Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Л. В. Розовский,
А. И. Саханенко, О работе С. В. Жуленева “О больших
уклонениях. II”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006,
том 51, выпуск 2, 445–446

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:41:56

© 2006 г.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О РАБОТЕ С. В. ЖУЛЕНЕВА «О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ. II»

Автор начинает свою статью словами «Практически с момента возникновения проблематики больших уклонений (БУ), т.е. уже более 60 лет, на повестке дня стоит *один* (курсив наш) вопрос: существует ли представление БУ (ПБУ) без условия Крамера, в определенном смысле аналогичное тому, которое имеет место при этом условии, и если нет, то почему? В настоящей работе, которая является продолжением [1], предпринята попытка разобраться в этой ситуации и показано, что такое представление существует».

Отметим прежде всего, что из этих слов и дальнейшего текста статьи вплоть до самого конца не ясно, какое ПБУ автор имеет в виду. Лишь на последней странице сказано, что ПБУ — это утверждение (11) основной теоремы в [2], дающее асимптотику $P\{S_n > x d \sqrt{n}\}$ в зоне уклонений $0 < x < C n^{(1-\alpha)/2}$, $C = \text{const} > 0$, $\alpha > 0$, где X_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, $EX_1 = 0$, $d^2 = EX_1^2 > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Отметим далее, что положительный ответ на вопрос автора о существовании ПБУ в случае отсутствия условия Крамера давно дан — с одной стороны, в [3]–[6] и других работах, где установлена асимптотика $P\{S_n > x \sqrt{n}\}$ в случае конечности $Ee^{|X|^\beta}$ при некотором $\beta \in (0, 1)$; с другой стороны, например, в работах [7]–[9], где установлена асимптотика $P\{S_n > x \sqrt{n}\}$ при наличии лишь ограниченного числа конечных моментов в предположении, что $V(t) = P\{X > t\}$ имеет правильное изменение при $t \rightarrow \infty$. Автор (который, по-видимому, не знаком с названными выше результатами) дает свой ответ на поставленный вопрос в виде следующего представления [2, (11)]:

при условии $\alpha_{2s+2} = EX_1^{2s+2} < \infty$, в «зоне уклонений» $0 < \lambda < C n^{(1-\alpha)/2}$, $C = \text{const} > 0$, $\alpha > 2/(2s+1)$

$$P\{S_n > x d \sqrt{n}\} = \frac{\varphi_{2s}^n(z) e^{-\lambda z}}{c \sigma(z) \sqrt{2\pi}} (1 + \delta_n(\lambda)), \quad (1)$$

где $e_s = \sum_{j=0}^s t_j / j!$, $\varphi_s(t) = E e_s(t X_1) = \sum_{j=0}^s \alpha_j t_j / j!$, $\alpha_j = EX_1^j$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = d^2$, $z = \lambda / (d \sqrt{n})$, функции $\sigma(z)$, $\delta_n(\lambda)$ и связь переменных λ , z с переменными x , n определены чрезвычайно громоздко с помощью девяти лемм и не менее шестнадцати обозначений (одно из них мы исключили, убрав обозначение s_n для $d \sqrt{n}$).

Это утверждение грубо ошибочно.

Действительно, можно положить, не ограничивая общности, $d = 1$. Согласно соотношению $x \sim \lambda$ при $n \rightarrow \infty$, которое автор приводит перед леммой 1, получаем, что в рассматриваемой зоне уклонений $\lambda \sim x$ при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\varphi_{2s}^n(z) e^{-\lambda z} = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2n} (1 + o(1))\right)^n e^{-\lambda z} = e^{-(x^2/2)(1+o(1))},$$

$c \sigma(z) = \lambda \sigma$, $\sigma \sim 1$ (см. соотношение перед леммой 1). Для остаточного члена $\delta_n(\lambda)$ автор приводит очень громоздкое представление

$$\delta_n(\lambda) = c \sigma(z) \sqrt{2\pi} \{2\theta \nu e^{\mu_1} + \Delta_n\} - \{1 - \delta_1 e^{\mu_1} J(c \sigma(z))\},$$

$$\Delta_n = \delta_2 e^{-\lambda \sigma T + \mu_2} P(H_{[T, \infty)}) + \delta_3 e^{\mu_3} P(\bar{A}),$$

где $T > 0$ — произвольное число, $0 \leq \delta_1, \delta_2, \delta_3 \leq 1$, $|\theta| \leq 1$, $0 \leq \nu \leq 2$, $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$, величина μ_3 ограничена при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \sigma = c \sigma(z)$, $c = \lambda$, $z = \lambda / \sqrt{n}$, $\sigma \sim 1$ при $n \rightarrow \infty$, функция $J(t)$ определена формулой

$$J(t) = \frac{t(1 - \Phi(t))}{\Phi'(t)} = t e^{t^2/2} \int_t^\infty e^{y^2/2} dy, \quad t \geq 0,$$

события $H_{[T, \infty)}$, $\bar{A}$ определены весьма сложно (мы не будем воспроизводить эти определения, поскольку ниже оценим вероятности этих событий). Поскольку (см., например, [10, с. 183]) $\sup_{t \geq 0} J(t) \leq 1$, то получаем грубую оценку: при $\lambda \geq 1$

$$1 + \delta_n(\lambda) \leq \lambda C_1,$$

где константа $C_1 < \infty$ не зависит от n и λ . Поэтому из утверждения (1) для уклонений $1 \leq x < Cn^{(1-\alpha)/2}$ вытекает неравенство

$$\mathbf{P}\{S_n > \sqrt{n}x\} \leq C_2 e^{-x^2/4} \quad (2)$$

для некоторой константы $C_2 < \infty$, не зависящей от n, x .

Но хорошо известно, что в случае, когда X_1 имеет лишь ограниченное число конечных моментов (а именно это и предполагает автор), асимптотика $\mathbf{P}\{S_n > x\sqrt{n}\}$ в области $x > c\sqrt{\ln n}$ имеет совершенно иную природу. Например, если функция $V(t) = \mathbf{P}\{X_1 > t\}$ правильно меняется, т.е. $V(t) = t^{-\gamma}L(t)$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, $\gamma > 2$, $c > \sqrt{\gamma - 2}$, то при $x \geq c\sqrt{\ln n}$ справедливо (см., например, [7]–[9])

$$\mathbf{P}\{S_n > x\sqrt{n}\} \sim nV(x\sqrt{n}) = n(x\sqrt{n})^{-\gamma}L(x\sqrt{n}) \gg C_2 e^{-x^2/4}.$$

Это доказывает ошибочность (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуленев С. В. О больших уклонениях. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 34–54.
2. Жуленев С. В. О больших уклонениях. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 49, в. 4, с. 672–694.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Осипов Л. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 2, с. 320–341.
5. Боровков А. А. Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с семизэкспоненциальными распределениями. — Сиб. матем. журн., 2000, т. 41, в. 6, с. 1290–1324.
6. Розовский Л. В. Вероятности больших уклонений на всей оси. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 79–109.
7. Nagaev S. V. Large deviations for sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
8. Розовский Л. В. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 686–705.
9. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших уклонений случайных блужданий. I. Распределения с правильно меняющимися хвостами. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1964, 498 с.

А. А. Боровков, А. А. Могульский,
Л. В. Розовский, А. И. Сатаненко

В резюме моей статьи «О сходимости к равномерному распределению» («Теория вероятностей и ее применения», т. 50, в. 4, с. 774–776), к сожалению, допущены опечатки: вместо $p_n(x)$ следует читать $\tilde{p}_n(x)$ и вместо $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{p}_n(x) - 1| dx \rightarrow 0$ следует читать $\int_0^1 |\tilde{p}_n(x) - 1| dx \rightarrow 0$.

А. Я. Кузнецова