Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. И. Вахтель, К. Фляйшманн, Критические процессы Гальтона–Ватсона: Максимум общего числа частиц внутри большого окна, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 419–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:57:44

© 2007 г.

ВАТУТИН В. А.*, ВАХТЕЛЬ В.**,
ФЛЕЙШМАНН К.**КРИТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА:
МАКСИМУМ ОБЩЕГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ
ВНУТРИ БОЛЬШОГО ОКНА¹⁾

Рассматривается критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $Z = \{Z_n: n = 0, 1, \dots\}$ индекса $1 + \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$. Пусть $S_k(j)$ обозначает сумму числа частиц Z_n по всем n , находящимся внутри окна $[k, \dots, k + j)$, а $M_m(j)$ — максимум $S_k(j)$ по всем k , меняющимся в промежутке $[0, m - j]$. Мы описываем асимптотическое поведение математического ожидания $EM_m(j)$ в случае, когда ширина окна $j = j_m$ удовлетворяет условию $j/m \rightarrow \eta \in [0, 1]$ при $m \uparrow \infty$. При получении указанной асимптотики используются асимптотические свойства хвоста распределения случайной величины $M_\infty(j)$.

Ключевые слова и фразы: ветвление индекса один плюс альфа, предельная теорема, условный принцип инвариантности, асимптотика хвоста, скользящее окно, максимум общего числа частиц, вероятности малых отклонений.

1. Введение и формулировка результатов

Пусть $Z = \{Z_n: n \geq 0\}$ обозначает процесс Гальтона–Ватсона. Как правило, мы предполагаем, что процесс начинается с одной частицы: $Z_0 = 1$. Нам будет удобно обозначать ξ случайную величину, распределенную так же, как и число потомков Z_1 первоначальной частицы. Всюду в дальнейшем предполагается, что процесс Z является *критическим*, т.е. $E\xi = 1$. Если не оговаривается иное, мы рассматриваем случай *ветвления индекса* $1 + \alpha$ для некоторого $0 < \alpha \leq 1$. Это означает,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

** Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, D-10117 Berlin, Germany; e-mail: fleischm@wias-berlin.de, vakhtel@wias-berlin.de; URL: <http://www.wias-berlin.de/~fleischm>, <http://www.wias-berlin.de/~vakhtel>

¹⁾ Работа первого автора выполнена при частичной поддержке программы РАН «Современные проблемы теоретической математики» и грантов РФФИ № 05-01-00035, ИНТАС № 03-51-5018; работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке DFG.

что соответствующая производящая функция f числа непосредственных потомков частиц имеет вид

$$f(s) := \mathbf{E}s^\xi = s + (1-s)^{1+\alpha}L(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1)$$

где функция $x \mapsto L(x)$ медленно меняется при $x \downarrow 0$. Для $k \geq 0$ и $1 \leq j \leq m < \infty$ положим

$$S_k(j) := \sum_{l=k}^{k+j-1} Z_l \quad \text{и} \quad M_m(j) := \max_{0 \leq k \leq m-j} S_k(j).$$

Используя свойство монотонности, мы распространяем эти обозначения на случай $m = \infty$ и даже на случай $j = \infty$ и полагаем

$$M(j) := M_\infty(j), \quad 1 \leq j \leq \infty.$$

Поскольку любой критический ветвящийся процесс вырождается почти наверное за конечное время, случайная величина $M(j)$ является собственной при любом j . В частности, величина $M(\infty)$ совпадает с общим числом частиц $S_0(\infty) = Z_0 + Z_1 + \dots$ в процессе Z .

Основной целью данной работы является изучение асимптотического поведения математического ожидания $\mathbf{E}M_m(j)$ в случае, когда параметр j меняется при изменении m так, что $j/m \rightarrow \eta \in [0, 1]$ при $m \uparrow \infty$.

Для того чтобы почувствовать, какого рода результаты нам следует ожидать, рассмотрим сначала два частных случая. При $j = m$ имеем

$$\mathbf{E}M_m(m) = \mathbf{E}S_0(m) = \mathbf{E} \sum_{l=0}^{m-1} Z_l = m. \quad (2)$$

С другой стороны, случай $j = 1$ сводится к исследованию асимптотического поведения математического ожидания случайной величины $M_m(1) =: M_m = \max_{0 \leq k \leq m-1} Z_k$ при $m \uparrow \infty$. Последняя задача имеет довольно долгую историю. Сначала Г. Вейнер [18] показал, что если дисперсия числа потомков критического процесса конечна, что в случае (1) влечет $\alpha = 1$, то существуют константы $0 < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ такие, что $\underline{c} \leq \mathbf{E}M_m / \ln m \leq \bar{c}$ для всех m . Затем К. Кеммерле и Г.-Ю. Шу [9] и Э. Пейкс [12] нашли явные оценки для $\underline{c}$ снизу и для $\bar{c}$ сверху. Наконец, К. Б. Атрейя [1] установил (по-прежнему при условии $\mathbf{D}\xi < \infty$), что

$$\mathbf{E}M_m(1) = \mathbf{E}M_m \sim \ln m \quad \text{при} \quad m \uparrow \infty. \quad (3)$$

К. А. Боровков и В. А. Ватутин [3] доказали справедливость (3) при условии (1). Более того, В. А. Ватутин и В. А. Топчий [17] и Е. М. Бондаренко и В. А. Топчий [2] установили справедливость асимптотического соотношения (3) при гораздо более слабых условиях, чем (1). Например, в работе [2] указанное асимптотическое представление было доказано в предположении, что $\mathbf{E}\xi \ln^\beta(1+\xi) < \infty$ для некоторого $\beta > 0$.

Сравнение порядков m в правых частях соотношений (2) и (3) приводит к следующему естественному вопросу: что можно сказать о поведении величины $\mathbf{E}M_m(j)$ в случае, когда ширина j скользящего окна, внутри которого подсчитывается общее число частиц, меняется каким-либо образом вместе с изменением m ? При ответе на этот вопрос мы сосредоточим наше внимание на процессах, удовлетворяющих условию (1). Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. Пусть параметр $j_m \geq 1$ меняется так, что $j_m/m \rightarrow \eta \in [0, 1]$ при $m \uparrow \infty$.

(а) Если $\eta = 0$, то

$$\mathbf{E}M_m(j_m) \sim j_m \ln \frac{m}{j_m} \quad \text{при } m \uparrow \infty.$$

(б) Если $0 < \eta \leq 1$, то

$$\mathbf{E}M_m(j_m) \sim j_m \varphi(\eta) \quad \text{при } m \uparrow \infty, \quad (4)$$

где явное выражение для функции φ дано ниже в формуле (89). В частности,

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi(\eta) \sim \ln \frac{1}{\eta} \quad \text{при } \eta \downarrow 0. \quad (5)$$

Заметим, что асимптотическое соотношение (5) обеспечивает непрерывный переход от случая (а) к случаю (б).

Мы докажем теорему 1, изучив тонкие свойства случайной величины $M(j) = M_\infty(j)$. Точнее, мы выведем следующее асимптотическое представление для хвоста распределения случайной величины $M(j)$. Как обычно, $Q(n)$ обозначает вероятность невырождения $\mathbf{P}(Z_n > 0)$.

Теорема 2. Предположим, что параметр $j_n \geq 1$ меняется так, что $j_n/(Q(j_n)n) \rightarrow y \in [0, \infty]$ при $n \uparrow \infty$.

(а) Если $y = \infty$, то при $n \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}(M(j_n) \geq n) \sim \mathbf{P}(M(\infty) \geq n) \sim n^{-1/(1+\alpha)} \ell(n), \quad (6)$$

где функция ℓ медленно меняется на бесконечности.

(б) Если $0 < y < \infty$, то при $n \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}(M(j_n) \geq n) \sim Q(j_n) \psi(y),$$

где явное выражение для функции ψ дано ниже в формуле (74).

(с) Наконец, если $y = 0$, то при $n \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}(M(j_n) \geq n) \sim \mathbf{P}(M(1) \geq nj_n^{-1}) \sim \frac{\alpha j_n}{n}. \quad (7)$$

План оставшейся части статьи таков. В пп. 2.1 и 2.2 мы формулируем некоторые (частично известные) свойства критических процессов Гальтона–Ватсона, которые понадобятся в п. 3.1 при доказательстве утверждений (а) и (с) теоремы 2. Затем в п. 2.3 мы докажем условный принцип инвариантности для критических процессов Гальтона–Ватсона индекса $1 + \alpha$ (предложение 13), необходимый для доказательства теоремы 2(b) (также даваемого в п. 3.1). Свойства предельного процесса X^* , возникающего в упомянутом принципе инвариантности, исследуются в п. 2.4 и применяются в виде предложения 15 при доказательстве теоремы 1(b) в п. 3.3.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Основные свойства критических процессов индекса $1 + \alpha$. Мы начнем с дальнейших соглашений об обозначениях. Если символы L и ℓ (как в (1) и (6) соответственно) имеют индекс, то они обозначают функции, медленно меняющиеся в нуле и на бесконечности соответственно. В этом случае значение индекса соответствует первому месту, в котором этот индекс встретился. Например, $\ell_{\#}$ означает, что функция $\ell_{\#}$ впервые появилась в лемме $\#$. Далее, буква s всегда обозначает константу (положительную и конечную), значение которой может меняться от формулы к формуле, за исключением случаев, когда она имеет индекс, который может указывать на место, где эта константа появилась впервые. Мы будем также придерживаться следующего соглашения: если какое-либо математическое выражение (например, такое, как Z_n) определено только при целых значениях параметра (в данном случае параметра n), но мы используем при записи выражения параметр, который может принимать любые неотрицательные значения (как, например, параметр x в записи Z_x), то подразумевается, что в качестве значения параметра берется его целая часть (что в рассматриваемом случае соответствует $Z_{[x]}$).

Теперь мы перечислим некоторые основные свойства критических процессов, которые справедливы при выполнении условия (1). Первая лемма взята из работы [15, лемма 1].

Лемма 3. Для функции f из (1) справедливо соотношение

$$1 - f'(s) \sim (1 + \alpha)(1 - s)^{\alpha} L(1 - s) \quad \text{при } s \uparrow 1.$$

Следующая лемма принадлежит Р. С. Слэку [14].

Лемма 4. При $n \uparrow \infty$

$$\alpha Q^{\alpha}(n) L(Q(n)) \sim n^{-1}, \tag{8}$$

что влечет

$$Q(n) \sim n^{-1/\alpha} \ell_4(n) \tag{9}$$

для некоторой функции ℓ_4 (медленно меняющейся на бесконечности).

Положим $f_0(s) := s$ и обозначим $f_n(s) := f(f_{n-1}(s))$, $n \geq 1$, итерации функции f . Следующую лемму можно рассматривать как своего рода локальную предельную теорему.

Лемма 5. При $n \uparrow \infty$

$$d_n := \prod_{k=1}^{n-1} f'(f_k(0)) \sim n^{-1-1/\alpha} \ell_5(n). \quad (10)$$

Доказательство. Из лемм 3 и 4 вытекает, что

$$1 - f'(1 - Q(k)) = \frac{1 + \alpha}{\alpha k} (1 + \delta(k)),$$

где $\delta(k) \rightarrow 0$ при $k \uparrow \infty$. Следовательно, при $n \uparrow \infty$

$$\begin{aligned} d_n &= \exp \left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln f'(f_k(0)) \right] = \exp \left[- \frac{1 + \alpha}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (1 + \delta_1(k)) \right] \\ &\sim n^{-(1+\alpha)/\alpha} e^{-(1+\alpha)\gamma/\alpha} \exp \left[- \frac{1 + \alpha}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_1(k)}{k} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где γ — константа Эйлера, а $\delta_1(k) \rightarrow 0$ при $k \uparrow \infty$. Как показал Е. Сенета [13, теорема 1.2 раздела 1.5], функция

$$n \mapsto \exp \left[- \frac{1 + \alpha}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_1(k)}{k} \right]$$

медленно меняется на бесконечности. Объединение этого факта с асимптотическим представлением (11) доказывает лемму.

Вполне возможно, что следующее утверждение хорошо известно. Напомним, что $M(\infty) = S_0(\infty)$.

Лемма 6. При $n \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}(M(\infty) \geq n) = \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n) \sim n^{-1/(1+\alpha)} \ell_6(n). \quad (12)$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, монографию Т. Харриса [7, формула (1.13.3)]), что производящая функция $h(s) := \mathbf{E}s^{S_0(\infty)}$ является решением уравнения

$$h(s) = sf(h(s)), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

В силу предположения (1)

$$h(s) = sh(s) + (1 - h(s))^{1+\alpha} L(1 - h(s)),$$

что ввиду равенства $h(1) = 1$ дает

$$(1 - h(s))^{1+\alpha} L(1 - h(s)) \sim 1 - s \quad \text{при } s \uparrow 1. \quad (13)$$

Следовательно (см., например, [13, раздел 1.5]), при $s \uparrow 1$

$$1 - h(s) \sim (1 - s)^{1/(1+\alpha)} L_{(14)}(1 - s) \quad (14)$$

и

$$\frac{1 - h(s)}{1 - s} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_0(\infty) > n) s^n \sim \frac{L_{(14)}(1 - s)}{(1 - s)^{\alpha/(1+\alpha)}}.$$

Отсюда (см., например, книгу В. Феллера [5, гл. XIII])

$$\mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} n^{-1/(1+\alpha)} L_{(14)}\left(\frac{1}{n}\right) =: n^{-1/(1+\alpha)} \ell_6(n) \quad (15)$$

при $n \uparrow \infty$. Доказательство завершено.

Лемма 7. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) Если при $n \uparrow \infty$ параметр $j_n \geq 1$ меняется так, что $j_n/(Q(j_n)n) \rightarrow \infty$, то

$$\frac{Q(j_n)}{\mathbf{P}(M(\infty) \geq n)} \rightarrow 0.$$

(б) При $j \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(M(\infty) \geq \frac{j}{Q(j)}\right) \sim \frac{\alpha^{1/(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} Q(j).$$

Доказательство. (а) Вспоминая обозначение h , введенное в начале доказательства леммы 6, положим $b_x := 1 - h(1 - 1/x)$, $x \in [1, \infty)$. Из условия (13) следует, что при $x \uparrow \infty$

$$b_x^{1+\alpha} L(b_x) \sim x^{-1}, \quad (16)$$

в то время как соотношение (14) дает

$$b_x \sim x^{-1/(1+\alpha)} L_{(14)} x^{-1}. \quad (17)$$

Согласно нашим предположениям, $j_n \rightarrow \infty$, и, следовательно, в силу леммы 4

$$Q^{1+\alpha}(j_n) L(Q(j_n)) \sim \frac{Q(j_n)}{\alpha j_n} \quad \text{при } n \uparrow \infty. \quad (18)$$

Комбинируя этот факт с (16), получаем

$$\frac{Q^{1+\alpha}(j_n) L(Q(j_n))}{b_n^{1+\alpha} L(b_n)} \sim \frac{n Q(j_n)}{\alpha j_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \uparrow \infty. \quad (19)$$

Заметим, что функция $s \mapsto (1 - s)^{1+\alpha} L(1 - s) = f(s) - s$ монотонна (ее производная $f'(s) - 1$ неотрицательна для $s \in [0, 1]$) в силу критичности

процесса). Используя этот факт при $1-s = Q(j_n)$ и $1-s = b_n$ и вспоминая (19) и свойства медленно меняющихся функций, нетрудно убедиться в том, что

$$Q(j_n) b_n^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n j_n^{-1} Q(j_n) \rightarrow 0. \quad (20)$$

С другой стороны, из (15) и (17) следует, что

$$\mathbf{P}(M(\infty) \geq n) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} b_n \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty. \quad (21)$$

Объединение этого соотношения с (20) доказывает часть (а) рассматриваемой леммы.

(b) Заметим, что в силу (17) и (21)

$$\mathbf{P}(M(\infty) \geq \frac{j}{Q(j)}) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} b_{j/Q(j)} \quad \text{при} \quad j \uparrow \infty \quad (22)$$

и что

$$b_{j/Q(j)}^{1+\alpha} L(b_{j/Q(j)}) \sim \frac{Q(j)}{j} \quad \text{при} \quad j \uparrow \infty.$$

Этот факт, эквивалентность (18) и свойства медленно меняющихся функций приводят к соотношению

$$b_{j/Q(j)} \sim \alpha^{1/(1+\alpha)} Q(j) \quad \text{при} \quad j \uparrow \infty. \quad (23)$$

Для завершения доказательства осталось подставить (23) в (22).

2.2. Некоторые свойства критических процессов. В данном пункте мы обсудим сначала свойства произвольных критических процессов Гальтона–Ватсона (т.е. мы забываем на время об ограничении (1)). Для $R \geq 2$ положим

$$B_R := \mathbf{E}\{\xi(\xi-1); \xi \leq R\} \quad \text{и} \quad R_0 := \min\{R \geq 2: B_R > 0\} < \infty,$$

и пусть

$$\mathcal{F}(s) := \frac{1-f(s)}{1-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > j) s^j, \quad 0 \leq s < 1.$$

Лемма 8. Найдется положительная константа c_8 такая, что для любого критического процесса Гальтона–Ватсона

$$B_R \leq 2 \sum_{1 \leq j \leq R} j \mathbf{P}(\xi > j) \leq c_8 R(1 - \mathcal{F}(1 - R^{-1})), \quad R \geq 2. \quad (24)$$

Доказательство. Для доказательства первого неравенства в (24) достаточно воспользоваться «интегрированием по частям». Для j ,

принадлежащих множеству $1 \leq j \leq R$, и $x \in (0, 1)$ справедливо следующая элементарная оценка:

$$1 - (1 - x)^j \geq jx(1 - x)^{j-1} \geq jx(1 - x)^R,$$

которую можно переписать в виде

$$j \leq x^{-1}(1 - x)^{-R}(1 - (1 - x)^j).$$

Из первого неравенства в (24), выбирая $x = 1/R$ и используя критичность $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > j) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} B_R &\leq 2R \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{-R} \sum_{0 \leq j \leq R} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{R}\right)^j\right) \mathbf{P}(\xi > j) \\ &= 2R \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{-R} \left(1 - \sum_{j > R} \mathbf{P}(\xi > j) - \sum_{0 \leq j \leq R} \left(1 - \frac{1}{R}\right)^j \mathbf{P}(\xi > j)\right) \\ &\leq 2R \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{-R} \left(1 - \sum_{j \geq 0} \left(1 - \frac{1}{R}\right)^j \mathbf{P}(\xi > j)\right) \\ &\leq cR \left(1 - \mathcal{F}\left(1 - \frac{1}{R}\right)\right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 3 работы С. В. Нагаева и В. И. Вахтеля [10].

Лемма 9. Для $m \geq 0$, $k \geq 1$, $y_0 > 0$ и $R \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) &\leq \left(y_0 + \frac{1}{R}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + (e^2 + e^{y_0 R}) m B_R / 2}\right)^k - 1\right]^{-1} \\ &\quad + m \mathbf{P}(\xi > R). \end{aligned} \quad (25)$$

Если дисперсия случайной величины ξ , которую мы временно обозначим B_{∞} , конечна и положительна, то в соответствии с неравенством Дуба

$$\mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) \leq \frac{m B_{\infty} + 1}{k^2} \leq \left(1 + \frac{1}{B_{\infty}}\right) \frac{m B_{\infty}}{k^2}. \quad (26)$$

Оценка (25) позволяет нам вывести аналогичную оценку без предположения конечности $\mathbf{D}\xi$:

Лемма 10. Существуют конечные константы $c_{(27)}$ и c_{10} такие, что

$$\mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) \leq c_{(27)} \frac{m B_k}{k^2} + m \mathbf{P}\left(\xi > \frac{k}{2}\right) \quad (27)$$

для всех $k, m \geq 1$, удовлетворяющих неравенству $k/(m B_k) > c_{10}$.

Мы видим, что для достаточно больших k первое слагаемое в правой части (27) совпадает с (26) (с точностью до константы и замены неурезанной дисперсии урезанной дисперсией B_k). Второе слагаемое компенсирует урезание.

Доказательство леммы 10. Ввиду леммы 8 $B_k/k \rightarrow 0$ при $k \uparrow \infty$. Следовательно, найдется константа $c_{(28)} \geq e$ такая, что для $k, m \geq 1$, удовлетворяющих неравенству $k/(mB_k) > c_{(28)}$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} y_0 &:= y_0(k, m) := \frac{2}{k} \ln \frac{k}{mB_k} - \frac{3}{k} \ln \ln \frac{k}{mB_k} \\ &= \frac{1}{k} \ln \left(\left(\frac{k}{mB_k} \right)^2 \ln^{-3} \left(\frac{k}{mB_k} \right) \right) > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда, полагая $R = k/2 \geq 2$ в (25) и замечая, что B_R является неубывающей функцией по R , нетрудно вывести из леммы 9 с учетом нашего выбора R , что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) &\leq \left(y_0 + \frac{2}{k} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k/2} \right)^k - 1 \right]^{-1} \\ &\quad + m \mathbf{P} \left(\xi > \frac{k}{2} \right). \end{aligned}$$

Из оценок

$$y_0 \leq \frac{2}{k} \ln \frac{k}{mB_k} \leq \frac{2}{k} \ln \frac{k}{B_{R_0}},$$

справедливых для всех $k \geq R_0$, следует, что $y_0 = y_0(k, m) \downarrow 0$ при $k \uparrow \infty$, и, кроме того, существует константа $c_{(29)}$ такая, что для $k, m \geq 1$, удовлетворяющих неравенству $k/(mB_k) \geq c_{(29)}$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k &= \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{k}{mB_k} \ln^{-3/2} \left(\frac{k}{mB_k} \right) \right) mB_k \\ &\leq 2k \ln^{-3/2} \left(\frac{k}{mB_k} \right) \leq \frac{1}{4y_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Следовательно, для указанных значений k и m

$$\frac{1}{y_0} + \frac{1}{2} (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k \leq \frac{5}{4y_0}.$$

Ясно, что для достаточно малых $y_0 > 0$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k/2} \right)^k &\geq \left(1 + \frac{4y_0}{5} \right)^k \\ &= \exp \left[k \ln \left(1 + \frac{4y_0}{5} \right) \right] \geq \exp \left[\frac{4ky_0}{5} \left(1 - \frac{y_0}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В силу определения y_0 существует константа $c_{(30)}$ такая, что

$$1 - \frac{y_0}{2} \geq \frac{5}{6} \quad \text{и} \quad y_0 > \frac{6}{7} \frac{2}{k} \ln \frac{k}{mB_k} \quad (30)$$

при $k/(mB_k) > c_{(30)}$. Таким образом, при $k/(mB_k) \geq c_{(31)} := \max(c_{(28)}, c_{(29)}, c_{(30)})$ справедлива оценка

$$\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k/2}\right)^k \geq \left(\frac{k}{mB_k}\right)^{8/7}. \quad (31)$$

Более того, если $k/(mB_k) > c_{10} := \max(c_{(31)}, 2)$, то

$$\left(\left(1 + \frac{1}{1/y_0 + (e^2 + e^{y_0 k/2}) mB_k/2}\right)^k - 1\right)^{-1} \leq 2 \left(\frac{mB_k}{k}\right)^{8/7}. \quad (32)$$

Объединяя (28)–(32), заключаем, что при $k/(mB_k) > c_{10}$

$$\mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) \leq \frac{2}{k} \left(2 + \ln \frac{k}{mB_k}\right) \left(\frac{mB_k}{k}\right)^{8/7} + m\mathbf{P}\left(\xi > \frac{k}{2}\right).$$

Ограниченность функции $x \mapsto x^{-1/7} \ln x$ при $x \geq 2$ завершает доказательство леммы.

Теперь мы снова вернемся к критическим процессам индекса $1 + \alpha$.

Лемма 11. Если выполнено условие (1), то для любого $\beta \in (1, 1 + \alpha)$ найдется константа $c_{11} = c_{11}(\beta)$ такая, что

$$\mathbf{E}Z_m^\beta \leq c_{11}Q^{1-\beta}(m), \quad m \geq 1.$$

Доказательство. В силу условия (1) при $0 \leq s < 1$

$$\frac{1 - \mathcal{F}(s)}{1 - s} = \frac{f(s) - s}{(1 - s)^2} = \sum_{l=0}^{\infty} s^l \sum_{i=l+1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > i) = \frac{L(1 - s)}{(1 - s)^{1-\alpha}}. \quad (33)$$

Поэтому в соответствии с леммой 8

$$B_k \leq c_8 k^{1-\alpha} L(k^{-1}) \quad (34)$$

для всех достаточно больших k . С другой стороны, формула (33) и тауберова теорема (см., например, [5, теорема 8.5.5]) влекут

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=l+1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > i) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} k^{1-\alpha} L\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при} \quad k \uparrow \infty.$$

Следовательно, для всех достаточно больших k

$$\sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > i) \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} k^{-\alpha} L\left(\frac{1}{k}\right)$$

и

$$k\mathbf{P}(\xi > 2k) \leq \sum_{i=k+1}^{2k} \mathbf{P}(\xi > i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(\xi > i),$$

что приводит к оценке

$$\mathbf{P}(\xi > k) \leq ck^{-\alpha-1}L(k^{-1}). \quad (35)$$

Объединяя (27), (34) и (35), мы видим, что найдутся константы $c_{(36)}$ и $c'_{(36)}$ такие, что

$$\mathbf{P}(Z_m \geq k) \leq \mathbf{P}(M_{m+1} \geq k) \leq c'_{(36)}mk^{-1-\alpha}L(k^{-1}) \quad (36)$$

при $m \geq 1$ и всех $k > c_{(36)}/Q(m)$. Ясно, что для $\beta \in (1, 1 + \alpha)$

$$\mathbf{E}Z_m^\beta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta k^{\beta-1} \mathbf{P}(Z_m \geq k).$$

Разобьем последнюю сумму на две: $k \leq c_{(36)}/Q(m)$ и $k > c_{(36)}/Q(m)$. В силу критичности сумма по первому промежутку ограничена сверху величиной $\beta c_{(36)}^{\beta-1} Q^{1-\beta}(m) = c Q^{1-\beta}(m)$ (с константой c , зависящей от β). С другой стороны, в силу (36) сумма по второму промежутку не превосходит

$$\beta c'_{(36)} m \sum_{k > c_{(36)}/Q(m)} k^{\beta-\alpha-2} L(k^{-1}) \leq cm Q^{1+\alpha-\beta}(m) L(Q(m))$$

(см., например, [5, теорема 8.9.1]), что в силу (8) приводит к оценке вида $cQ^{1-\beta}(m)$, что в сочетании с оценкой по первому промежутку завершает доказательство.

Лемма 12. Если выполнено условие (1), то для $1 < \beta < 1 + \alpha$ и $\varepsilon > 0$ существует константа $c_{12} = c_{12}(\beta, \varepsilon)$ такая, что при $j \geq 1$ и всех y , удовлетворяющих неравенству $y \geq 2/\varepsilon$, справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left\{\min_{l < j} Z_l < y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\} \leq c_{12} \left(\frac{1}{yQ(j)}\right)^{\beta-1}. \quad (37)$$

Более того, для всех j и y таких, что $yj^{-1} \geq 2/\varepsilon$,

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{l=0}^{j-1} Z_l < y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)yj^{-1}\right\} \leq c_{12} \left(\frac{j}{yQ(j)}\right)^{\beta-1}. \quad (38)$$

Доказательство. Зафиксируем $j \geq 1$ и $y \geq 2/\varepsilon$. Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\min_{l \leq j-1} Z_l < y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\min_{l \leq j-1} (Z_l - Z_0) < y - Z_0 \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Очевидно, неравенство $y \geq 2/\varepsilon$ влечет $Z_0 - y = [(1 + \varepsilon)y] - y \geq (\varepsilon/2)y$. Следовательно, вероятность (39) не превосходит

$$\mathbf{P}\left\{\max_{l \leq j-1} |Z_l - Z_0| > \frac{\varepsilon}{2}y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\}.$$

Используя этот факт и неравенство Дуба, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\min_{l \leq j-1} Z_l < y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\} \\ & \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^\beta \frac{\mathbf{E}\{|Z_{j-1} - Z_0|^\beta \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\}}{y^\beta}. \end{aligned} \quad (40)$$

Для фиксированного j обозначим $Z_{j-1}^{(k)}$, $k \geq 1$, независимые копии Z_{j-1} при условии $Z_0 = 1$. В силу неравенства фон Бара–Эсеена [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{|Z_{j-1} - Z_0|^\beta \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\} &= \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{(1+\varepsilon)y} (Z_{j-1}^{(k)} - 1)\right|^\beta \\ &\leq (1 + \varepsilon)y \mathbf{E}\{|Z_{j-1} - 1|^\beta \mid Z_0 = 1\}. \end{aligned}$$

Используя теперь лемму 11, легко увидеть, что

$$\mathbf{E}\{|Z_{j-1} - 1|^\beta \mid Z_0 = 1\} \leq 1 + c_{11} Q^{1-\beta}(j) \leq (1 + c_{11}) Q^{1-\beta}(j). \quad (41)$$

Комбинируя (40) и (41), приходим к (37).

Замечая, что неравенство $\sum_{l=0}^{j-1} Z_l < y$ влечет оценку $\min_{l \leq j-1} Z_l < yj^{-1}$, и используя уже доказанное неравенство (37), нетрудно убедиться в справедливости (38), что и завершает доказательство леммы.

2.3. Условный принцип инвариантности. Начиная с этого момента, мы будем всегда предполагать справедливость нашего основного условия (1). В данном пункте мы докажем сходимость по распределению условного нормированного процесса Гальтона–Ватсона

$$\{Q(n) Z_{nt}: 0 \leq t \leq t_0 \mid Z_n > 0\} \quad \text{при } n \uparrow \infty.$$

Мы начнем с описания искомого предельного процесса X^* . Рассмотрим сначала ветвящийся процесс с непрерывным множеством состояний $\{X(t): 0 \leq t < \infty\}$ индекса $1 + \alpha$. Более точно, процесс X является (однородным по времени) марковским процессом со значениями во множестве $[0, \infty)$, с непрерывными справа траекториями без разрывов второго рода и переходными функциями, имеющими преобразования Лапласа

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda X(t)} \mid X(0) = x\} = \exp[-x(t + \lambda^{-\alpha})^{-1/\alpha}], \quad \lambda, t, x \geq 0.$$

Введем случайную величину $\chi \geq 0$, распределение которой имеет преобразование Лапласа

$$\mathbf{E}e^{-\lambda \chi} = 1 - (1 + \lambda^{-\alpha})^{-1/\alpha}, \quad \lambda \geq 0 \quad (42)$$

(см., например, [14]). В соответствии с общей конструкцией, принадлежащей Р. Даррету [4], введем марковский процесс $\{X^+(t): 0 \leq t \leq 1\}$

с непрерывными справа траекториями без разрывов второго рода, который имеет следующие свойства: для $y > 0$ и $0 < t \leq 1$

$$\mathbf{P}(X^+(t) \in dy) = t^{-1/\alpha} \mathbf{P}(t^{1/\alpha} \chi \in dy) \mathbf{P}\{X(1-t) > 0 \mid X(0) = y\} \quad (43)$$

и для $x > 0$ и $0 \leq s < t \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X^+(t) \in dy \mid X^+(s) = x\} \\ = \frac{\mathbf{P}\{X(t-s) \in dy; X(t-s) > 0 \mid X(0) = x\}}{\mathbf{P}\{X(t-s) > 0 \mid X(0) = x\}} \\ \times \mathbf{P}\{X(1-t) > 0 \mid X(0) = x\}. \end{aligned}$$

Наконец, определим марковский процесс $\{X^*(t): 0 \leq t < \infty\}$ как склейку процессов X^+ и X . Более точно,

$$X^*(t) := \begin{cases} X^+(t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ X^{X^+(1)}(t-1), & \text{если } t \geq 1, \end{cases} \quad (44)$$

где символ X^x означает, что процесс X стартовал из точки $X(0) = x$, причем семейство $\{X^x: x > 0\}$ не зависит от $\{X^+(t): 0 \leq t \leq 1\}$.

Предложение 13. Пусть $0 < t_0 < \infty$. Имеет место следующая сходимость по распределению в $D[0, t_0]$:

$$\{Q(n) Z_{nt}: 0 \leq t \leq t_0 \mid Z_n > 0\} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} \{X^*(t): 0 \leq t \leq t_0\}. \quad (45)$$

Доказательство. Достаточно показать, что для $x > 0$

$$\left\{Q(n) Z_{nt}: 0 \leq t \leq t_0 \mid Z_0 = \frac{x}{Q(n)}\right\} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} \{X(t): 0 \leq t \leq t_0 \mid X(0) = x\} \quad (46)$$

в $D[0, t_0]$ и что

$$\{Q(n) Z_{nt}: 0 \leq t \leq 1 \mid Z_n > 0\} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} \{X^+(t): 0 \leq t \leq 1 \mid X^+(0) = 0\} \quad (47)$$

в $D[0, 1]$. Действительно, утверждение (45) легко следует из (46) и (47), марковости процессов X^+ и X и определения случайного процесса X^* .

Из условной предельной теоремы работы [14] легко вывести, что для любых $t, x > 0$

$$\left\{Q(n) Z_{nt} \mid Z_0 = \frac{x}{Q(n)}\right\} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} \{X(t) \mid X(0) = x\}. \quad (48)$$

Согласно теореме 3.4 статьи А. Гримвалла [6], справедливость (48) влечет (46).

Для проверки сходимости (47) мы будем использовать теорему 3.9 из [4], согласно которой в нашей ситуации необходимо показать, что,

наряду с (46), справедливы следующие четыре утверждения:

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq t} X(s) > 0 \mid X(0) = x\right\} > 0, \quad t, x > 0; \quad (49)$$

$$\mathbf{P}\left\{Z_{nt_n} > 0 \mid Z_0 = \frac{x_n}{Q(n)}\right\} \rightarrow \mathbf{P}\{X(t) > 0 \mid X(0) = x\}, \quad (50)$$

если $t_n \rightarrow t > 0$ и $x_n \rightarrow x > 0$;

$$\mathbf{P}\left\{Z_{nt_n} > 0 \mid Z_0 = \frac{x_n}{Q(n)}\right\} \rightarrow 0, \quad (51)$$

если $t_n \rightarrow t > 0$ и $x_n \rightarrow 0$; наконец,

$$X^+(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \quad \text{при } t \downarrow 0. \quad (52)$$

Поскольку состояние 0 является поглощающим для ветвящегося процесса X , то для $t, x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq s \leq t} X(s) > 0 \mid X(0) = x\right\} &= \mathbf{P}\{X(t) > 0 \mid X(0) = x\} \\ &= 1 - \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathbf{E}\{e^{-\lambda X(t)} \mid X(0) = x\} = 1 - \exp[-xt^{-1/\alpha}], \end{aligned} \quad (53)$$

что доказывает (49). Если $t_n \rightarrow t > 0$ и $x_n \rightarrow x > 0$ при $n \uparrow \infty$, то ввиду (9) и свойств медленно меняющихся функций

$$\frac{Q(nt_n)}{Q(n)} \rightarrow t^{-1/\alpha},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{Z_{nt_n} > 0 \mid Z_0 = \frac{x_n}{Q(n)}\right\} &= 1 - (1 - Q(nt_n))^{x_n/Q(n)} \\ &\rightarrow 1 - \exp[-xt^{-1/\alpha}]. \end{aligned} \quad (54)$$

Объединяя (53) и (54), мы получаем (50) и (51).

Наконец, из (42) вытекает, что $\mathbf{E}\chi^\beta < \infty$ для любого $\beta \in (1, 1 + \alpha)$. Используя этот факт в сочетании с (43), мы видим, что для любого такого β и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(X^+(t) \geq \varepsilon) \leq t^{-1/\alpha} \mathbf{P}(t^{1/\alpha} \chi \geq \varepsilon) \leq t^{(\beta-1)/\alpha} \varepsilon^{-\beta} \mathbf{E}\chi^\beta \rightarrow 0$$

при $t \downarrow 0$. Это оправдывает (52). Таким образом, утверждение (47) установлено, что и завершает доказательство предложения.

2.4. О предельном процессе X^* . Для удобства введем обозначение

$$V^*(T) := \sup_{0 \leq s \leq T-1} \int_s^{s+1} X^*(u) du, \quad T \geq 1. \quad (55)$$

Кроме того, если вместо X^* мы будем иметь дело с X , то мы будем использовать соответствующую этому процессу характеристику $V(T)$.

Предложение 14. Справедливо представление

$$\mathbf{E}V^*(1) = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}.$$

Доказательство. Из определения процессов $X^*(u)$ и $V^*(T)$ вытекает, что

$$V^*(1) = \int_0^1 X^*(u) du = \int_0^1 X^+(u) du.$$

В силу (53)

$$\mathbf{P}\{X(1-t) > 0 \mid X(0) = y\} = 1 - \exp[-y(1-t)^{-1/\alpha}].$$

Отсюда и из (43), полагая $h(t) := t^{1/\alpha}(1-t)^{-1/\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X^+(t) &= \int_0^\infty t^{-1/\alpha} y \mathbf{P}(t^{1/\alpha} \chi \in dy) (1 - \exp[-y(1-t)^{-1/\alpha}]) \\ &= \int_0^\infty z(1 - \exp[-zh(t)]) \mathbf{P}(\chi \in dy) = \mathbf{E}\chi - \mathbf{E}\chi e^{-h(t)\chi}. \end{aligned}$$

В силу (42)

$$\mathbf{E}\chi e^{-u\chi} = (1 + u^\alpha)^{-1/\alpha-1}.$$

Используя это равенство, находим

$$\mathbf{E}X^+(t) = 1 - (1 + h^\alpha(t))^{-1/\alpha-1} = 1 - (1-t)^{1/\alpha+1}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}V^*(1) = \mathbf{E} \int_0^1 X^*(u) du = \int_0^1 \mathbf{E}X^+(u) du = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1},$$

что и требовалось.

Предложение 15. При $T \uparrow \infty$

$$\mathbf{E}V^*(T) \sim \ln T.$$

Доказательство этого предложения будет получено при помощи следующих трех лемм.

Лемма 16. Для $\beta \in (1, 1 + \alpha)$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} X^+(t) \geq x\right) \leq 1 \wedge \frac{c_{11}}{x^\beta}, \quad x > 0. \quad (56)$$

Более того, для всех $T > 0$ и $0 < y \leq x$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq x \mid X(0) = y\right\} \leq c_{11} T^{(\beta-1)/\alpha} \frac{y}{x^\beta}. \quad (57)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из принципа инвариантности Донскера–Прохорова и соотношения (47) вытекает, что для $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} X^+(t) \geq x\right) = \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\{Q(n) M_n \geq x \mid Z_n > 0\}. \quad (58)$$

Используя неравенство Дуба и лемму 11, получаем

$$\mathbf{P}\{Q(n) M_n \geq x \mid Z_n > 0\} \leq Q^{-1}(n) \mathbf{P}(Q(n) M_n \geq x) \leq Q^{\beta-1}(n) \frac{\mathbf{E}Z_n^\beta}{x^\beta} \leq \frac{c_{11}}{x^\beta}.$$

Отсюда и из (58) легко следует оценка (56).

Для доказательства (57) заметим, что в силу неравенств Дуба и фон Бара–Эссеена и леммы 11

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{Q(n) M_{nT} \geq x \mid Z_0 = \frac{y}{Q(n)}\right\} &\leq \frac{y}{Q(n)} \frac{Q^\beta(n) \mathbf{E}\{Z_{nT}^\beta \mid Z_0 = 1\}}{x^\beta} \\ &\leq \frac{c_{11}y}{x^\beta} \left(\frac{Q(n)}{Q(nT)}\right)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (46) и последней оценки,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq x \mid X(0) = y\right\} &= \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\left\{Q(n) M_{nT} \geq x \mid Z_0 = \frac{y}{Q(n)}\right\} \\ &\leq \frac{c_{11}y}{x^\beta} \lim_{n \uparrow \infty} \left(\frac{Q(n)}{Q(nT)}\right)^{\beta-1} = \frac{c_{11}y}{x^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha}. \end{aligned}$$

Первая из необходимых нам лемм доказана.

Лемма 17. Для $0 < y \leq x < \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq x \mid X(0) = y\right\} = 1 - \left(1 - \frac{y}{x}\right)^\alpha. \quad (59)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение вытекает из принципа инвариантности Донскера–Прохорова, леммы 1 работы [3] и теоремы 2 статьи [11].

Лемма 18. Для $\varepsilon > 0$ существует константа $c_{18} = c_{18}(\varepsilon)$ такая, что для всех $\beta \in (1, 1 + \alpha)$ и $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq t \leq 1} X(t) \leq x \mid X(0) = (1 + \varepsilon)x\right\} \leq 1 \wedge \frac{c_{18}}{x^{\beta-1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (37), мы видим, что для $\varepsilon > 0$, $j \geq 1$ и $y > 0$ таких, что $\varepsilon y \geq 2$, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\min_{l < j} Z_l < y \mid Z_0 = (1 + \varepsilon)y\right\} \leq c_{12} \left(\frac{1}{Q(j)y}\right)^{\beta-1}.$$

Выбирая теперь $y = x/Q(j)$, мы получаем для всех достаточно больших значений j

$$\mathbf{P}\left\{\min_{l < j} Z_l < \frac{x}{Q(j)} \mid Z_0 = \frac{x(1+\varepsilon)}{Q(j)}\right\} \leq \frac{c_{12}}{x^{\beta-1}}.$$

Отсюда, применяя принцип инвариантности Донскера–Прохорова, (46), (50) и устремляя j к бесконечности, несложно вывести желаемую оценку.

Установленные выше три леммы позволяют нам вывести предложение 15 из следующих двух лемм.

Лемма 19. *Имеем*

$$\limsup_{T \uparrow \infty} \frac{1}{\ln T} \mathbf{E}V^*(T) \leq 1.$$

Доказательство. Ясно, что

$$V^*(T) \leq \sup_{0 \leq s \leq T} X^*(s).$$

Из определения (44) процесса X^* следует, что для $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} X^*(s) \geq x\right) &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} X^+(s) \geq x\right) \\ &+ \int_0^x \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq x \mid X(0) = y\right\}. \end{aligned}$$

Ввиду (56)

$$\int_1^\infty \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} X^+(s) \geq x\right) dx < \infty.$$

Зафиксируем произвольное значение $0 < \varepsilon < 1$. Разбивая для $x > 0$ интервал $(0, x)$ соответствующим образом и опираясь на (57) и (59), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^x \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq x \mid X(0) = y\right\} \\ &\leq \int_0^{\varepsilon x} \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \min\left(\frac{c_{11}}{x^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha} y, 1 - \left(1 - \frac{y}{x}\right)^\alpha\right) \\ &+ \mathbf{P}(X^+(1) \geq \varepsilon x). \end{aligned}$$

Замечая, что по теореме о промежуточном значении для всех $y \leq \varepsilon x$

$$1 - \left(1 - \frac{y}{x}\right)^\alpha \leq \frac{\alpha y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{\alpha-1} \leq \alpha(1-\varepsilon)^{\alpha-1} \frac{y}{x},$$

выводим оценку

$$\begin{aligned} &\int_0^{\varepsilon x} \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \min\left(\frac{c_{11}}{x^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha} y, 1 - \left(1 - \frac{y}{x}\right)^\alpha\right) \\ &\leq \min\left(\frac{c_{11}}{x^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha}, (1-\varepsilon)^{\alpha-1} \frac{\alpha}{x}\right), \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{E}X^+(1) = \mathbf{E}\chi = 1$. Отсюда, разбивая промежуток интегрирования $(1, \infty)$ на подходящие части, находим

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty dx \int_0^x \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \geq x \mid X(0) = y \right\} \\ & \leq \alpha(1 - \varepsilon)^{\alpha-1} \int_1^{T^{1/\alpha}} \frac{dx}{x} + c_{11} T^{(\beta-1)/\alpha} \int_{T^{1/\alpha}}^\infty \frac{dx}{x^\beta} \\ & \quad + \int_1^\infty dx \mathbf{P}(X^+(1) \geq \varepsilon x) \leq (1 - \varepsilon)^{\alpha-1} \ln T + c + \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где последняя оценка получается при помощи замены переменных и равенства $\mathbf{E}X^+(1) = 1$. Это доказывает желаемое утверждение.

Лемма 20. *Имеем*

$$\liminf_{T \uparrow \infty} \frac{1}{\ln T} \mathbf{E}V^*(T) \geq 1.$$

Доказательство. Вспоминая обозначение V , упомянутое после формулы (55), нетрудно проверить, что для $T \geq 2$ и $x > 0$

$$\mathbf{P}(V^*(T) \geq x) \geq \int_{(0, \infty)} \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\{V(T-1) \geq x \mid X(0) = y\}.$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим $\rho := \inf\{u \geq 0: X(u) \geq (1 + \varepsilon)x\}$ (эта величина равна бесконечности, если $\sup_{u \geq 0} X(u) < (1 + \varepsilon)x$). Ввиду строго марковского свойства и свойств ветвящихся процессов с непрерывным множеством состояний

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{V(T-1) \geq x \mid X(0) = y\} & \geq \int_0^{T-2} \mathbf{P}\{V(T-1) \geq x, \rho \in dw \mid X(0) = y\} \\ & \geq \int_0^{T-2} \mathbf{P}\left\{ \int_w^{w+1} X(u) du \geq x, \rho \in dw \mid X(0) = y \right\} \\ & \geq \int_0^{T-2} \mathbf{P}\left\{ \inf_{w \leq u \leq w+1} X(u) \geq x, \rho \in dw \mid X(0) = y \right\}. \end{aligned}$$

Используя строго марковское свойство в момент ρ , мы видим, что последний интеграл совпадает с

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-2} \int_{(1+\varepsilon)x}^\infty \mathbf{P}\{\rho \in dw, X(w) \in dz \mid X(0) = y\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\left\{ \inf_{0 \leq u \leq 1} X(u) \geq x \mid X(0) = z \right\} \\ & \geq \mathbf{P}\left\{ \inf_{0 \leq u \leq 1} X(u) \geq x \mid X(0) = (1 + \varepsilon)x \right\} \mathbf{P}\{\rho \leq T-2 \mid X(0) = y\}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 18, имеем при всех $x \geq x_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{V(T-1) \geq x \mid X(0) = y\} \\ & \geq (1 - \varepsilon) \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T-2} X(t) \geq (1 + \varepsilon)x \mid X(0) = y \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T-2} X(t) \geq (1+\varepsilon)x \mid X(0)=y\right\} \\ & \geq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq (1+\varepsilon)x \mid X(0)=y\right\} - \mathbf{P}\{X(T-2) > 0 \mid X(0)=y\}. \end{aligned}$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(V^*(T) \geq x) \\ & \geq (1-\varepsilon) \int_0^\infty \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq (1+\varepsilon)x \mid X(0)=y\right\} \\ & \quad - \int_0^\infty \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\{X(T-2) > 0 \mid X(0)=y\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Из (42), (43) и (53) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \mathbf{P}\{X(T-2) > 0 \mid X(0)=y\} \\ & = 1 - \int_0^\infty \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \exp[-y(T-2)^{-1/\alpha}] = (T-1)^{-1/\alpha}. \end{aligned} \quad (61)$$

Из соотношения (59) вытекает, что для фиксированного $y > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq x \mid X(0)=y\right\} \sim \frac{\alpha y}{x} \quad \text{при } x \uparrow \infty.$$

Отсюда в силу леммы Фату следует, что при $A \geq 1$

$$\begin{aligned} & \liminf_{x \uparrow \infty} x \int_0^\infty \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq (1+\varepsilon)x \mid X(0)=y\right\} \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \\ & \geq \lim_{x \uparrow \infty} x \int_0^A \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} X(t) \geq (1+\varepsilon)x \mid X(0)=y\right\} \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \\ & = \alpha(1+\varepsilon)^{-1} \int_0^A y \mathbf{P}(X^+(1) \in dy) \xrightarrow{A \uparrow \infty} \alpha(1+\varepsilon)^{-1}. \end{aligned} \quad (62)$$

Подстановка соотношений (61) и (62) в (60) дает для достаточно больших значений x :

$$\mathbf{P}(V^*(T) \geq x) \geq \frac{\alpha}{x} (1-2\varepsilon) - (T-1)^{-1/\alpha}.$$

Следовательно, для достаточно больших значений T

$$\int_{T^\varepsilon}^{T^{1/\alpha}} \mathbf{P}(V^*(T) \geq x) dx \geq (1-2\varepsilon) \left(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon\right) \alpha \ln T - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{-1/\alpha}.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

3. Доказательство основных результатов

3.1. Доказательство теоремы 2. (а) В силу монотонности по $j \geq 1$

$$\mathbf{P}(M(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M(\infty) \geq n). \quad (63)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j) \geq n) &\geq \mathbf{P}(M(j) \geq n, Z_j = 0) = \mathbf{P}(M(\infty) \geq n, Z_j = 0) \\ &\geq \mathbf{P}(M(\infty) \geq n) - \mathbf{P}(Z_j > 0). \end{aligned} \quad (64)$$

Применение лемм 6 и 7(а) к (63) и (64) с $j = j_n$ доказывает часть (а) теоремы.

(б) Вспоминая, что $M(\infty) = S_0(\infty)$, и замечая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j_n) \geq n, Z_{j_n} = 0) &= \mathbf{P}(M(\infty) \geq n, Z_{j_n} = 0) \\ &= \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n) - \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n, Z_{j_n} > 0), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j_n) \geq n) &= \mathbf{P}(M(j_n) \geq n, Z_{j_n} > 0) + \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n) \\ &\quad - \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n, Z_{j_n} > 0). \end{aligned} \quad (65)$$

Исследуем каждый член в правой части соотношения (65) отдельно. Оценим прежде всего второе слагаемое. В силу (6), леммы 7(б) и наших условий, при $n \uparrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n) &\sim \mathbf{P}\left(S_0(\infty) \geq \frac{j_n}{yQ(j_n)}\right) \sim \mathbf{P}\left(S_0(\infty) \geq \frac{j_n y^{-\alpha/(1+\alpha)}}{Q(j_n y^{-\alpha/(1+\alpha)})}\right) \\ &\sim \frac{\alpha^{1/(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} Q(j_n y^{-\alpha/(1+\alpha)}) \sim \frac{(\alpha y)^{1/(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} Q(j_n). \end{aligned} \quad (66)$$

Для изучения асимптотического поведения последней вероятности в (65) заметим, что для любого фиксированного $T \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} &= \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n, Z_{Tj_n} = 0 \mid Z_{j_n} > 0\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n, Z_{Tj_n} > 0 \mid Z_{j_n} > 0\}. \end{aligned} \quad (67)$$

Первая вероятность в правой части (67) не превосходит

$$\mathbf{P}\{S_0(Tj_n) \geq n, Z_{Tj_n} = 0 \mid Z_{j_n} > 0\} \leq \mathbf{P}\{S_0(Tj_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\}.$$

Что касается оставшейся вероятности в представлении (67), то в силу (9) и свойств медленно меняющихся функций существует константа $c_{(68)}$ такая, что для всех $n \geq 1$ и $j_n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n, Z_{Tj_n} > 0 \mid Z_{j_n} > 0\} &\leq \mathbf{P}\{Z_{Tj_n} > 0 \mid Z_{j_n} > 0\} \\ &= \frac{Q(Tj_n)}{Q(j_n)} \leq \frac{c_{(68)}}{T^{1/\alpha}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Объединяя (67) и (68), получаем

$$0 \leq \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} - \mathbf{P}\{S_0(Tj_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} \leq c_{(68)} T^{-1/\alpha}. \quad (69)$$

Используя принцип инвариантности Донскера–Прохорова и предложение 13, мы видим, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\{S_0(Tj_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} \\ &= \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \int_0^{T-j_n^{-1}} Q(j_n) Z_{vj_n} dv \geq \frac{nQ(j_n)}{j_n} \mid Z_{j_n} > 0 \right\} \\ &= \mathbf{P}\left(\int_0^T X^*(v) dv \geq y^{-1} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Поскольку T может быть выбрано сколь угодно большим, (69) и (70) влекут

$$\lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\{S_0(\infty) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} = \mathbf{P}\left(\int_0^\infty X^*(v) dv \geq y^{-1} \right).$$

Таким образом, при $n \uparrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_0(\infty) \geq n, Z_{j_n} > 0) \sim Q(j_n) \mathbf{P}\left(\int_0^\infty X^*(v) dv \geq y^{-1} \right). \quad (71)$$

Наконец, для оценки первой вероятности в правой части (65) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} &= \mathbf{P}\{M(j_n) \geq n, Z_{Tj_n} = 0 \mid Z_{j_n} > 0\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{M(j_n) \geq n, Z_{Tj_n} > 0 \mid Z_{j_n} > 0\}, \end{aligned}$$

где первое слагаемое может быть переписано в виде

$$\mathbf{P}\{M_{Tj_n}(j_n) \geq n, Z_{Tj_n} = 0 \mid Z_{j_n} > 0\} \leq \mathbf{P}\{M_{Tj_n}(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\},$$

в то время как оставшийся член оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}\{Z_{Tj_n} > 0 \mid Z_{j_n} > 0\}.$$

Используя эти оценки и применяя (68) еще раз, получаем

$$0 \leq \mathbf{P}\{M(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} - \mathbf{P}\{M_{Tj_n}(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} \leq cT^{-1/\alpha}. \quad (72)$$

Отталкиваясь от представления

$$M_{Tj_n}(j_n) = \max_{0 \leq k \leq (T-1)j_n} \sum_{l=k}^{k+j_n-1} Z_l = j_n \max_{0 \leq u \leq T-1} \int_u^{u+1-j_n^{-1}} Z_{vj_n} dv$$

и применяя снова принцип инвариантности Донскера–Прохорова, а также предложение 13, мы видим, что асимптотическое соотношение $j_n^{-1}Q(j_n)n \rightarrow y$ влечет

$$\begin{aligned} & \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\{M_{Tj_n}(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} \\ &= \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\left\{ j_n^{-1}Q(j_n)M(j_n) \geq \frac{Q(j_n)n}{j_n} \mid Z_{j_n} > 0 \right\} = \mathbf{P}(V^*(T) \geq y^{-1}). \end{aligned}$$

Отсюда, устремляя T к бесконечности и принимая во внимание (72), получаем

$$\lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{P}\{M(j_n) \geq n \mid Z_{j_n} > 0\} = \mathbf{P}(V^*(\infty) \geq y^{-1}). \quad (73)$$

Объединяя (73), (66) и (71), заключаем, что соотношение $Q(j_n)nj_n^{-1} \rightarrow y \in (0, \infty)$ влечет

$$\mathbf{P}(M(j_n) \geq n) \sim \psi(y) Q(j_n),$$

где

$$\psi(y) := \mathbf{P}(V^*(\infty) \geq y^{-1}) + \frac{(\alpha y)^{1/(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha/(1+\alpha))} - \mathbf{P}\left(\int_0^\infty X^*(v) dv \geq y^{-1}\right). \quad (74)$$

Заметим, что $\psi(y) > 0$, поскольку первый член в правой части (65) имеет порядок $Q(j_n)$, в то время как разность между вторым и третьим неотрицательна.

(с) Для доказательства (7) заметим, что $M(j) \leq jM(1)$ и, следовательно, в силу теоремы 1 работы [3], для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(\varepsilon)$ такое, что для n и j , удовлетворяющих неравенству $nj^{-1} > K$,

$$\mathbf{P}(M(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M(1) \geq nj^{-1}) \leq \frac{\alpha(1+\varepsilon)j}{n}. \quad (75)$$

Для получения аналогичной оценки снизу заметим, что для $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j) \geq n) &\geq \mathbf{P}(M(j) \geq n, M(1) \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P}(M(j) \geq n, \varrho = l), \end{aligned}$$

где $\varrho := \min\{l: Z_l \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}\}$ является первым моментом времени, когда размер популяции превзойдет величину $(1+\varepsilon)nj^{-1}$. В силу марковского свойства получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j) \geq n, \varrho = l) &= \sum_{r \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}} \mathbf{P}(M(j) \geq n, Z_l = r, \varrho = l) \\ &\geq \sum_{r \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}} \mathbf{P}\left(\sum_{i=l}^{l+j-1} Z_{i+l} \geq n, Z_l = r, \varrho = l\right) \\ &= \sum_{r \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{j-1} Z_i \geq n \mid Z_0 = r\right\} \mathbf{P}(Z_l = r, \varrho = l) \\ &\geq \mathbf{P}(\varrho = l) \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{j-1} Z_i \geq n \mid Z_0 = (1+\varepsilon)nj^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M(j) \geq n) &\geq \mathbf{P}(M(1) \geq (1+\varepsilon)nj^{-1}) \mathbf{P}\left\{\sum_{l=0}^{j-1} Z_l \geq n \mid Z_0 = (1+\varepsilon)nj^{-1}\right\}. \quad (76) \end{aligned}$$

Выбирая $\beta \in (1, 1 + \alpha)$ и используя (38), получаем для $n j^{-1} \geq 2/\varepsilon$

$$\mathbf{P}(M(j) \geq n) \geq \mathbf{P}(M(1) \geq (1 + \varepsilon) n j^{-1}) \left(1 - c_{12} \left(\frac{j}{n Q(j)}\right)^{\beta-1}\right). \quad (77)$$

Замечая, что $n j_n^{-1} \rightarrow \infty$ в силу нашего предположения в пункте (с), и вспоминая, что $\mathbf{P}(M(1) \geq x) \sim \alpha/x$ при $x \uparrow \infty$, заключаем, что оценки (75) и (77) влекут

$$\mathbf{P}(M(j_n) \geq n) \sim \mathbf{P}(M(1) \geq n j_n^{-1}) \sim \frac{\alpha j_n}{n}, \quad \text{если} \quad \frac{j_n}{n Q(j_n)} \rightarrow 0. \quad (78)$$

Теорема 2 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1(а). Поскольку $M_m(j) \leq M(j)$ для всех $j, m \geq 1$, соотношение (63) влечет

$$\mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M(\infty) \geq n).$$

Отсюда, из (12) и свойств правильно меняющихся функций легко вывести, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и достаточно больших j

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq j/(\varepsilon Q(j))} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) &\leq \sum_{1 \leq n \leq j/(\varepsilon Q(j))} \mathbf{P}(M(\infty) \geq n) \\ &\leq 2 \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \frac{j}{\varepsilon Q(j)} \mathbf{P}\left(M(\infty) \geq \frac{j}{\varepsilon Q(j)}\right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 7(b), для $\varepsilon \in (0, 1)$ и достаточно больших j имеем

$$\mathbf{P}\left(M(\infty) \geq \frac{j}{\varepsilon Q(j)}\right) \leq \mathbf{P}\left(M(\infty) \geq \frac{j}{Q(j)}\right) \leq c Q(j).$$

Следовательно,

$$\sum_{1 \leq n \leq j/(\varepsilon Q(j))} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq \frac{c}{\varepsilon} j. \quad (79)$$

Более того, для любого $\beta \in (1, 1 + \alpha)$

$$\mathbf{P}(M_m(1) \geq x) \leq \frac{\mathbf{E}\{Z_m^\beta \mid Z_0 = 1\}}{x^\beta} \leq \frac{c Q^{1-\beta}(m)}{x^\beta},$$

что, ввиду неравенства $\mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M_m(1) \geq n j^{-1})$, влечет

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq \varepsilon j/Q(m)} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) &\leq \sum_{n \geq \varepsilon j/Q(m)} \mathbf{P}(M_m(1) \geq n j^{-1}) \\ &\leq c j^\beta Q^{1-\beta}(m) \sum_{n \geq \varepsilon j/Q(m)} n^{-\beta} \leq c \varepsilon^{1-\beta} j \end{aligned}$$

для $j \geq j_0$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(M(j) \geq n) - \mathbf{P}(Z_m > 0) \leq \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq \mathbf{P}(M(j) \geq n).$$

Этот факт и соотношения (78) показывают, что для любого $\delta \in (0, 1)$ существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$(1 - \delta) \frac{\alpha j}{n} - \mathbf{P}(Z_m > 0) \leq \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq (1 + \delta) \frac{\alpha j}{n}$$

для всех $n \geq \varepsilon^{-1} j / Q(j)$. Обозначая $D_\varepsilon(j, m) := \{n: \varepsilon^{-1} j / Q(j) \leq n \leq \varepsilon j / Q(m)\}$, заключаем, что

$$(1 - \delta) \alpha j \sum_{n \in D_\varepsilon(j, m)} \frac{1}{n} - \varepsilon j \leq \sum_{n \in D_\varepsilon(j, m)} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq (1 + \delta) \alpha j \sum_{n \in D_\varepsilon(j, m)} \frac{1}{n},$$

т.е.

$$(1 - \delta) \alpha j \ln \frac{Q(j)}{Q(m)} - c j \leq \sum_{n \in D_\varepsilon(j, m)} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq (1 + \delta) \alpha j \ln \frac{Q(j)}{Q(m)} + c j.$$

Поскольку функция ℓ_4 в представлении (9) медленно меняется, то найдутся $a > 0$ и функции σ и θ , удовлетворяющие условиям $\sigma(x) \rightarrow \sigma \in (0, \infty)$ и $\theta(x) \rightarrow 0$ при $x \uparrow \infty$, такие, что (см. [13, раздел 1.5])

$$\ell_4(n) = \sigma(n) \exp \left[\int_a^n \frac{\theta(x)}{x} dx \right].$$

Отсюда легко следует, что для любого $\mu > 0$ существует $w = w(\mu)$ такое, что

$$\left(\frac{m}{j} \right)^{-\mu/\alpha} \leq \frac{\ell_4(j)}{\ell_4(m)} \leq \left(\frac{m}{j} \right)^{\mu/\alpha} \quad \text{при} \quad \frac{j}{m} \leq w.$$

Следовательно, при $j/m < w$

$$(1 - \delta)(1 - \mu) j \ln \frac{m}{j} \leq \sum_{n \in D_\varepsilon(j, m)} \mathbf{P}(M_m(j) \geq n) \leq (1 + \delta)(1 + \mu) j \ln \frac{m}{j}. \quad (80)$$

Объединяя (79) и (80) и принимая во внимание, что δ и μ могут быть выбраны сколь угодно малыми, получаем

$$\mathbf{E} M_m(j) \sim j \ln \frac{m}{j} \quad \text{при} \quad \frac{j}{m} \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство теоремы 1(a).

3.3. Доказательство теоремы 1(b). Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M_{T_j}(j) &= \mathbf{E}\{M_{T_j}(j); Z_j = 0\} + \mathbf{E}\{M_{T_j}(j); Z_j > 0\} \\ &= \mathbf{E}\{S_0(j); Z_j = 0\} + \mathbf{E}\{M_{T_j}(j); Z_j > 0\}, \end{aligned} \quad (81)$$

поскольку

$$\begin{aligned} M_{T_j}(j) 1_{\{Z_j=0\}} &= \max_{0 \leq k \leq T_j-j} \sum_{l=k}^{k+j-1} Z_l 1_{\{Z_j=0\}} = \max_{0 \leq k \leq T_j-j} \sum_{l=k}^{j-1} Z_l 1_{\{Z_j=0\}} \\ &= \sum_{l=0}^{j-1} Z_l 1_{\{Z_j=0\}} = S_0(j) 1_{\{Z_j=0\}}. \end{aligned}$$

Мы исследуем каждое слагаемое в (81) отдельно в доказываемых ниже леммах 21 и 23.

Лемма 21. При $j \uparrow \infty$

$$a_j := \mathbf{E}\{S_0(j); Z_j = 0\} \sim \frac{\alpha j}{2\alpha + 1}.$$

З а м е ч а н и е 22. Для случая $\mathbf{D}\xi < \infty$ это утверждение было установлено А. В. Карпенко и С. В. Нагаевым в [8].

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 21. Положим

$$h_j(s_1, s_2) := \mathbf{E}\{s_1^{Z_j} s_2^{S_0(j)} \mid Z_0 = 1\}, \quad h_0(s_1, s_2) := s_1 s_2.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} h_j(s_1, s_2) &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\{s_1^{Z_j} s_2^{S_0(j)} \mid Z_1\} \mid Z_0 = 1\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{s_2 \left(\mathbf{E}\{s_1^{Z_{j-1}} s_2^{S_0(j-1)} \mid Z_0 = 1\}\right)^{Z_1} \mid Z_0 = 1\right\} \\ &= s_2 f(h_{j-1}(s_1, s_2)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\{s_2^{S_0(j)}, Z_j = 0 \mid Z_0 = 1\} = h_j(0, s_2) = s_2 f(h_{j-1}(0, s_2)). \quad (82)$$

Заметим, что $h_j(0, 1) = f_j(0) = \mathbf{P}\{Z_j = 0 \mid Z_0 = 1\}$ и $a_1 = f_1(0)$. Дифференцирование функции (82) в точке $s_2 = 1$ — дает при $j \geq 2$

$$\begin{aligned} a_j &= f_j(0) + f'(f_{j-1}(0)) a_{j-1} \\ &= f_j(0) + f'(f_{j-1}(0)) f_{j-1}(0) + f'(f_{j-1}(0)) f'(f_{j-2}(0)) a_{j-2}, \end{aligned}$$

что в свою очередь ведет к соотношению

$$a_j = f_j(0) + \sum_{k=1}^{j-1} f_k(0) \prod_{r=k}^{j-1} f'(f_r(0)) = f_j(0) + d_j \sum_{k=1}^{j-1} f_k(0) \frac{1}{d_k}, \quad (83)$$

где величины d_k взяты из леммы 5. Вспоминая лемму 5 и замечая, что $f_k(0) \uparrow 1$ при $k \uparrow \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{j-1} f_k(0) \frac{1}{d_k} \sim \sum_{k=1}^{j-1} \frac{k^{1+1/\alpha}}{l_3(k)} \sim \frac{\alpha}{2\alpha + 1} \frac{j^{2+1/\alpha}}{l_3(j)} \quad \text{при } j \uparrow \infty.$$

Отсюда и из (83) и (10) легко следует утверждение леммы.

Лемма 23. Для $T \geq 1$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{j^{-1} Q(j) M_{Tj}(j) \mid Z_j > 0\} = \mathbf{E}V^*(T). \quad (84)$$

Доказательство. Из предложения 13 и принципа инвариантности Донскера–Прохорова следует, что

$$\{j^{-1}Q(j) M_{T_j}(j) \mid Z_j > 0\} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} V^*(T). \quad (85)$$

Для доказательства сходимости математических ожиданий напомним, что

$$M_{T_j}(j) \leq M_{T_j}(Tj) = \sum_{l=0}^{Tj-1} Z_l.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{j^{-1}Q(j) M_{T_j}(j) > y \mid Z_j > 0\} &\leq \mathbf{P}\{j^{-1}Q(j) M_{T_j}(Tj) > y \mid Z_j > 0\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{Q(j) \max_{0 \leq k \leq Tj} Z_k > y \mid Z_j > 0\right\} \leq \frac{Q^\beta(j)}{Q(j)} \frac{\mathbf{E}Z_{Tj}^\beta}{y^\beta}, \end{aligned} \quad (86)$$

где на последнем шаге мы применили неравенство Дуба. В силу леммы 11 и асимптотического соотношения (9) эта цепочка неравенств может быть продолжена:

$$\leq \frac{c}{y^\beta} \frac{Q^{\beta-1}(j)}{Q^{\beta-1}(Tj)} \leq \frac{c}{y^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha}. \quad (87)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(V^*(T) > y) \leq \frac{c}{y^\beta} T^{(\beta-1)/\alpha}. \quad (88)$$

Для завершения доказательства заметим, что ввиду неравенства $\beta > 1$ полученная цепочка оценок (86)–(87) и неравенство (88) обеспечивают равномерную интегрируемость допредельных и предельной случайных величин в (85). Отсюда следует заявленная сходимость (84) моментов.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1. Ясно, что

$$\begin{aligned} j_m^{-1} \mathbf{E} M_m(j_m) &= j_m^{-1} \mathbf{E}\{M_m(j_m), Z_{j_m} = 0\} + j_m^{-1} \mathbf{E}\{M_m(j_m), Z_{j_m} > 0\} \\ &= j_m^{-1} \mathbf{E}\{S_0(j_m), Z_{j_m} = 0\} + \mathbf{E}\{j_m^{-1}Q(j_m) M_m(j_m) \mid Z_{j_m} > 0\}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 21 и 23 с $T = 1/\eta$, получаем

$$\lim_{m \uparrow \infty} j_m^{-1} \mathbf{E} M_m(j_m) = \frac{\alpha}{2\alpha + 1} + \mathbf{E} V^*\left(\frac{1}{\eta}\right) =: \varphi(\eta), \quad (89)$$

что доказывает (4). Вспоминая предложения 14 и 15, мы видим, что утверждение (5) также справедливо.

Первый автор выражает благодарность Институту Вейерштрасса за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B.* On the maximum sequence in a critical branching process. — *Ann. Probab.*, 1988, v. 16, № 2, p. 502–507.
2. *Бондаренко Е. М., Топчий В. А.* Оценки для математического ожидания максимума критического процесса Гальтона–Ватсона на конечном интервале. — *Сиб. матем. журн.*, 2001, т. 42, в. 2, с. 209–216.
3. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* On the distribution tails and expectations of maxima in critical branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1996, v. 33, № 3, p. 614–622.
4. *Durrett R.* Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — *Ann. Probab.*, 1976, v. 6, № 5, p. 798–828.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. М.: Мир, 1984, 751 с.
6. *Grimvall A.* On the convergence of sequences of branching processes. — *Ann. Probab.*, 1974, v. 2, № 1, p. 1027–1045.
7. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
8. *Карпенко А. В., Нагаев С. В.* Предельные теоремы для полного числа потомков в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, в. 3, с. 503–528.
9. *Kämmerle K., Schuh H.-J.* The maximum in critical Galton–Watson and birth and death processes. — *J. Appl. Probab.*, 1986, v. 23, № 3, p. 601–613.
10. *Нагаев С. В., Вахтель В. И.* Вероятностные неравенства для критического процесса Гальтона–Ватсона. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 2, с. 266–291.
11. *Pakes A. G.* On the maximum and absorption time of a left-continuous random walk. — *J. Appl. Probab.*, 1978, v. 15, № 2, p. 292–299.
12. *Pakes A. G.* Remarks on the maxima of a martingale sequence with application to the simple critical branching process. — *J. Appl. Probab.*, 1987, v. 24, № 3, p. 768–772.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
14. *Slack R. S.* A branching process with mean one and possibly infinite variance. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1968, v. 9, p. 139–145.
15. *Ватутин В. А.* Локальная предельная теорема для критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса. — *Тр. МИАН*, 1981, т. 158, с. 9–30.
16. *von Bahr B., Esseen C.-G.* Inequalities for the r th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. — *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 36, p. 299–303.
17. *Ватутин В. А., Топчий В. А.* Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, т. 42, в. 1, с. 21–34.
18. *Weiner H.* Moments of the maximum in a critical branching process. — *J. Appl. Probab.*, 1984, v. 21, № 4, p. 920–923.

Поступила в редакцию
16.I.2006

Исправленный вариант
2.IV.2007