Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, Масштабированная энтропия фильтраций σ -алгебр, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 446–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:36:41

© 2007 г.

ВЕРШИК А. М.*, ГОРБУЛЬСКИЙ А. Д.**

МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ
ФИЛЬТРАЦИЙ σ -АЛГЕБР¹⁾

В работе исследуется понятие масштабированной энтропии фильтрации σ -алгебр (т.е. монотонно убывающей последовательности σ -алгебр), введенное в [6]. Предлагается метод вычисления этой энтропии для последовательности σ -алгебр прошлых марковского процесса, определяемого случайным блужданием по траекториям бернуллиевского действия коммутативной или нильпотентной счетной группы. Из того, что масштабированная энтропия есть метрический инвариант фильтрации, следует, что последовательности σ -алгебр прошлых случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия решеток — групп $\mathbb{Z}^d$ — метрически неизоморфны при различных размерностях d , а также при одном и том же d , но при различных значениях энтропии схемы Бернулли. Дается краткий обзор метрической теории фильтраций, в частности, приводится формулировка критерия стандартности и описание его связей с масштабированной энтропией и понятием башни мер.

Ключевые слова и фразы: фильтрация, σ -алгебра прошлых, стандартность, масштабированная энтропия, случайные блуждания.

1. Введение: фильтрации σ -алгебр; стандартность,
классификация

Начнем с напоминания нескольких общих определений. *Пространство Лебега* (X, μ) (или Лебега–Рохлина) — это пространство с вероятностной мерой μ , метрически изоморфное (mod 0) объединению отрезка $[0, \lambda]$, $\lambda \leq 1$, с лебеговой мерой и, возможно, не более чем счетного числа атомов положительной меры, суммарная мера которых равна $1 - \lambda$. Нас в основном будет интересовать пространство Лебега с непрерывной мерой. *Измеримое разбиение* пространства Лебега (X, μ) — это разбиение этого пространства на прообразы точек относительно некоторого

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН; e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

** ОАО «САП», С.-Петербург, Россия; e-mail: gorbulsky@consultant.com

¹⁾ Первый автор поддержан грантами РФФИ 05-01-0089, НШ-432920061, INTAS 03-51-5018.

измеримого отображения; не умаляя общности, можно считать это измеримое отображение измеримой функцией $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ с вещественными значениями. Классы совпадающих mod 0 функций f определяют класс совпадающих mod 0 измеримых разбиений, и в дальнейшем имеются в виду не индивидуальные разбиения, а классы совпадающих mod 0 разбиений. Напомним, что по теореме Рохлина [25] каждому измеримому разбиению $\xi = \{C_\alpha\}$, где C_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, — элементы разбиения, можно сопоставить каноническую систему мер, а именно систему условных мер $\{\mu^C\}$ на элементах разбиения $C_\alpha = C$; условные меры определены для почти всех элементов C разбиения ξ , поэтому каноническая система мер корректно определена mod 0. Метрическая классификация измеримых разбиений mod 0 в терминах системы условных мер принадлежит В. А. Рохлину [26].

Измеримое разбиение ξ определяет и определяется σ -подалгеброй $\mathcal{A}_\xi$ σ -алгебры $\mathcal{A}(X, \mu)$ всех классов измеримых множеств пространства (X, μ) , а именно σ -подалгеброй, порожденной лебеговскими множествами соответствующей измеримой функции. Наоборот, измеримое разбиение однозначно mod 0 восстанавливается по произвольной σ -подалгебре σ -алгебры $U(X, \mu)$. Традиционный в теории случайных процессов язык σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{A}$ эквивалентен более геометричному языку измеримых разбиений, который мы в дальнейшем в основном и используем. Корректность всех определений относительно перехода к классам совпадающих mod 0 объектов обычно легко проверяется (см., например, [25], [4]).

На множестве классов измеримых разбиений (σ -алгебр) имеется естественное частичное упорядочение; на языке σ -алгебр это есть упорядочение по включению, относительно которого $\mathcal{A}(X, \mu)$ есть решетка.²⁾ Предметом дальнейшего изучения в этой работе являются бесконечные монотонно убывающие последовательности измеримых разбиений (или бесконечные убывающие последовательности σ -алгебр). Термин «фильтрация» в этой работе и есть синоним термина «бесконечная убывающая последовательность измеримых разбиений» или «бесконечная убывающая последовательность σ -алгебр». Фильтрация $\Xi = \{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ называется эргодической, если пересечение $\bigcap_n \xi_n$ ее компонент есть тривиальное разбиение ν : $\bigcap_n \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \nu$.³⁾ Общий при-

²⁾ В терминах измеримых разбиений «больше» в смысле этого упорядочения означает «мельче», поэтому наибольшее разбиение есть разбиение (обозначаемое $\varepsilon \bmod 0$) на отдельные точки, а тривиальное разбиение (обозначаемое $\nu \bmod 0$), на два элемента — пустое множество и все пространство, есть наименьший элемент решетки разбиений. Это упорядочение является противоположным упорядочению разбиений, принятому в комбинаторике, где наибольший элемент решетки есть тривиальное разбиение.

³⁾ Пересечение σ -алгебр определяется буквально, но на языке измеримых

мер фильтрации — это последовательность σ -алгебр «прошлых» одно-стороннего случайного процесса с дискретным временем, $\{y_n\}_{n \leq 0}$, т.е. последовательность σ -алгебр $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^\infty$, где $\mathcal{A}_n$ есть σ -алгебра, порожденная случайными величинами $\{y_k: k \leq -n\}$. Эргодичность этой фильтрации равносильна тривиальности бесконечного прошлого (т.е. регулярности по Колмогорову). Особый интерес представляет *последовательность прошлых стационарных случайных процессов*, изучаемых далее, — в этом случае последовательность разбиений инвариантна относительно сдвига (или, коротко, стационарна). Подробно об этой теории см. статью [4] и литературу в ней. Стационарные фильтрации (т.е. последовательности прошлых стационарных процессов с дискретным или непрерывным временем) — один из двух главных объектов теории фильтраций; второй, не менее важный класс примеров — фильтрации, возникающие в траекторной теории и теории периодических аппроксимаций динамических систем, здесь мы не рассматриваем этот класс. С точки зрения теории стационарных случайных процессов с дискретным или непрерывным временем фильтрация прошлых, ее структура и ее метрический тип являются наиболее важными характеристиками самого процесса и содержат глубокую информацию о процессе.

Две фильтрации $\Xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\Xi' = \{\xi'_n\}_{n=1}^\infty$ называются (*метрически*) *изоморфными*, если существует сохраняющее меру измеримое преобразование T , удовлетворяющее условию $T\xi_n = \xi'_n$ при всех n .

Задача метрической классификации бесконечных эргодических фильтраций была поставлена первым автором (в основном, в связи с траекторной теорией) и к настоящему времени накопила значительную литературу.

Самый простой пример фильтрации — бернуллиевская фильтрация прошлых односторонней стационарной схемы Бернулли; она эргодична, как это следует из закона 0–1 Колмогорова. Фильтрации, метрически изоморфные бернуллиевской, называются *стандартными фильтрациями*, они определяются типом одномерного распределения схемы Бернулли. Схема Бернулли с вероятностями $1/r, \dots, 1/r$, $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$, при $r > 2$ определяет *стандартную r -адическую фильтрацию*, при $r = 2$ — *диадическую фильтрацию*, а если одномерное распределение схемы Бернулли непрерывно, то *стандартную непрерывную фильтрацию*. Более общий пример — нестационарные $\{r_n\}$ -адические стандартные фильтрации — возникает из нестационарных схем Бернулли. Две фильтрации $\Xi = \{\xi_n\}$ и $\Xi' = \{\xi'_n\}$ *финитно изоморфны*, если изоморфны их конечные фрагменты $\{\xi_n\}_{n=1}^m$ и $\{\xi'_n\}_{n=1}^m$ любой длины n . Фильтрация $\{\xi_n\}$, финитно изоморфная стандартной r -адической (соот-

ветственно диадической, непрерывной, $\{r_n\}$ -адической) последовательности, называется *однородной r -адической (соответственно диадической, непрерывной, $\{r_n\}$ -адической) фильтрацией*, а общей *однородной* называется фильтрация, финитно изоморфная какой-либо (возможно, нестационарной) стандартной фильтрации.

Первоначальный вопрос заключался в том, *могут ли финитно изоморфные однородные эргодические фильтрации быть неизоморфными*; иначе говоря, могут ли они существенно отличаться «на бесконечности», если все их конечные фрагменты изоморфны. Например, существуют ли метрически неизоморфные эргодические диадические фильтрации? Положительный ответ и, тем самым, первый пример нестандартной диадической эргодической последовательности был открыт в [1] (подробные доказательства были приведены в [3], [4]) — это была последовательность прошлых случайного блуждания по образующим бернуллиевского действия свободной группы с двумя образующими. Этот пример и дальнейшие его обобщения показали, в частности, что метрический тип фильтраций прошлых стационарного процесса может быть существенно различным для различных стационарных процессов и задача их классификации содержательна. Первый метод различения фильтраций был комбинаторным, но по сути имел энтропийный характер, он привел к определению комбинаторной (или экспоненциальной) энтропии фильтрации ([2], см. п. 3.3). Это позволило указать континуум попарно неизоморфных диадических фильтраций. В [8] было замечено, что энтропия действия диадической группы $\Sigma\mathbb{Z}_2$ также является инвариантом фильтрации, порождаемой этим действием, что также дает континуум неизоморфных фильтраций, при этом для диадического случая комбинаторная энтропия и энтропия действия совпадают, хотя их определения совершенно различны. Их совпадение даже для $\{r_n\}$ -адических последовательностей имеет место лишь при определенном росте числа r_n точек в элементах разбиений (см. [4], [13]). Кроме того, энтропия действия может быть определена лишь для однородных фильтраций, в то время как комбинаторная энтропия определяется для общих фильтраций.

Комбинаторная энтропия различает лишь очень узкий класс фильтраций — фильтрации с экспоненциальной асимптотикой итерированных полуметрик (см. п. 3.3). Позже в [6] было определено обобщение комбинаторной энтропии — класс *масштабированных энтропий*, о котором пойдет речь ниже. Определение масштабированной энтропии основано на введении масштабирования (скейлинга) роста энтропий подпадающих разбиений. В шкале этих скейлингов комбинаторная энтропия соответствует экспоненциальному росту, почему и может быть названа экспоненциальной энтропией.

Все имеющиеся к настоящему времени результаты иллюстрирует то, неочевидное априори, обстоятельство, что метрическая классифика-

ция общих или даже стационарных фильтраций столь же трудна и необозрима, как, например, метрическая классификация самих стационарных процессов. Собственно поэтому и встает вопрос о конструктивных метрических инвариантах однородных эргодических фильтраций. Наиболее полезными представляются энтропийные методы, которым посвящена эта работа. Из других общих теорем о фильтрациях отметим теорему о лакунарном изоморфизме, вытекающий из нее основной инвариант фильтрации (см. [4]) и, в первую очередь, критерий стандартности, предложенный в [1], [3] для различения стандартных и нестандартных фильтраций (см. раздел 2).

Масштабированная энтропия есть количественная характеристика фильтраций, которая естественно возникает из анализа этого критерия. Она задается с помощью так называемой скейлинговой функции (см. п. 3.2). В этой работе мы формулируем теоремы о масштабированной энтропии фильтрации прошлых случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия счетных коммутативных и нильпотентных групп G и намечаем их доказательства. Возможно, этот метод применим к группам, для которых имеет место центральная предельная теорема для случайных блужданий. Для абелевых и нильпотентных групп скейлинговая функция есть степенная функция $n^{d/2}$, где d есть взвешенная размерность абелевой (нильпотентной) группы G ; в частности, для решеток $\mathbf{Z}^d$ она равна $n^{d/2}$ (теоремы 5, 6). При этом оказывается, что инвариантом является не только порядок (скейлинг), но и значение масштабированной энтропии. Таким образом, фильтрации прошлых случайных блужданий на решетках $\mathbf{Z}^d$ метрически неизоморфны при различных размерностях d и даже для блужданий при одном и том же d , но при различных значениях средней энтропии переходных вероятностей.

Анализ фильтраций прошлых стационарных процессов дает новые характеристики односторонних процессов. Как мы видим, уже для процесса, регулярного по Колмогорову, т.е. процесса с тривиальным бесконечным прошлым, сами фильтрации прошлых могут быть весьма разнообразными по своим метрическим свойствам. Не исключено также, что некоторые инварианты фильтраций прошлых случайного процесса могут быть инвариантами двустороннего сдвига в пространстве траекторий процесса. Масштабированная энтропия фильтраций, возникающих в задачах периодической аппроксимации автоморфизмов, приводит к новым инвариантам типа шкалы автоморфизма и так называемого основного инварианта (см. [7]).⁴⁾

⁴⁾ Заметим, что близким к понятию масштабированной энтропии является понятие *вторичной энтропии* стационарного случайного процесса, введенное в [6]; подобная характеристика изучалась и в работе [20].

2. Итерированная метрика Канторовича, критерий стандартности и башня мер

2.1. Допустимые метрики и метрика Канторовича. Для построения инвариантов фильтраций и, в частности, для формулировки критерия стандартности нам понадобится конструкция *итерированных метрик* и понятие *башни мер*. Но предварительно мы приведем определения допустимых метрик на пространстве с мерой (допустимых троек) и классической метрики Канторовича на мерах.

О п р е д е л е н и е 1. Полуметрика ρ на пространстве Лебега (X, μ) , называется *допустимой* (или тройка (X, μ, ρ) — *допустимой*), если выполнены следующие условия:

1) как функция двух переменных (т.е. как функция на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$) метрика $\rho(x, y)$ измерима;

2) существует подмножество X_0 полной меры μ в пространстве X , которое в топологическом смысле квазикompактно относительно полуметрики ρ ; это означает, что факторпространство $\hat{X}_0$ пространства X_0 по разбиению на классы точек с попарно нулевыми расстояниями, снабженное факторполуметрикой, есть компактное метрическое пространство.

Как и выше, на пространстве с мерой мы рассматриваем классы метрик (полуметрик), совпадающих почти всюду, а не индивидуальные метрики (полуметрики). Обозначим множество всех (классов) допустимых метрик на данном пространстве Лебега через $\Psi(X, \mu)$. Метрическая компактная тройка (X, ρ, μ) , где ρ — метрика, превращающая (X, ρ) в метрический компакт, а μ — борелевская вероятностная мера на нем, есть пример допустимой тройки.

Напомним определение метрики Канторовича на пространстве мер метрического компакта.

Для любого компактного метрического пространства (X, ρ) с метрикой ρ можно определить метрику Канторовича k_ρ на симплексе $V(X)$ вероятностных борелевских мер на X (см. [28], в современной литературе — в [5]). В классическом определении метрики Канторовича рассматриваются лишь компакты и метрика определяется на симплексе мер метрического компакта, однако этот подход можно распространить без особых изменений на случай полуметрик и квазикompактных пространств. Вот это определение:

$$k_\rho(\mu_1, \mu_2) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \rho(x, y) dQ(x, y) \mid P_1 Q = \mu_1, P_2 Q = \mu_2 \right\},$$

здесь Q пробегает множество всех вероятностных мер на $X \times X$ с данными проекциями на обе координаты (μ_1, μ_2) или, по принятой терминологии, мер с данными маргинальными распределениями, а P_1, P_2 — проекторы мер на $X \times X$ в симплексы мер на соответствующих координатах.

2.2. Итерированные полуметрики, построенные по фильтрации, и критерий стандартности. Применим теперь конструкцию Канторовича к построению метрик на пространстве с мерой, на котором задано измеримое разбиение. Следующая процедура, предложенная в [4], [3], позволяет по каждой допустимой полуметрике ρ и измеримому разбиению ξ построить новую допустимую полуметрику на том же пространстве (X, μ) . Зафиксируем допустимую полуметрику $\rho = \rho_0$ на пространстве (X, μ) и определим по ней новое расстояние $\rho_1(x, y)$ на пространстве (X, μ) как расстояние по метрике Канторовича между условными мерами на элементах разбиения ξ , содержащих данные точки:

$$\rho_1(x, y) \equiv k_\rho(\mu^{C(x)}, \mu^{C(y)}),$$

где $C(x), C(y)$ — элементы разбиения ξ , содержащие соответственно x и y , а μ^C — условная мера на элементе $C \in \xi$.

Таким образом, по полуметрике и измеримому разбиению определяется новая полуметрика. Новое расстояние между точками, принадлежащими одному и тому же элементу разбиения, равно нулю, поэтому ρ_1 есть полуметрика, даже если ρ — метрика. Однако в этом случае на факторпространстве X/ξ полуметрика факторизуется до корректно определенной метрики.

Предположим теперь, что на пространстве (X, μ) заданы допустимая полуметрика ρ и фильтрация $\Xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $\xi_0 = \varepsilon$. Применим последовательно указанный процесс построения полуметрик: по ρ и ξ_1 построим полуметрику ρ_1 , затем по ρ_1 и ξ_2 найдем полуметрику ρ_2 и т.д. Поскольку разбиения убывают, то полуметрики согласованы в том смысле, что если расстояние между двумя точками равно нулю по метрике ρ_k , то оно равно нулю и по всем последующим метрикам.

Заметим, что среднее расстояние между парами точек пространства X не увеличивается при переходе к следующей итерации, а именно,

$$c_n = \int_{X \times X} \rho_n(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \leq c_{n-1} = \int_{X \times X} \rho_{n-1}(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Мы можем сформулировать теперь критерий стандартности однородной фильтрации.

Теорема 1 (критерий стандартности, [1], [4], [3]). *Однородная фильтрация (однородная последовательность разбиений) стандартна тогда и только тогда, когда для любой начальной полуметрики ρ среднее итерированных расстояний между точками стремится к нулю: в наших обозначениях*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times X} \rho_n(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0 \quad \left(\text{т.е.} \lim_n c_n = 0 \right).$$

Очевидно, что условие критерия по определению метрически инвариантно. Поэтому необходимость немедленно следует из того, что для стандартной последовательности условие выполнено. Достаточность критерия стандартности является глубоким фактом. Критерий сформулирован в работе [1], его доказательство для диадических последовательностей приведено во всех подробностях в [3], это доказательство воспроизведено в [4] для r -адических разбиений.

Для r -адических фильтраций критерий стандартности имеет прозрачный комбинаторный смысл. В этом случае достаточно его проверять для полуметрик, которые редуцируются к конечным метрическим пространствам. Предположим, что полуметрика ρ редуцируется к пространству из k точек; группа $D_{n,r}$ есть группа автоморфизмов однородного однокоренного дерева $T_{n,r}$ высоты n и валентности r , наконец, обозначим через $F_{n,r}(k)$ пространство функций на дереве $T_{n,r}$ со значениями в k -точечном множестве, на этом пространстве естественно действует группа $D_{n,r}$. Тогда n -кратно итерированная метрика ρ_n есть индуцированная метрика на множестве орбит этого действия. Более подробно, группа $D_{n,r}$ действует подстановками на кубе $\mathbf{k}^{r^n}$, снабженном метрикой Хемминга, а итерированная метрика ρ_n редуцируется к пространству орбит этой группы, снабженному факторметрикой (расстояние между двумя орбитами есть минимум расстояний между точками этих орбит). Явное вычисление этой метрики есть трудная задача, но проверку того, вырождается или не вырождается она в пределе (т.е. стягивается пространство к одноточечному или нет), можно провести во многих случаях, например, при $r = k = 2$, — такое вычисление и привело к первому примеру нестандартной фильтрации. Это вычисление проведено было в [4], [3] для случайного блуждания по траекториям бернуллиевского действия свободной группы и для бернуллиевского действия группы целых 2-адических чисел.

Изменения, которые нужно сделать в доказательстве критерия для фильтраций с непрерывными условными мерами по сравнению со случаем диадических или r -адических фильтраций, минимальны, действует та же схема доказательства, что и в [4]. Позже были даны сходные доказательства для случая непрерывных слоев, идейно не отличающиеся от доказательства для дискретного случая [22]. Подробный обзор вопросов, связанных со стандартностью и с другими свойствами фильтраций, рассмотренными Б. С. Цирельсоном, дан в [24], где приведен достаточно полный список литературы.

Ниже мы уточняем критерий стандартности, нас интересует не только, вырождается или не вырождается метрика, но и оценка асимптотики энтропии компактов с итерированной метрикой, что и составляет следующий шаг в исследовании нестандартных фильтраций.

2.3. Башня мер. Другая формулировка критерия стандартности использует важную саму по себе концепцию *башни мер* [4], [2], которую мы кратко повторим здесь. Пусть сначала задан метрический компакт (Y, r) ; рассмотрим симплекс $V(Y)$ вероятностных борелевских мер на нем, снабженный метрикой Канторовича k_r ; это тоже компакт в топологии, определяемой этой метрикой (т.е. в слабой топологии). При этом исходное пространство Y изометрически вкладывается в $V(Y)$, вложение: $i: y \rightarrow \delta_y$. Затем мы можем изометрически вложить симплекс $V(Y)$ в симплекс борелевских вероятностных мер на нем, $V(V(Y)) \equiv V^2(Y)$, снабдив последний опять-таки метрикой Канторовича k_{k_r} , и т.д. В результате имеем индуктивное семейство компактов с изометрическими вложениями и можем рассматривать индуктивный предел этих пространств:

$$i_n: V^n \rightarrow V^{n+1}; \quad \lim_n \text{ind}(V^n(Y), i_n) = V^\infty(Y) \equiv \text{Tot}(Y, r);$$

предельное пространство (индуктивный предел) называется *башней мер* и обозначается $\text{Tot}(Y, r)$, на нем индуктивно (в силу изометрий) определена метрика, построенная рекуррентно с помощью итерирования конструкции Канторовича; обозначим ее через $\bar{r}$. Это определение имеет чисто топологическую природу; построение можно обобщить на случай полуметрического квазикompакта, но такое обобщение нам не понадобится. Пространство $(\text{Tot}(Y, r), \bar{r})$ есть (неполное) метрическое пространство. Природа его достойна подробного изучения; особенно интересны и важны свойства его пополнения по метрике $\bar{r}$. Отметим, что помимо структуры индуктивного предела на нем имеется еще и структура проективного предела: поскольку $V^n(Y)$, $n > 1$, есть аффинный компакт, то для всякой меры — элемента $V^n(Y)$ определено понятие барицентра, т.е. некоторой точки компакта $V^{n-1}(Y)$. Переход от меры к ее барицентру есть эпиморфная аффинная проекция $V^n(Y) \rightarrow V^{n-1}(Y)$, $n > 1$, правообратная к вложению i_{n-1} , позволяющая определить структуру проективного предела компактов $\lim \text{proj } V^n$; предельный компакт есть пополнение индуктивного предела.⁵⁾

2.4. Критерий стандартности в терминах башни мер. Применим описанную выше конструкцию к изучению фильтратий. Предположим, что заданы пространство Лебега (X, μ) и произвольная измеримая функция $f: X \rightarrow [0, 1]$ на нем. Обозначим $f_0 \equiv f$ и рассмотрим башню мер $\text{Tot}([0, 1], r)$, где r — евклидова метрика на $[0, 1]$. Пусть на (X, μ) задана фильтрация $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$. Определим на башне $\text{Tot}([0, 1], r)$ последовательность вероятностных мер $\{\nu_f^n\}_{n \geq 1}$; при этом мера $\nu_f^n \equiv \nu^n$ задана на $V^n \subset \text{Tot}([0, 1], r)$. Меры определяются следующим образом:

⁵⁾ Подобное одновременное наличие индуктивного и проективного предела пространств кратко можно называть индопроективным пределом.

первая мера $\nu^1 \in V^1([0, 1]) \subset \text{Tot}([0, 1], r)$ есть образ меры μ при отображении $f_0: X \rightarrow [0, 1]$, иначе говоря, мера ν^1 есть мера на $[0, 1]$, т.е. элемент $V^1([0, 1])$. Далее определим отображение $f_1: x \rightarrow f_0(\mu^{C_1(x)}) \in V^1$, сопоставляющее точке $x \in X$ образ условной меры на элементе $C_1(x)$ при отображении f_0 , ограниченном на $C_1(x)$. Вторая мера ν^2 есть образ меры μ при отображении f_1 , т.е. мера на $V^1([0, 1])$ («мера на мерах» на $[0, 1]$, или элемент $V^2([0, 1])$). Заметим, что функция f_1 корректно определена на факторпространстве X/ξ_1 . Определим теперь отображение $f_2: X/\xi_1 \rightarrow V^2([0, 1])$, сопоставляющее точке $y \in X/\xi_1$ образ условной меры на элементе ξ_2/ξ_1 относительно функции f_1 , ограниченной на элемент разбиения ξ_2/ξ_1 , содержащий точку y . Мера ν^3 есть образ меры μ/ξ_1 при отображении f_2 , и тем самым, это есть мера на пространстве $V^2([0, 1])$ (или элемент $V^3([0, 1])$) и т.д. Таким образом по индукции определяются отображения $f_n: X \rightarrow X/\xi_{n-1} \rightarrow V^n([0, 1])$, $n = 1, 2, \dots$, и мера ν^{n+1} , которая есть образ меры μ при отображении f_n . Мы построили последовательность мер ν^n , $n = 1, 2, \dots$, на компактах, лежащих в башне мер $\text{Tot}([0, 1], r)$. Более подробно см. [4], [24].⁶⁾

Критерий стандартности в этих терминах утверждает, что стандартность фильтрации равносильна тому, что для любой измеримой функции $f = f_0$ последовательность мер ν_f^n стягивается в дельта-меру на пополнении башни мер (т.е. слабый предел мер ν_f^n есть дельта-мера, сосредоточенная в точке, принадлежащей пополнению башни мер). Формулой это можно выразить так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int \bar{r}(x, y) d\nu^n(x) d\nu^n(y) = 0,$$

где интеграл берется по квадрату башни $\text{Tot}([0, 1], r)$, а $\bar{r}$ есть метрика на $\text{Tot}([0, 1], r)$, определенная с помощью вышеизложенной конструкции башни мер, построенной по отрезку $[0, 1]$ с евклидовой метрикой r на нем. В этой формуле по сравнению с первой формулировкой критерия стандартности (см. п. 2.2) интегрирование по пространству (X, μ) итерированной метрики заменено на интегрирование по башне мер.

Фактически стандартность имеет место, если приведенное условие выполнено хотя бы для одной взаимно однозначной mod 0 измеримой функции. Нестандартность фильтрации, означает, наоборот, что существует функция, для которой последовательность мер ν^n не вырождается, и эта функция не является измеримой относительно любой согласованной последовательности независимых дополнений к фильтрации

⁶⁾ В работе [4] отображения $f_n: X \rightarrow V^n([0, 1])$, точнее, переход от исходной функции $f_0 = f: X \rightarrow [0, 1]$ к отображению f_n , назван *универсальным проектором* функции f относительно конечной убывающей последовательности разбиений $\Xi_n = \{\xi_k, k = 1, \dots, n\}$, все совместные метрические инварианты функции f и конечной последовательности Ξ_n могут быть выражены в терминах f_n .

(см. [3]). Из этой интерпретации немедленно вытекает также, что поведение последовательности мер ν^n (или метрик ρ_n на (X, μ) в первой интерпретации) содержит существенную информацию об асимптотике фильтрации. На самом деле, сам метрический тип фильтрации определяется последовательностью мер $\{\nu_f^n\}_{n=1}^\infty$ на башне $\text{Tot}(X, \rho)$, построенной по какой-либо взаимно однозначной mod 0 функции f . В частности, асимптотика ε -энтропии мер ν^n , $n = 1, 2, \dots$, на башне $\text{Tot}(X, \rho)$ является инвариантом фильтрации и от выбора начальной метрики ρ не зависит.

Исследование фильтраций можно вести эквивалентным образом как в терминах итерированных метрик ρ_n (что и будет сделано далее), так и в терминах определенных выше мер ν_n на башне мер. Именно связь фильтрации и ε -энтропии метрических пространств с мерой (X, μ, ρ_n) будет использована в следующем разделе для определения скейлинга и масштабированной энтропии. Кратко различие между двумя формулировками критерия стандартности можно выразить так: в первом случае мы фиксировали пространство с мерой и итерировали метрику, во втором — фиксировались метрический компакт и связанная с ним башня мер, а варьировались меры на башне мер. По-видимому, имеет место эквивалентность этих двух подходов не только в формулировке критерия стандартности, но и при анализе численных характеристик, которые построены по метрикам ρ_n (в первом подходе) или по мерам μ_n (во втором подходе).

3. Масштабированная энтропия фильтраций: определение, примеры

3.1. Энтропия метрического пространства с мерой. Обычные определения ε -энтропии метрического компакта и энтропии атомической меры хорошо известны (см., например, [25]). Нам понадобится следующая часто используемая характеристика метрического компакта с мерой.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Назовем ε -энтропией полуметрического пространства с мерой (X, μ, ρ) , где ρ — допустимая полуметрика, следующую функцию от ε :

$$H_\varepsilon(X, \rho, \mu) = \inf\{H(\lambda) \mid k_\rho(\lambda, \mu) < \varepsilon\},$$

где λ пробегает все дискретные меры на X , $H(\cdot)$ — энтропия дискретной меры, а k_ρ — метрика Канторовича на пространстве мер на X .

Грубо говоря, величина $H_\varepsilon(X, \rho, \mu)$ есть «энтропия» непрерывной меры μ в пространстве с полуметрикой с точностью до ε .⁷⁾

⁷⁾ В буквальном смысле энтропия непрерывной меры равна бесконечности, а определение того, что означает «с точностью до», зависит от полуметрики ρ .

Мы будем использовать ε -энтропию пространства (X, μ) , на котором задана эргодическая фильтрация с последовательностью допустимых итерированных полуметрик ρ_n , определенных в предыдущем разделе по фильтрации ξ_n . Асимптотическое поведение этой ε -энтропии позволяет определять и вычислять масштабированную энтропию фильтрации.

3.2. Определение масштабированной энтропии.

О п р е д е л е н и е 3. Положительную функцию $c(\varepsilon, n)$ двух аргументов $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ назовем *скейлинговой функцией* (или *скейлингом*), если она монотонно возрастает по n при фиксированном ε и не возрастает по ε при фиксированном n . Две скейлинговые функции $c(\cdot, \cdot)$ и $c'(\cdot, \cdot)$ строго эквивалентны, если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\varepsilon, n)}{c'(\varepsilon, n)} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\varepsilon, n)}{c'(\varepsilon, n)} = 1.$$

Если каждый из этих пределов равен некоторому конечному ненулевому числу, то скейлинговые функции $c(\cdot, \cdot)$ и $c'(\cdot, \cdot)$ будем называть *эквивалентными*.

О п р е д е л е н и е 4. *Масштабированная энтропия фильтрации* $\{\xi_n\} = \Xi$ относительно полуметрики ρ со скейлинговой функцией $c(\cdot, \cdot)$ есть следующее число:

$$h_c(\Xi, \rho) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{H_\varepsilon(X, \mu, \rho_n)}{c(\varepsilon, n)},$$

где ρ_n — итерированная полуметрика, построенная по фильтрации $\{\xi_n\} = \Xi$ (см. предыдущий раздел), $c(\varepsilon, n)$ — некоторая скейлинговая функция. *Собственной скейлинговой функцией* фильтрации будем называть такую скейлинговую функцию (если она существует), для которой масштабированная энтропия $h_c(\Xi, \rho)$ отлична от нуля и бесконечности.

Существование собственной скейлинговой функции есть отдельная задача. В примерах, приведенных далее, это доказывается несложно.

Следующее предложение очевидно.

Утверждение 1. 1) Значения масштабированной энтропии $h_c(\Xi, \rho)$ относительно данной полуметрики ρ со строго эквивалентными скейлинговыми функциями совпадают.

2) Для всякой фильтрации и данной полуметрики существует не более одной, с точностью до эквивалентности, скейлинговой функции, для которой масштабированная энтропия $h_c(\Xi, \rho)$ отлична от нуля и бесконечности.

Заметим, что можно вычислять масштабированную энтропию $h_c(\Xi, \rho)$ фильтрации с произвольной скейлинговой функцией, однако ответ будет отличным от нуля и бесконечности не более чем для одного

класса эквивалентных скейлингов. Иногда для фильтраций определенного вида (например, для r -адических) можно выбрать какой-то один выделенный нормирующий скейлинг (см. далее). В этом случае общее значение масштабированной энтропии относительно данной полуметрики для всех собственных скейлинговых функций, строго эквивалентных нормирующему скейлингу, мы будем называть значением масштабированной энтропии относительно данной полуметрики.

Определение масштабированной энтропии таково (см. [6]).

О п р е д е л е н и е 5. Предположим, что для фильтрации Ξ выбран нормирующий скейлинг. *Масштабированная энтропия фильтрации Ξ* есть супремум нормированных масштабированных энтропий относительно полуметрик по всем допустимым полуметрикам, т.е. следующее конечное или бесконечное неотрицательное число:

$$h(\Xi) = \sup_{\rho} h(\Xi, \rho).$$

Напомним, что ρ — это исходная полуметрика, по которой строятся итерированные метрики ρ_n .

Теорема 2. *Числовое значение $h(\Xi)$ масштабированной энтропии (если собственный скейлинг существует) есть метрический инвариант фильтрации Ξ .*

Хотя, как следует из этой теоремы, построение итерированных полуметрик достаточно начинать с метрики, мы все же рассматриваем полуметрики, так как они более удобны для подсчетов и с их помощью легче аппроксимировать значение масштабированной энтропии.

Поиск правильного скейлинга при вычислении масштабированной энтропии произвольной фильтрации естественно начинать с экспоненциального скейлинга (см. ниже), и в случае равенства нулю соответствующей энтропии переходить к другому скейлингу, растущему медленнее, и т.д. Для стандартной фильтрации энтропия равна нулю для любого скейлинга. Верно и обратное, поскольку стандартность в силу критерия означает, что масштабированная энтропия есть нуль для скейлинга $c(\varepsilon, n) = \text{const}$. Ситуация немного напоминает энтропию Кушниренко для действия групп [27], где равенство нулю всех секвенциальных энтропий автоморфизма эквивалентно дискретности его спектра. Вычисление масштабированной энтропии фильтрации есть содержательная и не очень простая задача. Неизвестно, какие скейлинговые функции могут вообще реально появляться в определении масштабированной энтропии фильтраций. Интересен вопрос о связи масштабированной энтропии, например диадических последовательностей, и свойств действия групп. Далее мы находим скейлинг и вычисляем энтропию для фильтрации прошлых нескольких важных марковских процессов.

3.3. Экспоненциальная (комбинаторная) энтропия. Концепция масштабированной энтропии возникает из анализа критерия стандартности, с одной стороны, и с другой — из исходного понятия энтропии фильтрации, данного в [3], которое с точки зрения вышеприведенного определения есть масштабированная энтропия с экспоненциальным скейлингом. Мы называем ее *экспоненциальной энтропией*. Приведем кратко некоторые сведения об этой энтропии, ограничиваясь для конкретности случаем однородных фильтраций.

Будем рассматривать $\{r_n\}$ -адические однородные фильтрации (см. раздел 1). Почти всякий элемент разбиения ξ_n $\{r_n\}$ -адической фильтрации состоит из $\prod_{i=1}^n r_i$ точек, и на каждом элементе предыдущие разбиения определяют структуру дерева (иерархий). Обозначим группу автоморфизмов такого дерева через $D_{\{r_k\}}$, $k = 1, \dots, n$. Если зафиксировать произвольное конечное разбиение γ и произвольно занумеровать его элементы какими-то символами $0, 1, \dots, p$, то при каждом n для каждой точки $x \in X$ пространства можно определить вектор длины $\prod_{i=1}^n r_i$, координаты которого суть символы $0, 1, \dots, p$, соответствующие точкам из элемента разбиения γ , содержащего данную точку. Этот вектор определен не инвариантно (зависит от нумерации точек в элементе разбиения), но орбита действия группы $D_{\{r_k\}}$ на этих векторах уже зависит только от точки x и разбиения γ (и, конечно, от фрагмента фильтрации длины n). Таким образом, возникнет разбиение γ_n , любой элемент которого состоит из всех точек, имеющих одну и ту же орбиту действия группы G_n на векторах из символов $0, 1, \dots, p$.

О п р е д е л е н и е 6. *Энтропией $\{r_n\}$ -адической последовательности разбиений $\Xi = \{\xi_n\}_n$ относительно конечного разбиения γ называется величина*

$$h(\Xi; \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_i r_i} H(\gamma_n),$$

где $H(\cdot)$ — двоичная энтропия конечного разбиения.

Заметим, что $H(\gamma_n) \leq r_n H(\gamma_{n-1})$, а значит, $h(\Xi; \gamma)$ ограничено.

Теперь мы можем избавиться от γ и определить инвариант фильтрации.

О п р е д е л е н и е 7. *Экспоненциальной энтропией $\{r_n\}$ -адической последовательности разбиений называется величина*

$$h(\Xi) = \sup_{\gamma} h(\Xi; \gamma).$$

Построенный инвариант можно назвать также комбинаторной энтропией однородной фильтрации. Скейлинг зависит от последовательности $\{r_n\}$. Следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Колмогорова, доказана в [3].

Теорема 3. *Энтропия $h(\Xi; \gamma)$ непрерывно зависит от разбиения γ относительно метрики $H(\gamma_1, \gamma_2) = H(\gamma_1|\gamma_2) + H(\gamma_2|\gamma_1)$ на пространстве конечных разбиений.*

Это позволяет аппроксимировать экспоненциальную энтропию величинами $h(\Xi; \gamma)$ на разбиениях γ удобного вида. Простым следствием теоремы 3 является следующий факт: *экспоненциальная энтропия стандартной фильтрации равна нулю.*

Для фильтратий, порожденных действием локально-конечных групп, экспоненциальную энтропию естественно сравнивать с энтропией действия (см. [8]), они совпадают, если рост $\{r_n\}$ не слишком большой (см. [7], [13]).

Следующая теорема [10] показывает, что экспоненциальная энтропия есть специальный случай масштабированной энтропии.

Теорема 4. *Экспоненциальная энтропия $\{r_n\}$ -адической фильтрации совпадает с масштабированной энтропией при выборе скейлинговой последовательности $c(\varepsilon, n) = \prod_{i=1}^n r_i$.*

Экспоненциальная энтропия равна нулю для широкого класса фильтратий (см. следующий раздел), поэтому вопрос о классификации убывающих последовательностей разбиений не решается полностью с помощью экспоненциальной энтропии — ряд примеров нестандартных фильтратий с нулевой экспоненциальной энтропией показывают это. Масштабированная энтропия позволяет провести дальнейшее различение метрически неизоморфных фильтратий.

Если масштабированная энтропия при каком-либо неэкспоненциальном скейлинге не равна нулю, то экспоненциальная энтропия такой фильтрации равна нулю. Иначе говоря, экспоненциальный скейлинг с выбранной выше нормировкой для $\{r_n\}$ -адической фильтрации является максимально возможным с точностью до эквивалентности.

Экспоненциальная энтропия может быть определена не только для $\{r_n\}$ -адических, но и для произвольных фильтратий, включая фильтрации с непрерывными условными мерами. Мы не останавливаемся здесь на этом вопросе.

4. Масштабированная энтропия фильтратий, порожденных случайными блужданиями по траекториям действия групп

4.1. Стандартность и случайные блуждания. Первым примером нестандартной фильтрации, как указывалось, был пример [4] адической последовательности прошлых блуждания по траекториям бернуллиевского действия свободной группы с двумя образующими по образующим. Способ доказательства состоял в подсчете длин орбит группы автоморфизмов иерархии на элементах разбиения: доказывалось, что

не существует орбиты такой длины, чтобы в окрестности этой орбиты концентрировалась вся мера ν^n на башне мер, где ν^n построена по полуметрике, отвечающей характеристической функции некоторого множества. Попросту показывалось, что существует такое измеримое множество, что поведение характеристической функции этого множества как вектора с 2^n координатами 0, 1 в иерархии условных мер, соответствующей первым n разбиениям, не стабилизируется даже при экспоненциальном скейлинге, что противоречит стандартности последовательности. Это означало, что в энтропийных терминах экспоненциальная энтропия бесконечна, откуда уже следует нестандартность фильтрации прошлых. Это было первым применением критерия стандартности и фактическим использованием экспоненциальной энтропии. Та же энтропия (вне связи с энтропией действия, см. [8], которая в данном случае совпадает с ней численно) положительна для диадических фильтраций, возникающих из бернуллиевского действия бесконечных сумм групп $\mathbf{Z}_k$, откуда следует нестандартность этих фильтраций.

В классе r -адических фильтраций естественные примеры стационарных фильтраций возникают из случайных блужданий по траекториям автоморфизмов с переходами с равной вероятностью в одну из r или двух точек траектории. Например, так называемый (T, T^{-1}) -эндоморфизм есть марковский автоморфизм — случайное блуждание с переходами из точки x в точки Tx и $T^{-1}x$ с вероятностями $\frac{1}{2}$ или, в более общем случае r -адической фильтрации, с переходами с вероятностью $1/r$ в одну из r точек траектории действия произвольной группы. Вообще, случайные блуждания (и более общо, теория полиморфизмов) дают много интересных примеров фильтраций. Первый пример, приведенный выше, принадлежит к этому классу.

Значительно позже был дан другой пример случайных блужданий по траекториям с применением критерия стандартности, уже в положительном направлении: фильтрация прошлых случайного блуждания (T, T^{-1}) , построенная по повороту T_λ окружности на иррациональный угол λ , стандартна; это было установлено сначала для λ , хорошо аппроксимируемых рациональными числами. Такие примеры рассматривались независимо первым автором (в рукописи 1995 г. и в работе [29]). Для произвольного λ результат получен К. Хоффманом и Д. Рудольфом [16].

Долгое время оставалась недоказанной гипотеза первого автора о нестандартности последовательности прошлых блуждания по траекториям бернуллиевского действия $\mathbf{Z}$ (так называемый эндоморфизм Каликова). В работе [18] С. А. Каликов установил, что эндоморфизм (T, T^{-1}) не будет даже свободно бернуллиевским (loosely Bernoulli) [28]. Это был первый пример небернуллиевского эндоморфизма естественного происхождения. Естественно, возник вопрос о типе его фильтрации прошлых.

Нетрудно проверить, что экспоненциальная энтропия фильтрации прошлых в этом случае равна нулю. Наконец, в работе [14] было установлено, с помощью критерия стандартности, что фильтрация прошлых этого эндоморфизма действительно нестандартна. Фактически при этом неявно использовалась масштабированная энтропия — см. далее.

В статьях [15], [19] построены примеры, показывающие, что бернуллиевское свойство эндоморфизма и стандартность последовательности прошлых находятся в общем положении. Иначе говоря,

1) у автоморфизма Бернулли существуют образующие, для которых фильтрация прошлых одностороннего сдвига относительно этой образующей нестандартна [15];

2) существует автоморфизм, не изоморфный автоморфизму Бернулли со стандартной фильтрацией прошлых [19].

4.2. Скейлинг для случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия групп. Следующий класс примеров фильтраций порожден случайными блужданиями по траекториям бернуллиевского действия произвольных групп. Пусть заданы произвольная счетная группа G с конечным числом образующих $g_1, \dots, g_s$ и ее бернуллиевское действие левыми сдвигами T_{g_i} в пространстве F всех 0–1-функций на группе G с произведением с сомножителем $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, т.е. мерой Бернулли на пространстве F ; множество возможных значений функций из пространства F и его мощность (конечная) для дальнейшего не существенны, для простоты мы ограничиваемся значениями 0, 1. Рассмотрим случайное блуждание на пространстве F по траекториям действия группы G с равными переходными вероятностями:

$$\text{Prob}(f(x) \mapsto f(g_i^{\pm 1}x)) = \frac{1}{2s}.$$

Таким образом, мы рассматриваем обобщение конструкции (T, T^{-1}) , в котором группа $\mathbf{Z}$ заменена произвольной дискретной группой G с конечным числом образующих. В предшествующих обозначениях X — это пространство траекторий марковского процесса с пространством состояний $F(G, \{0; 1\}) = 2^G$, инвариантной мерой — мерой Бернулли на F и приведенными выше переходными вероятностями. Этот марковский процесс мы называем *процессом случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия*. Последовательность прошлых этого марковского процесса есть r -адическая фильтрация с $r = 2s$. Что можно сказать об этой фильтрации, в частности, о ее масштабированной энтропии и скейлинге? Во всей общности эта задача далека от своего решения; заметим, что первый пример нестандартной фильтрации был в точности такого рода — со свободной группой в качестве G . Далее мы приводим ее решение для решеток и для нильпотентных групп.

В работе [17] фактически приводится оценка скейлинговой функции (хотя авторы [17] и не используют энтропийную терминологию) для фильтрации прошлых эндоморфизма Каликова (T, T^{-1}) , здесь T — автоморфизм Бернулли. Как показано в [10], скейлинговая функция эквивалентна функции $c(\varepsilon, n) = (n \ln(1/\varepsilon))^{1/2}$.

В работе [23] обобщалась решенная С. А. Каликовым [18] задача об автоморфизме (T, T^{-1}) и рассматривался марковский автоморфизм простого блуждания по траекториям действия решетки $\mathbf{Z}^d$. Но авторов интересовала не фильтрация, а тип марковского сдвига. Авторы показали, что размерность решетки d существенно меняет картину: если в [18] ($d = 1$) доказывалось, что автоморфизм (T, T^{-1}) даже не свободно бернуллиевский и, тем более, не бернуллиевский, то при $d > 2$ бернуллиевость имеет место (хотя качество естественной образующей — та или иная бернуллиевость — зависит от d).

Мы исследуем масштабированную энтропию и, в частности, скейлинг соответствующей фильтрации для групп $\mathbf{Z}^d$, и здесь зависимость энтропийных свойств от размерности решетки оказалась довольно регулярной.

Теорема 5 (см. [12]). *Для группы $G = \mathbf{Z}^d$ собственная скейлинговая функция фильтрации имеет полиномиальный рост: $c(\varepsilon, n) = (n \ln(1/\varepsilon))^{d/2}$.*

Дальнейшее обобщение комбинаторной техники позволило второму автору найти собственную скейлинговую функцию для случая случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия произвольной счетной нильпотентной группы G . Напомним, что *взвешенным рангом* (в непрерывном случае — *взвешенной или хаусдорфовой размерностью*) нильпотентной группы называется число $d = \sum i(n_i - n_{i-1})$, где вектор $(n_1, \dots, n_k)$ есть вектор рангов групп H_i — факторгрупп по i -му члену нижнего центрального ряда группы G .

Теорема 6. *Для счетной нильпотентной группы G и фильтрации $\Xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ прошлых марковского процесса блуждания по траекториям бернуллиевского действия группы G собственная скейлинговая функция эквивалентна следующей функции:*

$$c(\varepsilon, n) = \left(n \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{d/2},$$

здесь $d = d(G)$ — взвешенный ранг нильпотентной группы G .

Таким образом, скейлинг для абелевых и нильпотентных групп — полиномиальный; для блужданий по траекториям бернуллиевского действия свободных неабелевых групп скейлинг экспоненциален и энтропия соответствующих фильтраций есть обычная (экспоненциальная)

энтропия. Вопрос о скейлинге для блужданий на разрешимых группах открыт.

4.3. Необходимые оценки. Мы приведем здесь лишь несколько отдельных утверждений, составляющих главную часть доказательства теорем о скейлинге, оставив подробное изложение до другого раза. Первый результат, необходимый для оценки энтропии итерированной метрики, обобщает результат [14] и доказывается аналогично.

Теорема 7. *Существуют ρ — полуметрика на пространстве X и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого полинома p найдется такой номер n_0 , что для всех точек, кроме множества меры ε ,*

$$\mu\{y: \rho_n(x, y) < \varepsilon\} < \frac{1}{p(n)}, \quad n > n_0,$$

где ρ_n — итерированная метрика (см. раздел 2).

Второй результат является обобщением технического результата из [17], [18].

Теорема 8. *Пусть X — пространство траекторий марковского процесса случайных блужданий по траекториям бернуллиевского действия нильпотентной группы G с образующими e_i , $i = 1, \dots, n$. Для любого $\delta > 0$ можно выделить такое подмножество $M \subset X$, имеющее меру $1 - \delta$, и такое число h_0 , что для любого $h > h_0$ и любой пары траекторий $\{u_i\}, \{v_i\}$ из M найдется такое число $n \in [h, h^5]$, что одновременно выполняются неравенства*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \prod_{i=1}^n u_i \right\| < c, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \prod_{i=1}^n v_i \right\| < c,$$

где $\|\cdot\|$ понимается как количество сомножителей в минимальном представлении элемента группы в образующих g_i и обратных к ним.

Заметим, что множество M , определяемое условиями теоремы 8, может быть выбрано различными способами, но в дальнейшем важно лишь существование такого множества.

Нам удобно несколько изменить конструкцию пространства X и представить сдвиг в этом пространстве в виде косога произведения. А именно, новая версия пространства X такова: $X = F(G) \times B^\infty$, где марковский сдвиг T в X есть косога произведение над односторонним сдвигом Бернулли.

Выберем начальную полуметрику ρ на пространстве $X = F(G) \times B^\infty$, измеримую относительно конечного цилиндрического порядка m (в смысле структур пространств $F(G)$ и B^∞) разбиения η_m . Заметим, что для такого выбора полуметрики построенная по ней итерированная полуметрика ρ_n будет измерима относительно разбиения η_{m+n} , действительно, прообраз η_m относительно сдвига T измерим относительно η_{m+1} .

Для оценки скейлинга фильтрации прошлого марковского процесса мы оцениваем ε -энтропию меры в пространстве (X, μ, ρ_n) . Нам будет удобно использовать комбинаторное описание итерированной метрики, аналогичное приведенному в п. 2.2.

Аналогично, для итерированной полуметрики ρ_n в терминах исходной полуметрики ρ выполнено следующее равенство:

$$\rho_n(x, y) = \min_{a \in D_{n,r}} \frac{1}{r^n} \sum_{i=1}^{r^n} \rho(x_i, y_{a(i)}).$$

Приведенное явное выражение позволяет нам проводить оценки значения итерированной метрики, используя свойства группы $D_{n,r}$. Например, для оценки энтропии сверху нам достаточно оценить сверху итерированную метрику. Для этого просто заменим группу $D_{n,r}$ на тривиальную — и немедленно получаем оценку

$$\rho_n(x, y) \leq \frac{1}{r^n} \sum_{i=1}^{r^n} \rho(x_i, y_i),$$

которая, после применения центральной предельной теоремы для нильпотентной группы G (см. [30]) приводит к необходимой оценке сверху.

Оценка энтропии (и соответственно итерированной полуметрики) снизу несколько сложнее. Простой равномерной оценки итерированная метрика не допускает, однако мы можем оценить меру типичного ε -шара в итерированной метрике ρ_n . Такая оценка также позволяет оценить ε -энтропию.

Тот факт, что полуметрика ρ_n измерима относительно цилиндрического разбиения, позволяет нам перевести задачу на чисто комбинаторный язык: нам нужно оценить количество цилиндров порядка $n+m$, на расстоянии, меньшем ε , от заданного цилиндра на факторпространстве X/η_{n+m} с редуцированной полуметрикой (см. п. 2.2). Напомним, что $D_{n,r} \subset S_{r^n}$, где S_{r^n} — симметрическая группа, действующая на K_n подстановками. Фиксируем две типичные точки x и y (т.е. точки из множества M), расстояние между которыми не меньше ε . Доказательство сводится к изучению свойств автоморфизма $a \in D_{n,r}$, реализующего расстояние между этими точками. Рассмотрим проекцию пространства X на факторпространство X/η_{n+m} : $x \rightarrow \bar{x}$ и вложение $*$: $\bar{x} \rightarrow x^* = \{x_i, i = 1, \dots, r^n\}$, сопоставляющее точке набор ее прообразов. Основное свойство автоморфизма a в том, что он совмещает два вектора $\bar{x}^* \in K_n$ и $\bar{y}^* \in K_n$ экспоненциальной (по n) длины, r^n , а эти векторы в свою очередь определяются векторами $\bar{x}, \bar{y} \in X/\eta_{n+m}$ полиномиальной длины, $(n+m)^r$.

Оказывается, что действие минимизирующего автоморфизма a «почти» факторизуется до некоторого отображения на X/η_{n+m} в следующем

смысле: коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{a} & K_n \\ \uparrow^* & & \uparrow^* \\ X/\eta_{n+m} & \xrightarrow{A} & X/\eta_{n+m} \end{array},$$

т.е. равенства

$$a(\bar{x}^*) = A(\bar{x})^*,$$

понимается с точностью до некоторого $\delta > 0$ по отношению к метрике Хемминга⁸⁾. Помимо того, что автоморфизм допускает указанную « δ -факторизацию», оказывается, что построенное факторотображение будет почти тождественным. Дальнейшие вычисления показывают, что количество классов $\bar{y} \in X/\eta_{n+m}$, близких в итерированной метрике ρ_n к $\bar{x}$, субэкспоненциально, т.е. не существенно с точки зрения ε -энтропии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А. М. Убывающие последовательности измеримых разбиений. — Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 4, с. 748–751.
2. Вершик А. М. Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей. — Функци. анализ и его прил., 1971, т. 5, № 3, с. 16–18.
3. Вершик А. М. Аппроксимация в теории меры. — Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Л.: ЛГУ, 1973, 302 с.
4. Вершик А. М. Убывающие последовательности измеримых разбиений. — Алгебра и анализ, 1994, т. 6, № 4, с. 1–68.
5. Вершик А. М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2004, т. 312, с. 69–85.
6. Вершик А. М. Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры. — Успехи матем. наук, 2000, т. 55, № 4, с. 59–128.
7. Вершик А. М. Четыре определения шкалы автоморфизма. — Функци. анализ. и его прил., 1973, т. 7, № 3, с. 1–17.
8. Степин А. М. Об энтропийных инвариантах убывающих последовательностей измеримых разбиений. — Функци. анализ и его прил., 1971, т. 5, № 2, с. 80–84.
9. Горбульский А. Д. Об одном свойстве энтропии убывающей последовательности измеримых разбиений. — Записки науч. сем. ПОМИ, 1999, т. 256, с. 19–23.
10. Горбульский А. Д. Взаимосвязь разных определений энтропии убывающих последовательностей разбиений. Скейлинг. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2001, т. 283, с. 50–62.
11. Горбульский А. Д. Пример интерполяции стандартной последовательности измеримых разбиений с большой скейлинговой энтропией. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2002, т. 292, с. 5–10.
12. Горбульский А. Д. σ -алгебра прошлых случайного блуждания по орбитам бернуллиевского действия группы Z^D . — Записки науч. сем. ПОМИ, 2005, т. 325, с. 103–112.
13. Hecklen D. Entropy and r equivalence. — Ergodic Theory Dynam. Systems, 1998, v. 18, № 5, p. 1139–1157.
14. Hecklen D., Hoffman C. T, T^{-1} is not standard. — Ergodic Theory Dynam. Systems, 1998, v. 18, № 4, p. 875–878.

⁸⁾ Эта идея была сформулирована для одномерного случая первым автором еще в [2].

15. Hoffman C., Rudolph D. A dyadic endomorphism which is Bernoulli but not standard. — Israel J. Math., 2002, v. 130, p. 365–379.
16. Hoffman C., Rudolph D. Uniform endomorphisms which are isomorphic to a Bernoulli shift. — Ann. of Math., 2002, v. 156, № 1, p. 79–101.
17. Heicklen D., Hoffman C., Rudolph D. Entropy and dyadic equivalence of random walks on a random scenery. — Adv. Math., 2000, v. 156, № 2, p. 157–179.
18. Kalikow S. A. T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli. — Ann. Math., 1982, v. 115, № 2, p. 393–409.
19. Feldman J., Rudolph D. J. Standardness of sequences of σ -fields given by certain endomorphisms. — Fund. Math., 1998, v. 157, № 2–3, p. 175–189.
20. Marton K., Shields P. How many future measures can there be? — Ergodic Theory Dynam. Systems, 2002, v. 22, № 1, p. 257–280.
21. Bressaud X., Maass A., Martinez S., San Martin J. Stationary processes whose filtrations are standard. — Ann. Probab., 2006, v. 34, № 4, p. 1589–1600.
22. Dubins L., Feldman J., Smorodinsky M., Tsirelson B. Decreasing sequences of σ -fields and a measure change for Brownian motion. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 2, p. 882–904.
23. Den Hollander F., Steif J. Random walk in random scenery: A survey of some recent results. — Dynamics and Stochastics: Festschrift in honor of M. S. Keane. Ed. by D. Denteneer, F. Den Hollander, and E. Verbitskiy. Hayward: IMS, 2006, p. 53–65. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser, v. 48.)
24. Émery M. Espaces probabilisés filtrés: de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson. — Astérisque, 2002, № 282, p. 63–83.
25. Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры. — Матем. сб., 1949, т. 25, № 1, с. 107–150.
26. Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований, сохраняющих меру. — Успехи матем. наук, 1967, т. 22, № 5, с. 4–56.
27. Кушниренко А. Г. О метрических инвариантах типа энтропии. — Успехи матем. наук, 1967, т. 22, № 5, с. 57–65.
28. Канторович Л. В. О перемещении масс. — Докл. АН СССР, 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–229.
29. Parry W. Automorphisms of the Bernoulli endomorphism and a class of skew-products. — Ergodic Theory Dynam. Systems, 1996, т. 16, № 3, p. 519–529.
30. Crepel P., Raugi A. Théorème central limite sur les groupes nilpotents. — Ann. Inst. H. Poincaré B, 1978, v. 14, № 2, p. 145–164.

Поступила в редакцию
24.IV.2007