»), градиент логарифма которой есть оптимальная оценивающая функция, не является принципиально важным и почти не используется в данной монографии.

Уместно отметить, что термин «квазиправдоподобие» первоначально применялся в более узком контексте. Впервые он был использован в статье [2], где для обобщенной линейной модели была введена функция, обладающая некоторыми свойствами, присущими отношению правдоподобия; вместе с тем эта функция определялась только вектором средних (в терминах параметров регрессии) и взаимосвязью между вектором средних и ковариацией. Именно эта функция и была названа функцией квазиправдоподобия. Градиент ее логарифма действительно является оптимальной оценивающей функцией в некотором классе оценивающих функций.

В параметрических моделях градиент логарифма функции правдоподобия при слабых условиях регулярности является оценивающей функцией, причем оптимальной в любом классе оценивающих функций, ее содержащем. Оценки квазиправдоподобия отнюдь не призваны служить альтернативой оценке максимального правдоподобия в «нерегулярных» случаях, когда последняя ведет себя плохо или не является асимптотически эффективной. Идея метода квазиправдоподобия заключается в другом: в «регулярной» ситуации эффективность оценок квазиправдоподобия обычно ненамного уступает (или не уступает вовсе) эффективности оценки максимального правдоподобия, в то время как

— применение метода квазиправдоподобия не требует полной характеристики неизвестного распределения (например, в моделях регрессионного типа бывает достаточно знания первых двух моментов);

— метод квазиправдоподобия часто значительно проще в вычислительном плане;

— применение метода квазиправдоподобия возможно, когда явное представление отношения правдоподобия отсутствует.

Характерным примером последней из упомянутых особенностей является задача оценивания параметров диффузионных процессов по дискретным наблюдениям, интенсивно изучаемая в последние годы. В рецензируемой монографии эта проблематика не затронута, и интересующемуся читателю мы рекомендуем обратиться к обзорной статье [1].

Перечислим вкратце темы, затронутые в книге.

После вводной главы 1, где, в частности, теорема Гаусса–Маркова переформулирована в терминах оценивающих функций, в главе 2 в общей постановке даны два определения оптимальности оценивающих функций, так называемые критерий для конечных выборок и асимптотический критерий. При достаточно широких предположениях эти два определения приводят к одним и тем же оптимальным оценивающим функциям. Показано, как в общей семимартингальной модели можно выбрать естественный класс оценивающих функций и найти в нем оптимальную; вместе с тем приведен ряд важных с методологической точки зрения примеров, иллюстрирующих необходимость тщательного анализа при выборе класса оценивающих функций.

В главе 3 анализируется альтернативный подход к оптимальному оцениванию посредством оценивающих функций, основанный на понятиях *E*-достаточности и *E*-подчиненности (*E*-ancillarity; буква *E* происходит от *expectation* — математическое

ожидание) — своеобразных аналогах понятий достаточности и подчиненности для оценивающих функций.

В главе 4 рассматривается вопрос о построении доверительных областей для неизвестного параметра. При определенных условиях регулярности (аналогичных тем, что используются при доказательстве тех же свойств для оценки максимального правдоподобия) оценки, отвечающие оценивающим функциям, состоятельны и асимптотически нормальны (при, возможно, случайной нормировке). При этих предположениях оценки квазиправдоподобия приводят к минимальным доверительным областям.

Модели с мешающими параметрами часто приводят к функциям, которые были бы оптимальными оценивающими функциями, если бы мешающий параметр был известен. Для построения с их помощью оценок приходится вместо мешающего параметра подставлять его состоятельную оценку. В главе 5 анализируется вопрос, когда при такой подстановке свойство оптимальности соответствующих оценок сохраняется и когда происходит потеря информации.

Во многих моделях могут появляться различные оценивающие функции, например, представимые как стохастические интегралы по тому или иному мартингалу. В главе 6 исследуется вопрос, как выбирать оптимальную комбинацию таких функций.

В главе 7 рассмотрен ряд задач (оценивание при ограничениях, задачи с мешающими параметрами, оценивание по неполным данным), где стандартные методы квазиправдоподобия неприменимы и используются проекционные методы.

В главе 8 на различных примерах показаны возможности использования метода квазиправдоподобия в тех случаях, когда вычисление оценки максимального правдоподобия содержит значительные трудности.

В главах 9 и 10 очень кратко обсуждается использование метода квазиправдоподобия в задачах проверки гипотез и оценивания бесконечномерного параметра.

Глава 11 имеет дело с различными применениями метода квазиправдоподобия, в том числе в задачах оценивания среднего стационарного процесса и оценивания в модели гетероскедастической регрессии.

Глава 12 знакомит читателя с методами (в основном, мартингального характера), которые позволяют доказать (сильную) состоятельность и асимптотическую нормальность оценок. Некоторый парадокс состоит в том, что общие теоремы подобного плана об асимптотическом поведении оценок часто не улавливают особенности, присущие конкретным моделям, поэтому автор приводит формулировки закона больших чисел и центральной предельной теоремы для мартингалов, которые и рекомендует применять индивидуально в каждой конкретной ситуации.

В заключительной главе 13 рассматривается ряд дополнительных тем. В частности, обсуждается проблема, состоящая в том, что оценивающее уравнение может иметь неединственное решение (и приводить к несостоятельным оценкам); очень кратко обсуждаются численные методы решения оценивающего уравнения.

Оценивая монографию в целом, можно сказать, что она является хорошим введением в исследуемую проблематику. Изложение ведется, как правило, на неформальном уровне, основное внимание уделяется не математической теории, а концептуальной стороне вопроса. Для специалиста в данной области книга может послужить источником новых проблем. В монографии содержится большое число примеров, и почти все главы снабжены упражнениями, что делает книгу удобной для использования в учебных курсах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sørensen M.* Estimating functions for discretely observed diffusions: A review. — In: *Selected Proceedings of the Symposium on Estimating Functions*. /Ed. by I. V. Basawa, V. P. Godambe and R. L. Taylor. IMS Lecture Notes — Monograph Series, 1997, v. 32, p. 305–325.
2. *Wedderburn R. W. M.* Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss–Newton method. — *Biometrika*, 1974, v. 61, p. 439–447.