Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гущин, О расширении понятия f -дивергенции,
Теория вероятн. и ее примен., 2007, том 52, вы-
пуск 3, 468–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:02:18

© 2007 г.

ГУЩИН А. А.*

О РАСШИРЕНИИ ПОНЯТИЯ f -ДИВЕРГЕНЦИИ¹⁾

Для полунепрерывной снизу выпуклой функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $\text{dom } f \subseteq \mathbf{R}_+$, дается определение и изучаются свойства f -дивергенции конечно-аддитивных функций множества μ и ν , заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. В случае, когда f конечна на $(0, +\infty)$, а μ и ν — вероятностные меры, наше определение эквивалентно классическому определению f -дивергенции, введенному И. Чисаром. В качестве применения получен результат о достижении минимума f -дивергенции на множестве $\mathcal{X}$ пар вероятностных мер.

Ключевые слова и фразы: f -дивергенция, конечно-аддитивная функция множества.

1. Введение. Понятие f -дивергенции двух вероятностных мер (где $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная выпуклая функция) было введено И. Чисаром в 1963 г. в работе [5]. Напомним определение f -дивергенции. В силу выпуклости f предел $\lim_{y \downarrow 0} f(y)$ существует и может принимать конечное значение либо $+\infty$; доопределим f в нуле по непрерывности. Аналогично, существует предел

$$\frac{f(\infty)}{\infty} := \lim_{y \uparrow +\infty} \frac{f(y)}{y} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Положим

$$F(s, t) = \begin{cases} tf\left(\frac{s}{t}\right), & \text{если } s \geq 0 \text{ и } t > 0, \\ s \frac{f(\infty)}{\infty}, & \text{если } s > 0 \text{ и } t = 0, \\ 0, & \text{если } s = 0 \text{ и } t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы вероятностные меры P и Q , доминируемые σ -конечной мерой ϱ . Тогда f -дивергенцией мер P и Q называется величина

$$\mathcal{J}_f(P, Q) = \int_{\Omega} F\left(\frac{dP}{d\varrho}, \frac{dQ}{d\varrho}\right) d\varrho. \quad (2)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: gushchin@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00944).

Интеграл в (2) корректно определен, его значение не зависит от выбора доминирующей меры ϱ и лежит в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Частными случаями f -дивергенции являются расстояние по вариации $\|P - Q\|$ ($f(y) = |y - 1|$), квадрат расстояния Хеллингера $\rho^2(P, Q)$ ($f(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - 1)^2$), относительная энтропия, или информация Кульбака–Лейблера, $D(P \| Q)$ ($f(y) = y \ln y$), относительная энтропия $D(Q \| P)$ ($f(y) = -\ln y$).

Аналогично определяется f -дивергенция $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ конечных (неотрицательных) мер μ и ν . Если хотя бы одна из мер μ и ν σ -конечна, соответствующий интеграл может быть не определен (одновременно для всех ϱ) или быть равен $-\infty$.

Изложение теории f -дивергенций и ее применения в задачах математической статистики можно найти в монографии Ф. Лизе и И. Вайды [23]. В последнее время стали появляться работы, где теория f -дивергенций используется для решения некоторых задач финансовой математики, например, задачи нахождения верхних и нижних цен некоторых опционов европейского типа [18].

Другой областью применения теории f -дивергенций в финансовой математике является задача максимизации ожидаемой полезности (см. [13], [14], [12]). Применениями именно к этой задаче вызвана данная работа. Во-первых, мы расширяем область определения f -дивергенции со счетно-аддитивных мер до ограниченных конечно-аддитивных функций множества (для краткости называемых нами конечно-аддитивными мерами), принимающих неотрицательные значения. Соответствующие результаты были анонсированы автором в [17]. Во-вторых, мы рассматриваем более широкий класс функций f , а именно, считаем, что f — полунепрерывная снизу выпуклая функция на $\mathbf{R}_+$ со значениями в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, т.е. мы отказываемся от конечности f в точках интервала $(0, +\infty)$. В задаче максимизации ожидаемой полезности это отвечает отказу от условий Инада на функцию полезности, см. п. 4. Использование результатов данной статьи в задаче максимизации полезности автор намерен подробно обсудить в отдельной публикации.

Статья организована следующим образом. В п. 2 дается определение f -дивергенции и формулируется основной результат работы — теорема 1, в которой приведены основные свойства f -дивергенции. В п. 3 рассматривается задача о достижении минимума f -дивергенции $\mathcal{J}_f(P, Q)$ на множестве $(P, Q) \in \mathcal{Z}$ пар вероятностных мер. Основные результаты этого пункта — теорема 2 и следствие 2, в доказательстве которых ключевую роль играет расширение области определения f -дивергенции до конечно-аддитивных мер. Следствие 2 обобщает недавний результат Х. Фельмера и А. Гундель [12], доказанный другим методом. Пункт 4 содержит вспомогательные результаты. Теорема 1 доказана в п. 5. В заключительном п. 6 обсуждается обобщение пред-

ложенного подхода к определению f -дивергенции на случай конечного числа конечно-аддитивных мер, а именно, для множества $D \subseteq \mathbf{R}^k$ вводится понятие D -дивергенции $\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k)$; f -дивергенция есть частный случай D -дивергенции, отвечающий $k = 2$ и специальному выбору множества $D = D(f)$.

В выпуклом анализе принято доопределять функции, заданные на подмножестве линейного пространства, до функций, заданных на всем пространстве, полагая их равными $+\infty$ вне исходной области определения. Мы также считаем, что функция f , для которой будет определяться f -дивергенция, задана на $\mathbf{R}$, причем всегда $f(y) = +\infty$ при $y < 0$. Соответственно, f -дивергенция $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ будет определена для произвольных конечно-аддитивных мер μ, ν , но при этом $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = +\infty$, если хотя бы одна из мер принимает не только неотрицательные значения. Такой выбор основного объекта исследования объясняется приложениями, которые мы имеем в виду. В других приложениях может возникнуть необходимость рассмотрения дивергенций знакопеременных мер, см., например, работу [7], где рассматривалась γ -дивергенция знакопеременной счетно-аддитивной меры и вероятностной меры; γ имеет тот же смысл, что и f , но уже может принимать конечные значения на отрицательной полуоси. Следует подчеркнуть, однако, что рассматриваемое нами в п. 6 понятие D -дивергенции даже в случае $k = 2$ является значительно более общим по сравнению с γ -дивергенцией и устраняет всякое различие между положительными и отрицательными значениями мер; если же рассматривать f - и D -дивергенции мер с неотрицательными значениями, то эти два понятия, по существу, совпадают (для $k = 2$).

Для удобства читателя напомним терминологию и элементарные факты из выпуклого анализа, постоянно используемые в работе, см., например, [1, § 2.6] или [11, гл. 1].

Пусть X и X' — два линейных пространства, двойственных относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (в частности, в качестве одного из пространств можно взять банахово пространство, а в качестве другого — его сопряженное). Здесь пространства X и X' считаются наделенными топологиями $\sigma(X, X')$ и $\sigma(X', X)$ соответственно, превращающими их в хаусдорфовы локально выпуклые топологические векторные пространства. Пусть задана функция $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Эффективным множеством и надграфиком f называются множества

$$\text{dom } f := \{x \in X: f(x) < +\infty\}$$

и

$$\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R}: \alpha \geq f(x)\}$$

соответственно. Функция f выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик является выпуклым множеством. Функция f полунепрерывна

снизу на X тогда и только тогда, когда ее надграфик есть замкнутое множество (относительно произведения топологий на X и $\mathbf{R}$). Функция f называется собственной, если она не принимает значение $-\infty$ и $\text{dom } f \neq \emptyset$. Субдифференциал f в точке $x \in X$ обозначается $\partial f(x)$; напомним, что

$$\partial f(x) = \left\{ x' \in X' : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x' \rangle \text{ для любого } y \in X \right\}.$$

Сопряженной к f или преобразованием Фенхеля называется функция f^* на пространстве X' , задаваемая равенством

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} [\langle x, x' \rangle - f(x)].$$

Сопряженная функция полунепрерывна снизу и выпукла. Для собственной функции f имеем

$$x' \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(x') = \langle x, x' \rangle. \quad (3)$$

Из теоремы Фенхеля–Моро следует, что если f — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, то сопряженной к f^* является f , т.е.

$$f(x) = \sup_{x' \in X'} [\langle x, x' \rangle - f^*(x')], \quad x \in X.$$

Индикаторной функцией множества $C \subseteq X$ в выпуклом анализе принято называть функцию

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C, \\ +\infty, & \text{если } x \notin C. \end{cases}$$

Опорной функцией множества C называется δ_C^* . Опорные функции множества и его выпуклого замыкания (т.е. замыкания выпуклой оболочки) совпадают. Через $\text{int } C$ обозначается множество всех внутренних точек множества C .

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Через $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F})$ обозначается банахово пространство всех ограниченных измеримых функций ξ с нормой $\|\xi\| = \sup_\omega |\xi(\omega)|$. Как известно, сопряженное к $\mathcal{L}^\infty$ пространство можно отождествить с пространством $ba = ba(\mathcal{F})$ всех конечно-аддитивных ограниченных функций $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ с нормой полной вариации

$$\|\mu\| = \sup \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)|,$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Двойственность $\mathcal{L}^\infty$ и ba задается соотношением

$$\langle \xi, \mu \rangle = \mu(\xi) := \int_\Omega \xi d\mu, \quad \xi \in \mathcal{L}^\infty, \quad \mu \in ba.$$

Подпространство пространства ba , состоящее из всех счетно-аддитивных (знакопеременных) мер, обозначается ca . Для $\mu \in ba$ существует единственное разложение $\mu = \mu^c + \mu^a$, где $\mu^c \in ca$, а μ^a — так называемая чисто конечно-аддитивная мера, см., например, [30]. Если μ принимает неотрицательные значения, то тем же свойством обладают μ^c и μ^a .

Пусть P — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Банаховы пространства $L^1(P) = L^1(\mathcal{F}, P)$ и $L^\infty(P) = L^\infty(\mathcal{F}, P)$ понимаются в обычном смысле. Положим $ba(P) := \{\mu \in ba: \mu(A) = 0 \text{ для всех } A \in \mathcal{F} \text{ с } P(A) = 0\}$, $ca(P) = ba(P) \cap ca$. Пространство $ca(P)$ можно отождествить с $L^1(P)$, а $ba(P)$ — с сопряженным к $L^\infty(P)$. Если $\mu \in ba(P)$, то $\mu^c, \mu^a \in ba(P)$. Сопряженное к банахову пространству ca (с нормой полной вариации) обозначается ca^* .

Нижний индекс $+$ у рассматриваемых функциональных пространств указывает на конус неотрицательных элементов (элементов с неотрицательными значениями).

Везде используются соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$ и $a \cdot (+\infty) = +\infty$ при $a > 0$.

2. Определение f -дивергенции конечно-аддитивных мер и ее основные свойства. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\text{dom } f \subseteq \mathbf{R}_+$. По функции f построим функции g и F , определенные на $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2$ соответственно, со значениями в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$:

$$g(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}} [xy - f(y)], \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4)$$

$$F(s, t) = \sup_{x, y \in \mathbf{R}: y+g(x) \leq 0} (sx + ty), \quad (s, t) \in \mathbf{R}^2. \quad (5)$$

Свойства функций g и F будут изучаться в п. 4. В частности, будет показано, что g и F — собственные полунепрерывные снизу выпуклые функции, предел

$$\frac{f(\infty)}{\infty} := \lim_{y \uparrow +\infty} \frac{f(y)}{y}$$

существует и совпадает с $\sup\{x: x \in \text{dom } g\}$,

$$F(s, t) = \begin{cases} tf\left(\frac{s}{t}\right), & \text{если } s \geq 0 \text{ и } t > 0, \\ s \frac{f(\infty)}{\infty}, & \text{если } s > 0 \text{ и } t = 0, \\ 0, & \text{если } s = 0 \text{ и } t = 0, \\ +\infty, & \text{если } s < 0 \text{ или } t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

(ср. с (1)); в частности, функция F является положительно-однородной и $f(y) = F(y, 1)$ для всех $y \in \mathbf{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. f -дивергенцией конечно-аддитивных функций множества μ и ν , заданных на общем измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, называется величина

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \sup_{\xi, \eta \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}): \eta + g(\xi) \leq 0} [\mu(\xi) + \nu(\eta)].$$

Основные свойства так определенной f -дивергенции приведены в следующей теореме.

Теорема 1. (i) Функция $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ на $ba \times ba$ принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, выпукла и полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$.

(ii) Если $\mathcal{G}$ — σ -алгебра, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, то $\mathcal{J}_f(\mu|_{\mathcal{G}}, \nu|_{\mathcal{G}}) \leq \mathcal{J}_f(\mu, \nu)$.

(iii) Для любых $\mu, \nu \in ba$

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \sup \sum_{i=1}^n F(\mu(A_i), \nu(A_i)), \quad (7)$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. В частности, если $\mu \notin ba_+$ или $\nu \notin ba_+$, то $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = +\infty$.

(iv) Для любых $\mu, \nu \in ba$

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) + \mathcal{J}_f(\mu^a, \nu^a). \quad (8)$$

(v) Для любых $\mu, \nu \in sa$ и σ -конечной неотрицательной меры ϱ на $(\Omega, \mathcal{F})$, доминирующей μ и ν ,

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \int_{\Omega} F\left(\frac{d\mu}{d\varrho}, \frac{d\nu}{d\varrho}\right) d\varrho. \quad (9)$$

(vi) Для любых $\mu, \nu \in ba_+$

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \sup_{\xi \in \mathcal{L}^\infty: g(\xi) \in \mathcal{L}^\infty} [\mu(\xi) - \nu(g(\xi))].$$

(vii) Для любых $\mu, \nu \in ba_+$

$$F(\mu(\Omega), \nu(\Omega)) \leq \mathcal{J}_f(\mu, \nu) \leq \frac{f(\infty)}{\infty} \mu(\Omega) + f(0) \nu(\Omega).$$

(viii) Для любой $\mu \in ba_+$

$$\mathcal{J}_f(\mu, 0) = \frac{f(\infty)}{\infty} \mu(\Omega), \quad \mathcal{J}_f(0, \mu) = f(0) \mu(\Omega).$$

(ix) Если $t, s > 0$, то $\mathcal{J}_f(t\mu, t\nu) = t \mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ и $\mathcal{J}_f(t\mu, s\nu) = \mathcal{J}_h(\mu, \nu)$ для любых $\mu, \nu \in ba$, где $h(y) = sf(ty/s)$, $y \in \mathbf{R}$.

(x) Если f_1 и f_2 — собственные полунепрерывные снизу выпуклые функции с $\text{dom } f_i \subseteq \mathbf{R}_+$, $i = 1, 2$, и $\text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2 \neq \emptyset$, то

$$\mathcal{J}_{f_1+f_2}(\mu, \nu) = \mathcal{J}_{f_1}(\mu, \nu) + \mathcal{J}_{f_2}(\mu, \nu)$$

для любых $\mu, \nu \in ba$.

(xi) Если $f(y) = ty + s$, $y \in \mathbf{R}_+$, то $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = t\mu(\Omega) + s\nu(\Omega)$ для любых $\mu, \nu \in ba_+$.

(xii) Пусть $\text{dom } f \neq \{0\}$. Положим $\hat{f}(y) = F(1, y)$, $y \in \mathbf{R}$. Тогда $\hat{f}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\text{dom } \hat{f} \subseteq \mathbf{R}_+$ и $\mathcal{J}_f(\nu, \mu) = \mathcal{J}_{\hat{f}}(\mu, \nu)$ для любых $\mu, \nu \in ba$.

Как отмечалось выше, в классическом случае (f конечна на $(0, +\infty)$), меры счетно-аддитивны) в качестве определения f -дивергенции принимается соотношение (9); утверждение (v) показывает, что наше определение 1 согласуется с классическим. То же следует из утверждения (iii): в классическом случае соотношение (7) хорошо известно (см. [23, следствие 1.32]); более того, супремум можно брать по всем разбиениям Ω на множества из фиксированной алгебры $\mathcal{A}$, порождающей σ -алгебру $\mathcal{F}$. Для конечно-аддитивных мер это уже не так, поскольку продолжение конечно-аддитивной меры с алгебры на порождающую ее σ -алгебру, вообще говоря, неединственно. Монотонность (ii) является одним из основных свойств f -дивергенции, в классическом случае см. [23, теорема 1.24 и следствие 1.29]. Более тонкий результат, касающийся полунепрерывности снизу f -дивергенции в классическом случае, см. в [23, теорема 1.47]. По поводу области значений f -дивергенции (утверждение (vii)) и свойства симметрии (утверждение (xii)) в классическом случае см. [23, теоремы 1.12 и 1.13].

В заметке [17] мы определили f -дивергенцию конечно-аддитивных мер соотношением (7). Здесь мы предпочитаем взять определение 1 за исходное в силу соображений методологического характера. Отметим, например, что утверждения (i) и (ii) теоремы 1 непосредственно вытекают из определения 1, а утверждение (v) и частично утверждение (iv) суть немедленные следствия определения 1 и результатов Р. Рокафеллара [25], [26] о виде сопряженного функционала к функционалу интегрального типа. Действительно, пусть $\mu, \nu \in ba$ и существует такая вероятностная мера P , для которой $\mu, \nu \in ba(P)$ (что не ограничивает общности, если μ и ν счетно-аддитивны). Определим на $L^\infty(P) \times L^\infty(P)$ функционал

$$N(\xi, \eta) = \int_{\Omega} \delta_D(\xi, \eta) dP,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y + g(x) \leq 0\}$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае определение 1 сводится к равенству $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = N^*(\mu, \nu)$.

С другой стороны, сопряженной к функции δ_D является F в силу определения (5). Поэтому из теоремы 2 в [25] и теоремы 1 в [26] следует, что

$$\begin{aligned} N^*(\mu, \nu) &= \int_{\Omega} F\left(\frac{d\mu^c}{dP}, \frac{d\nu^c}{dP}\right) dP + \sup_{\substack{\xi, \eta \in L^\infty(P): \\ N(\xi, \eta) < +\infty}} [\mu^a(\xi) + \nu^a(\eta)] \\ &= \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) + \mathcal{J}_f(\mu^a, \nu^a). \end{aligned}$$

Для полноты изложения мы приведем в п. 5 другое доказательство утверждения (v). Что касается утверждения (iv), то оно будет доказано в полном объеме также в п. 5, но при этом ход рассуждений будет следовать доказательству теоремы 1 в [26].

В заключение отметим, что если функция $\mathcal{J}(\mu, \nu)$ на $ba \times ba$ полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$ и совпадает с $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ для $\mu, \nu \in sa_+$ (или хотя бы для пар (μ, ν) специального вида, см. ниже), то $\mathcal{J}(\mu, \nu) \leq \mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ на $ba \times ba$. Это вытекает из следующего рассуждения. Пусть $\mu, \nu \in ba_+$, а λ — конечное разбиение Ω на непустые дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ зафиксируем точку $\omega_i \in A_i$ и положим $\mu_\lambda = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \varepsilon_{\omega_i}$, $\nu_\lambda = \sum_{i=1}^n \nu(A_i) \varepsilon_{\omega_i}$, где ε_ω — мера Дирака в точке ω . Упорядочим разбиения λ по вложению порожденных ими конечных σ -алгебр $\sigma\{\lambda\}$. Легко видеть, что направленность (обобщенная последовательность, сеть) $(\mu_\lambda, \nu_\lambda)$ сходится к (μ, ν) в топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$. При этом в силу (9)

$$\mathcal{J}_f(\mu_\lambda, \nu_\lambda) = \mathcal{J}_f(\mu|_{\sigma\{\lambda\}}, \nu|_{\sigma\{\lambda\}}) = \sum_{i=1}^n F(\mu(A_i), \nu(A_i)),$$

и из утверждений (ii), (iii) теоремы 1 следует, что

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \lim_{\lambda} \mathcal{J}_f(\mu_\lambda, \nu_\lambda).$$

3. Применение к задаче минимизации f -дивергенции.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех вероятностных мер на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\text{dom } f \subseteq \mathbf{R}_+$. Предположим, что задано множество $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$. В этом пункте мы рассматриваем одну частную постановку следующего общего вопроса: при каких предположениях (на f и $\mathcal{Z}$) f -дивергенция $\mathcal{J}_f(P, Q)$ достигает своего минимума на $\mathcal{Z}$, т.е. существует экстремальная пара $(P_*, Q_*) \in \mathcal{Z}$, для которой

$$\mathcal{J}_f(P_*, Q_*) \leq \mathcal{J}_f(P, Q) \quad \text{для всех } (P, Q) \in \mathcal{Z} \quad (10)$$

В других постановках задача рассматривалась, например, в работах [8], [28], [23, раздел 8], [7], [21], [4], где можно найти дополнительные ссылки.

Подчеркнем, что функция f предполагается фиксированной. Мы не рассматриваем более специальный вопрос: когда существует «наименее благоприятная» пара $(P_*, Q_*) \in \mathcal{Z}$, удовлетворяющая (10) *одновременно для всех* f ? Иными словами, когда среди бинарных статистических экспериментов $(\Omega, \mathcal{F}, (P, Q))$, $(P, Q) \in \mathcal{Z}$, существует наименее информативный (в смысле сравнения статистических экспериментов)? В задаче робастной проверки гипотез такой вопрос возникает с множествами $\mathcal{Z}$ вида $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$; условия существования наименее информативного эксперимента изучались, например, в работах [19], [2], [20].

При некоторых предположениях интересующий нас вопрос является элементарным, например, если $\mathcal{Z}$ содержит диагональный элемент (P, P) . Другое предположение, при котором мы немедленно получаем желаемый ответ, состоит в компактности множества $\mathcal{Z}$ в слабой топологии $\sigma(ca \times ca, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$. Действительно, в силу утверждения (i) теоремы 1 f -дивергенция полунепрерывна снизу в (индуцируемой на $ca \times ca$ топологией $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$) топологии $\sigma(ca \times ca, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$, а полунепрерывная снизу функция достигает на компакте своего минимума.

В дальнейшем нас будет интересовать, как можно ослабить предположение о компактности $\mathcal{Z}$ при дополнительном ограничении на функцию f , а именно, в случае $f(\infty)/\infty = +\infty$. Основные результаты сформулированы ниже в теореме 2 и следствии 2. Приведем рассуждение, на котором основано доказательство теоремы 2. Рассмотрим $\mathcal{Z}$ как подмножество $ba \times ba$, и пусть $\overline{\mathcal{Z}}$ — его замыкание в топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$. Так как множество $\mathcal{Z}$ ограничено по норме, оно компактно в топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$ по теореме Банаха–Алаоглу. Поэтому f -дивергенция $\mathcal{I}_f(\mu, \nu)$ достигает своего минимума на $\overline{\mathcal{Z}}$, и для того, чтобы она достигала своего минимума на $\mathcal{Z}$, достаточно, чтобы $\mathcal{I}_f(\mu, \nu) = +\infty$ для всех $(\mu, \nu) \in \overline{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$. Последнее будет выполнено, если для любой пары $(\mu, \nu) \in \overline{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ имеет место $\mu \notin ca$, $\nu \in ca$ — действительно, тогда $\mu^a \neq 0$, $\nu^a = 0$, и $\mathcal{I}_f(\mu, \nu) = +\infty$ в силу утверждений (iv) и (viii) теоремы 1.

В следующих утверждениях обсуждаются предположения, которые встретятся в теореме 2 и следствии 2.

Предложение 1. *Выпуклое множество $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ замкнуто в ca относительно топологии $\sigma(ca, ca^*)$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в ca относительно сходимости по вариации. Выпуклое множество $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ замкнуто в $ca \times ca$ относительно топологии $\sigma(ca \times ca, ca^* \times ca^*)$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $ca \times ca$ относительно покоординатной сходимости по вариации.*

Доказательство. В банаховом пространстве замкнутое по норме выпуклое множество замкнуто и в слабой топологии.

Следующее предложение хорошо известно (см., например, [3, теорема 4.7.26], а также [24, раздел IV.2]).

Предложение 2. Пусть $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathcal{Q}$ относительно компактно в ca относительно топологии $\sigma(ca, ca^*)$;
- (ii) $\mathcal{Q}$ относительно компактно в ca относительно топологии $\sigma(ca, \mathcal{L}^\infty)$;
- (iii) существует такая вероятность $R \in \mathbb{P}$, что $Q \ll R$ для любой $Q \in \mathcal{Q}$ и семейство случайных величин

$$\left\{ \frac{dQ}{dR} : Q \in \mathcal{Q} \right\}$$

равномерно интегрируемо по мере R .

Следствие 1. Пусть $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathcal{Q}$ компактно в ca относительно топологии $\sigma(ca, ca^*)$;
 - (ii) $\mathcal{Q}$ замкнуто в ba относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$.
- Более того, если $\mathcal{Q}$ — выпуклое множество, то утверждения (i) и (ii) эквивалентны каждому из следующих утверждений:
- (iii) существует такая вероятность $R \in \mathbb{P}$, что $Q \ll R$ для любой $Q \in \mathcal{Q}$ и семейство случайных величин

$$\left\{ \frac{dQ}{dR} : Q \in \mathcal{Q} \right\}$$

замкнуто в $L^1(R)$ и равномерно интегрируемо по мере R ;

- (iv) существует такая вероятность $R \in \mathbb{P}$, что $Q \ll R$ для любой $Q \in \mathcal{Q}$ и семейство случайных величин

$$\left\{ \frac{dQ}{dR} : Q \in \mathcal{Q} \right\}$$

замкнуто относительно сходимости по мере R .

Доказательство. Так как элементы $\mathcal{Q}$ принадлежат единичному шару в ba , по теореме Банаха–Алаоглу утверждение (ii) эквивалентно компактности $\mathcal{Q}$ в ba относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$, что эквивалентно компактности $\mathcal{Q}$ в ca относительно топологии $\sigma(ca, \mathcal{L}^\infty)$. Так как топология $\sigma(ca, ca^*)$ сильнее, чем топология $\sigma(ca, \mathcal{L}^\infty)$, из (i) следует (ii). По той же причине из (ii) следует замкнутость $\mathcal{Q}$ в ca относительно топологии $\sigma(ca, ca^*)$, и импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) следует из аналогичной импликации в предложении 2. Даже без предположения о выпуклости $\mathcal{Q}$ импликация (iii) $\Rightarrow$ (iv) тривиальна, а (i) $\Rightarrow$ (iii) немедленно следует из аналогичной импликации в предложении 2.

Что касается импликации $(iv) \Rightarrow (i)$, то ее короткий вывод можно найти в [29, лемма 3.2]; однако этот вывод основан на глубоком результате из общей теории банаховых пространств — теореме Джеймса о компактных множествах в слабой топологии. Другое доказательство можно найти в [3, пример 4.7.25]. Для удобства читателя мы сформулируем и докажем лемму 1, которая немедленно дает еще одно доказательство импликации $(iv) \Rightarrow (ii)$. Следствие 1 доказано.

Лемма 1. *Предположим, что R — вероятностная мера, множество $M \subseteq L^1(R)$ состоит из вероятностных плотностей и выпукло. Пусть $\overline{M}$ — замыкание M относительно сходимости по мере R , $\mathcal{Q} = \{Q \in \mathbb{P}: dQ/dR \in M\}$, $\overline{\mathcal{Q}}$ — замыкание $\mathcal{Q}$ в ba относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$. Тогда*

$$\left\{ \frac{d\mu^c}{dR} : \mu \in \overline{\mathcal{Q}} \right\} = \overline{M}.$$

З а м е ч а н и я. 1. Ясно, что $\overline{\mathcal{Q}}$ есть также замыкание $\mathcal{Q}$ в $ba(R)$ относительно топологии $\sigma(ba(R), L^\infty(R))$. В частности, $\mu^c \ll R$ для любой $\mu \in \overline{\mathcal{Q}}$.

2. Очевидно, что множество $\overline{M}$ можно также определить как множество пределов всех последовательностей из M , сходящихся R -п.н.

3. Для доказательства вложения $\supseteq$, которое есть специальный случай предложения А.1 в [9], выпуклость $\mathcal{Q}$ не используется.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mu \in ba$, $A \in \mathcal{F}$, то $\mu|_A$ определяется соотношением $\mu|_A(B) = \mu(B \cap A)$, $B \in \mathcal{F}$.

($\supseteq$) Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность из M , сходящаяся R -п.н. к ξ , а меры $Q_n \in \mathcal{Q}$ определены соотношением $dQ_n/dR = \xi_n$. По теореме Банаха–Алаоглу последовательность $\{Q_n\}$ имеет в ba предельную точку относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$, скажем, μ . Покажем, что $d\mu^c/dR = \xi$ R -п.н. По теореме Егорова для любого натурального k найдется такое множество $A_k \in \mathcal{F}$, что $R(A_k) > 1 - 1/k$ и ξ_n сходятся к ξ равномерно на A_k при $n \rightarrow \infty$. В частности, $\xi_n \mathbf{1}_{A_k}$ сходятся к $\xi \mathbf{1}_{A_k}$ в $L^1(R)$ для каждого k , т.е. последовательность $\{Q_n|_{A_k}\}$ сходится по вариации к счетно-аддитивной мере с плотностью $\xi \mathbf{1}_{A_k}$ относительно R . Но $\mu|_{A_k}$ есть предельная точка последовательности $\{Q_n|_{A_k}\}$ относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$. Значит, $\mu|_{A_k} = \mu^c|_{A_k}$ и $(d\mu^c/dR) \mathbf{1}_{A_k} = \xi \mathbf{1}_{A_k}$ для любого k , откуда $d\mu^c/dR = \xi$ R -п.н.

($\subseteq$) Пусть $\mu \in \overline{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q} \subseteq ba_+$. По известному свойству чисто конечно-аддитивных мер (см. [30, теорема 1.19]), найдется такая последовательность $\{A_k\}$ множеств из $\mathcal{F}$, что $R(A_k) > 1 - 1/k$ и $\mu^a(A_k) = 0$ для всех k ; переходя к конечным объединениям, можно считать последовательность $\{A_k\}$ возрастающей. Мера $\mu|_{A_k}$ счетно-аддитивна; кроме того, она принадлежит замыканию выпуклого множества $\{Q|_{A_k} : Q \in \mathcal{Q}\}$,

причем замыкание можно брать в пространстве $sa(R)$ относительно топологии $\sigma(sa(R), L^\infty(R))$. Эквивалентно, $\xi \mathbf{1}_{A_k}$, где $\xi = d\mu^c/dR$, лежит в замыкании выпуклого множества $\{\zeta \mathbf{1}_{A_k} : \zeta \in M\}$ в $L^1(R)$ относительно топологии $\sigma(L^1(R), L^\infty(R))$. Так как замыкания выпуклого множества в сильной и слабой топологиях банахова пространства совпадают, для любого k найдется такая $\zeta_k \in M$, что $\|(\xi - \zeta_k) \mathbf{1}_{A_k}\|_{L^1(R)} < 1/k$. Построим такие выпуклые комбинации $\eta_k \in \text{conv}\{\zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots\} \subseteq M$, что η_k сходятся R -п.н. к некоторой $\eta \in \bar{M}$ при $k \rightarrow \infty$ (это можно сделать, например, в силу леммы A1.1 в [10]). Тогда при $n \geq k$ имеем $\|(\xi - \zeta_n) \mathbf{1}_{A_k}\|_{L^1(R)} \leq \|(\xi - \zeta_n) \mathbf{1}_{A_n}\|_{L^1(R)} < 1/n \leq 1/k$, поэтому $\|(\xi - \eta_k) \mathbf{1}_{A_k}\|_{L^1(R)} < 1/k$, откуда $(\xi - \eta_k) \mathbf{1}_{A_k} \xrightarrow{R} 0$; значит, $\xi = \eta$ R -п.н. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $f(\infty)/\infty = +\infty$, множество $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ замкнуто в $sa \times sa$ относительно топологии $\sigma(sa \times sa, sa^* \times sa^*)$, а проекция $\mathcal{Q} := \{Q \in \mathbb{P} : (P, Q) \in \mathcal{Z} \text{ для некоторой } P \in \mathbb{P}\}$ относительно компактна в sa относительно топологии $\sigma(sa, sa^*)$. Тогда найдется такая пара $(P_*, Q_*) \in \mathcal{Z}$, что

$$\mathcal{I}_f(P_*, Q_*) \leq \mathcal{I}_f(P, Q) \quad \text{для всех } (P, Q) \in \mathcal{Z}.$$

Следующий результат есть частный случай теоремы 2.

Следствие 2. Пусть $f(\infty)/\infty = +\infty$, множество $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ замкнуто в sa относительно топологии $\sigma(sa, sa^*)$, а множество $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}$ компактно в sa относительно топологии $\sigma(sa, sa^*)$. Тогда найдутся такие меры $P_* \in \mathcal{P}$ и $Q_* \in \mathcal{Q}$, что

$$\mathcal{I}_f(P_*, Q_*) \leq \mathcal{I}_f(P, Q) \quad \text{для всех } P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}.$$

При классических предположениях на f и для выпуклых $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ следствие 2 не является новым. Если множество $\mathcal{P}$ выпукло, а $\mathcal{Q} = \{Q\}$ состоит из одной точки, утверждение было доказано И. Чисаром [6] в случае $f(u) = u \ln u$ и Ф. Лизе [22] в общем случае (см. также [23, предложение 8.5]). Для выпуклых доминируемых $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ следствие 2 было недавно доказано Х. Фельмером и А. Гундель [12] довольно трудоемким методом.

Доказательство теоремы 2. В силу предложения 2 семейство $\mathcal{Q}$ доминируется некоторой вероятностной мерой R . Если мера $P \in \mathbb{P}$ не абсолютно непрерывна относительно R , то $\mathcal{I}_f(P, Q) = +\infty$ для любой $Q \in \mathcal{Q}$ в силу утверждения (iii) теоремы 1. Заметим, что $sa(R)$ замкнуто в sa относительно топологии $\sigma(sa, sa^*)$. Поэтому, заменяя множество $\mathcal{Z}$ на $\{(P, Q) \in \mathcal{Z} : P \ll R\}$, можно считать без ограничения общности, что $P \ll R$, если $(P, Q) \in \mathcal{Z}$. Пусть $\bar{\mathcal{Z}}$ — замыкание $\mathcal{Z}$ в $ba \times ba$ относительно топологии $\sigma(ba \times ba, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$, и пусть $(\mu, \nu) \in \bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$. Тогда ν лежит в замыкании множества $\mathcal{Q}$ в ba относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$. Из предположения на $\mathcal{Q}$ и предложения 2

следует, что замыкание $\overline{\mathcal{Q}}$ множества $\mathcal{Q}$ в ca относительно топологии $\sigma(ca, \mathcal{L}^\infty)$ компактно. Так как топология $\sigma(ca, \mathcal{L}^\infty)$ индуцируется топологией $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$, множество $\overline{\mathcal{Q}}$ также компактно в ba относительно топологии $\sigma(ba, \mathcal{L}^\infty)$; в частности, $\nu \in \overline{\mathcal{Q}} \subseteq ca$. В силу приведенного в начале этого пункта рассуждения остается показать, что $\mu \notin ca$. Отождествим знакопеременные счетно-аддитивные меры, абсолютно непрерывные относительно R , с элементами $L^1(R)$. Поскольку топология на $L^1(R) \times L^1(R)$, индуцируемая топологией $\sigma(ca \times ca, ca^* \times ca^*)$, совпадает с топологией $\sigma(L^1(R) \times L^1(R), L^\infty(R) \times L^\infty(R))$, множество $\mathcal{Z}$ замкнуто в $L^1(R) \times L^1(R)$ относительно топологии $\sigma(L^1(R) \times L^1(R), L^\infty(R) \times L^\infty(R))$ и, следовательно, замкнуто в $ca \times ca$ относительно топологии $\sigma(ca \times ca, \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty)$. Поэтому $(\mu, \nu) \notin ca \times ca$, т.е. $\mu \notin ca$. Теорема 2 доказана.

4. Вспомогательные результаты. Обозначим $\mathcal{V}$ класс всех собственных полунепрерывных снизу выпуклых функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ с $\text{dom } f \subset \mathbf{R}_+$, а $\mathcal{W}$ — класс всех собственных полунепрерывных снизу выпуклых неубывающих функций $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Предложение 3. *Отображение $\mathcal{V} \ni f \rightsquigarrow g$, задаваемое соотношением*

$$g(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}} [xy - f(y)], \quad x \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

является взаимно однозначным отображением из $\mathcal{V}$ на $\mathcal{W}$. Обратное отображение задается формулой

$$f(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [xy - g(x)], \quad y \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathcal{V}$ и g задается формулой (11). Тогда g — преобразование Фенхеля функции f , значит, g — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, и по теореме Фенхеля–Моро имеет место (12), в частности, рассматриваемое отображение инъективно. Так как $\text{dom } f \subset \mathbf{R}_+$, из (11) следует, что g не убывает, т.е. $g \in \mathcal{W}$.

Пусть теперь $g \in \mathcal{W}$. Зададим функцию f соотношением (12). Тогда f — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция. Поскольку g не убывает, из (12) ясно, что $f(y) = +\infty$ при $y < 0$, поэтому $f \in \mathcal{V}$. По теореме Фенхеля–Моро имеет место (11), поэтому образ $\mathcal{V}$ при рассматриваемом отображении совпадает с $\mathcal{W}$. Предложение 3 доказано.

Введем обозначения, используемые далее в этом пункте. Пусть $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция. Положим

$$l_h = \inf\{x: x \in \text{dom } h\}, \quad r_h = \sup\{x: x \in \text{dom } h\}.$$

Пусть $l_h \leq \alpha < \beta \leq r_h$. Если $\alpha \in \mathbf{R}$ и $h(\alpha) \in \mathbf{R}$, то через $h'_+(\alpha)$ обозначаем правую производную h в точке α , в противном случае $h'_+(\alpha)$ понимается как $\lim_{x \downarrow \alpha} h'_+(x)$. Символ $h'_-(\beta)$ понимается аналогично. Положим

$$L_h = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } l_h > -\infty, \\ \{x \in \text{dom } h: h'_-(x) = h'_+(-\infty)\}, & \text{если } l_h = -\infty, \end{cases}$$

$$R_h = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } r_h < +\infty, \\ \{x \in \text{dom } h: h'_+(x) = h'_-(+\infty)\}, & \text{если } r_h = +\infty. \end{cases}$$

Предложение 4. Пусть функции $f \in \mathcal{V}$ и $g \in \mathcal{W}$ связаны соотношениями (11) и (12). Имеют место следующие утверждения.

- (i) $l_f = g'_+(-\infty)$ и $\partial f(l_f) = L_g$.
- (ii) $r_g = +\infty$ и $g'_-(+\infty) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $r_f = +\infty$ и $f'_-(+\infty) = +\infty$.
- (iii) $r_g = +\infty$ и $g'_-(+\infty) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $r_f < +\infty$. При этом $r_f = g'_-(+\infty)$ и $\partial f(r_f) = R_g$.
- (iv) $r_g < +\infty$ тогда и только тогда, когда $r_f = +\infty$ и $f'_-(+\infty) < +\infty$. При этом $r_g = f'_-(+\infty)$ и $\partial g(r_g) = R_f$.
- (v) Функция g дифференцируема на $\text{int dom } g$ тогда и только тогда, когда функция f строго выпукла на $\text{dom } f \setminus R_f$. Функция f строго выпукла на $\text{dom } f$ тогда и только тогда, когда функция g дифференцируема на $\text{int dom } g$ и $R_f = \emptyset$.
- (vi) Функция f дифференцируема на $\text{int dom } f$ тогда и только тогда, когда функция g строго выпукла на $\text{dom } g \setminus (L_g \cup R_g)$. Функция g строго выпукла на $\text{dom } g$ тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема на $\text{int dom } f$ и $L_g \cup R_g = \emptyset$.

Доказательство всех утверждений основано на известном соотношении

$$x \in \partial f(y) \iff y \in \partial g(x), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

(ср. с (3)), и предоставляется читателю (см. также [27, раздел 26]).

Сформулируем два следствия предложений 3 и 4. В первом из них описывается в терминах g ситуация, когда функция f конечна на $(0, +\infty)$, т.е. принадлежит классу функций, для которых определяется f -дивергенция в классическом смысле.

Следствие 3. Пусть функции $f \in \mathcal{V}$ и $g \in \mathcal{W}$ связаны соотношениями (11) и (12). Для того чтобы выполнялось включение $\text{dom } f \supseteq (0, +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $g'_+(-\infty) = 0$ и либо $r_g < +\infty$, либо $r_g = +\infty$ и $g'_-(+\infty) = +\infty$.

Следующие предположения на функцию полезности U являются классическими в финансовой математике: $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ не убывает на $\mathbf{R}$, дифференцируема и строго вогнута на $\text{int}\{x:$

$U(x) > -\infty\} =: (a, +\infty)$ и выполнены условия Инада: $\lim_{x \downarrow a} U'(x) = +\infty$ и $\lim_{x \uparrow +\infty} U'(x) = 0$. Определим функцию

$$V(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbf{R}.$$

Положим $W(x) = -U(-x)$, $x \in \mathbf{R}$; если $a \in \mathbf{R}$, то переопределим при необходимости функцию W в точке $-a$ так, чтобы она стала непрерывной слева в этой точке. Тогда $W \in \mathcal{W}$, и в силу неравенства $U(a) \leq -W(-a)$ имеет место соотношение

$$V(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [xy - W(x)], \quad y \in \mathbf{R},$$

в частности, $V \in \mathcal{V}$.

Следствие 4. *Функция полезности U удовлетворяет перечисленным выше предположениям тогда и только тогда, когда $V \in \mathcal{V}$, $\text{int dom } V = (0, +\infty)$, V дифференцируема и строго выпукла на $(0, +\infty)$, $V'_+(0) = +\infty$. При этом $a = -V'_-(+\infty)$ и*

$$U(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} [xy + V(y)], \quad x \neq a.$$

До конца данного пункта будем предполагать, что фиксирована функция $f \in \mathcal{V}$, функция $g \in \mathcal{W}$ определена соотношением (11) (или (4)), а функция F — соотношением (5). Положим $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y + g(x) \leq 0\}$.

Лемма 2. *D — непустое замкнутое выпуклое множество, F — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, выполнено соотношение (6), и существует предел $\lim_{y \uparrow +\infty} f(y)/y$, совпадающий с r_g , а если $r_f = +\infty$ — также с $f'_-(+\infty)$.*

Доказательство. По предложению 3 g — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, поэтому ее надграфик

$$\text{epi } g = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x \in \text{dom } g, y \geq g(x)\}$$

есть непустое выпуклое замкнутое множество; то же верно для множества D , получаемого отражением множества $\text{epi } g$ относительно горизонтальной оси. По определению F есть преобразование Фенхеля функции δ_D , поэтому F — полунепрерывная снизу выпуклая функция. Ясно, что $F(s, t) = +\infty$, если $t < 0$. Пусть $t > 0$, тогда

$$F(s, t) = \sup_{x \in \text{dom } g} [sx - tg(x)] = \sup_{x \in \mathbf{R}} t \left[\frac{s}{t} x - g(x) \right] = tf\left(\frac{s}{t}\right)$$

в силу (12). Далее,

$$F(s, 0) = \sup_{x \in \text{dom } g} sx = \begin{cases} +\infty, & \text{если } s < 0, \\ 0, & \text{если } s = 0, \\ sr_g, & \text{если } s > 0. \end{cases}$$

В случае $r_f = +\infty$ по предложению 4 имеем $r_g = f'_-(+\infty)$. Наконец, функция $F(1, t)$ выпукла и полунепрерывна снизу по t ; по доказанному она равна $tf(1/t)$ при $t > 0$. Значит, в случае $r_f = +\infty$ она конечна при малых положительных t , следовательно, она непрерывна справа в нуле, откуда следует, что предел $\lim_{y \uparrow +\infty} f(y)/y$ существует и равен r_g . Если же $r_f < +\infty$, то предел, очевидно, существует и равен $+\infty$, в то время как $r_g = +\infty$ по предложению 4. Лемма 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Положим $\mathbf{D} = \{(\xi, \eta) \in \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in D \text{ для всех } \omega\}$, где множество D определено перед леммой 2. Для доказательства утверждения (i) достаточно заметить, что функция $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ на $ba \times ba$ по определению есть преобразование Фенхеля функции $\delta_{\mathbf{D}}(\xi, \eta)$ на $\mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^\infty$.

Утверждение (ii) есть непосредственное следствие определения f -дивергенции. Применяя (ii) к $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, получаем левое неравенство в утверждении (vii). Далее, если $\eta(\omega) + g(\xi(\omega)) \leq 0$, то в силу определения функции F и леммы 2 имеем $\xi(\omega) \leq F(1, 0) = f(\infty)/\infty$, $\eta(\omega) \leq F(0, 1) = f(0)$, откуда следует правое неравенство в утверждении (vii). Утверждения (viii) и (xi) следуют из (vii).

Пусть σ -алгебра $\mathcal{F}$ конечна и порождена разбиением Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mu, \nu) &= \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n: \\ y_i + g(x_i) \leq 0}} \sum_{i=1}^n [x_i \mu(A_i) + y_i \nu(A_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sup_{x_i, y_i: y_i + g(x_i) \leq 0} [x_i \mu(A_i) + y_i \nu(A_i)] = \sum_{i=1}^n F(\mu(A_i), \nu(A_i)). \end{aligned}$$

Возвращаясь к общему случаю, получаем из утверждения (ii), что левая часть (7) больше или равна правой. Для доказательства обратного неравенства достаточно рассмотреть случай $\mu, \nu \in ba_+$, иначе правая часть равна $+\infty$. Возьмем любое число $\alpha < \mathcal{J}_f(\mu, \nu)$, тогда по определению найдутся такие ξ и η из $\mathcal{L}^\infty$, что $\eta + g(\xi) \leq 0$ и $\beta := \mu(\xi) + \nu(\eta) > \alpha$. Положим $\delta = (\beta - \alpha)/(\mu(\Omega) + \nu(\Omega))$ и возьмем такое конечное разбиение Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, что $|\xi(\omega) - \xi(\omega')| < \delta$ и $|\eta(\omega) - \eta(\omega')| < \delta$, если ω и ω' лежат в одном и том же элементе разбиения. Для каждого $i = 1, \dots, n$ возьмем точку $\omega_i \in A_i$ и положим $\tilde{\xi}(\omega) = \xi(\omega_i)$ и $\tilde{\eta}(\omega) = \eta(\omega_i)$, если $\omega \in A_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\tilde{\eta} + g(\tilde{\xi}) \leq 0$ и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F(\mu(A_i), \nu(A_i)) &\geq \sum_{i=1}^n [\tilde{\xi}(\omega_i) \mu(A_i) + \tilde{\eta}(\omega_i) \nu(A_i)] = \mu(\tilde{\xi}) + \nu(\tilde{\eta}) \\ &\geq \mu(\xi) + \eta(\nu) - \delta(\mu(\Omega) + \nu(\Omega)) = \alpha. \end{aligned}$$

Утверждение (iii) доказано.

Неравенство

$$\mathcal{I}_f(\mu, \nu) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{L}^\infty: g(\xi) \in \mathcal{L}^\infty} [\mu(\xi) - \nu(g(\xi))],$$

очевидно, выполнено для любых $\mu, \nu \in ba$. Докажем обратное неравенство для $\mu, \nu \in ba_+$. Для этого заметим, что для $s, t \geq 0$

$$F(s, t) = \sup_{x \in \text{dom } g} [sx - tg(x)].$$

Поэтому, как и в доказательстве утверждения (iii), для любого разбиения Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathcal{L}^\infty: g(\xi) \in \mathcal{L}^\infty} [\mu(\xi) - \nu(g(\xi))] &\geq \sup_{x_1, \dots, x_n \in \text{dom } g} \sum_{i=1}^n [x_i \mu(A_i) - g(x_i) \nu(A_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n F(\mu(A_i), \nu(A_i)). \end{aligned}$$

С учетом утверждения (iii) получаем утверждение (vi).

Пусть функция h определена как в утверждении (ix). Тогда сопряженная к ней функция h^* связана с g соотношением $h^*(x) = sg(x/t)$, и второе соотношение в утверждении (ix) следуют из определения f -дивергенции. Что касается первого соотношения, то оно очевидно.

В п. 2 приводилось доказательство утверждения (v), основанное на общих результатах Р. Рокафеллара. Здесь мы приведем прямое доказательство в духе доказательства теоремы 1.30 в [23]. Достаточно рассмотреть случай $\mu, \nu \in ca_+$, так как в противном случае обе части (9) равны $+\infty$. Учитывая положительную однородность функции F (см. (6)), также достаточно предположить, что $\varrho = R$ — вероятностная мера. Пусть $p = d\mu/dR$, $q = d\nu/dR$, а $\mathcal{G}$ — наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы p и q . Так как $\mathcal{G}$ счетно порождена, найдется такая возрастающая последовательность $\mathcal{G}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \dots$ конечных σ -подалгебр, что $\mathcal{G} = \bigvee_n \mathcal{G}_n$. Сужения мер R, μ, ν на σ -алгебру $\mathcal{G}_n$ обозначим R_n, μ_n, ν_n соответственно, тогда $p_n := d\mu_n/dR_n = \mathbb{E}_R(p | \mathcal{G}_n)$, $q_n := d\nu_n/dR_n = \mathbb{E}_R(q | \mathcal{G}_n)$. По теореме Дуба о сходимости мартингалов при $n \rightarrow \infty$

$$p_n \rightarrow \mathbb{E}_R(p | \mathcal{G}) = p, \quad q_n \rightarrow \mathbb{E}_R(q | \mathcal{G}) = q \quad R\text{-п.н.}$$

В силу того, что F полунепрерывна снизу и $F(p_n, q_n)$ ограничена снизу равномерно интегрируемой (относительно R) последовательностью $p_n x + q_n y$ (где (x, y) — произвольная фиксированная точка из D), из леммы Фату заключаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_R F(p, q) &\leq \mathbb{E}_R \liminf_n F(p_n, q_n) \leq \liminf_n \mathbb{E}_R F(p_n, q_n) \\ &= \liminf_n \mathcal{I}_f(\mu_n, \nu_n) \leq \mathcal{I}_f(\mu, \nu), \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из утверждения (ii). Остается заметить, что $F(p, q) \geq p\xi + q\eta$ для любой пары $(\xi, \eta) \in \mathbf{D}$, откуда $\mathbb{E}_R F(p, q) \geq \mu(\xi) + \nu(\eta)$ для всех $(\xi, \eta) \in \mathbf{D}$.

Докажем утверждение (iv). Достаточно рассмотреть случай $\mu, \nu \in ba_+$. Неравенство $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) \leq \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) + \mathcal{J}_f(\mu^a, \nu^a)$ следует из выпуклости и положительной однородности f -дивергенции (утверждения (i) и (ix)). Пусть вероятностная мера P доминирует счетно-аддитивные меры μ^c и ν^c , $p = d\mu^c/dP$, $q = d\nu^c/dP$. Так как меры μ^a и ν^a чисто конечно-аддитивны, по теореме 1.19 в [30] найдутся такие последовательности $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ множеств из $\mathcal{F}$, что $P(B_n) \geq 1 - 1/n$, $P(C_n) \geq 1 - 1/n$, $\mu^a(B_n) = 0$ и $\nu^a(C_n) = 0$ для любого n ; переходя к конечным объединениям, можно считать эти последовательности возрастающими.

Возьмем произвольные числа $\alpha < \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c)$, $\delta > 0$ и пару случайных величин $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \mathbf{D}$. Так как $\mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) = \int_{\Omega} F(p, q) dP$ по утверждению (v), при достаточно больших n

$$\int_{B_n \cap C_n} F(p, q) dP > \alpha \quad \text{и} \quad \int_{\Omega \setminus (B_n \cap C_n)} (\bar{\xi}p + \bar{\eta}q) dP > -\delta.$$

Пусть n таково, что эти неравенства выполнены; положим $E = B_n \cap C_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mu, \nu) &= \sup_{(\xi, \eta) \in \mathbf{D}} [\mu^c(\xi) + \nu^c(\eta) + \mu^a(\xi) + \nu^a(\eta)] \\ &= \sup_{(\xi, \eta) \in \mathbf{D}} [\mu^c(\xi \mathbf{1}_E) + \nu^c(\eta \mathbf{1}_E) + \mu^c(\xi \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) + \nu^c(\eta \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) \\ &\quad + \mu^a(\xi \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) + \nu^a(\eta \mathbf{1}_{\Omega \setminus E})] \\ &\geq \sup_{(\xi, \eta) \in \mathbf{D}} [\mu^c(\xi \mathbf{1}_E) + \nu^c(\eta \mathbf{1}_E)] \\ &\quad + [\mu^c(\bar{\xi} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) + \nu^c(\bar{\eta} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) + \mu^a(\bar{\xi} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}) + \nu^a(\bar{\eta} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E})]. \end{aligned}$$

В силу утверждения (v)

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \mathbf{D}} [\mu^c(\xi \mathbf{1}_E) + \nu^c(\eta \mathbf{1}_E)] = \int_E F(p, q) dP > \alpha,$$

поэтому

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) \geq \alpha - \delta + \mu^a(\bar{\xi}) + \nu^a(\bar{\eta}).$$

В силу произвольности выбора α , δ , $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ имеем

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) \geq \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) + \sup_{(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \mathbf{D}} [\mu^a(\bar{\xi}) + \nu^a(\bar{\eta})] = \mathcal{J}_f(\mu^c, \nu^c) + \mathcal{J}_f(\mu^a, \nu^a).$$

Заметим, что в предположениях утверждения (x) $f := f_1 + f_2$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция. В силу (6) F есть

сумма соответствующих функциям f_1 и f_2 функций F_1 и F_2 , и утверждение (х) легко следует из утверждений (iii) и (ii).

Пусть $\text{dom } f \neq \{0\}$, т.е. функция g не равна тождественно константе. Так как g — выпуклая и полунепрерывная снизу функция, то ее надграфик $\text{epi } g$, как отмечалось в доказательстве леммы 2, есть выпуклое замкнутое множество. Рассмотрим отображение $(x, y) \rightsquigarrow (-y, -x)$ плоскости на себя, т.е. отражение относительно биссектрисы второго и четвертого координатного углов. Удобно также представить это отображение как поворот плоскости по часовой стрелке на 90° вокруг начала координат с последующим отражением относительно вертикальной оси. Легко видеть, что образ $\text{epi } g$ при этом отображении есть также надграфик некоторой собственной неубывающей функции, а именно функции

$$\widehat{g}(x) = \inf \{y \in \mathbf{R}: g(-y) \leq -x\} \quad (\inf \emptyset = +\infty).$$

Так как отражение сохраняет свойства выпуклости и замкнутости, функция $\widehat{g}$ выпукла и полунепрерывна снизу, т.е. $\widehat{g} \in \mathcal{W}$. Из определения сразу получаем, что

$$g(x) + y \leq 0 \iff \widehat{g}(y) + x \leq 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \quad (13)$$

Преобразование Фенхеля функции $\widehat{g}$ обозначим $\widehat{f}$ и построим функцию $\widehat{F}$ с помощью соотношения (5), заменяя в нем g на $\widehat{g}$. Из (13) ясно, что $F(x, y) = \widehat{F}(y, x)$, поэтому определенная нами функция $\widehat{f}$ удовлетворяет $\widehat{f}(y) = F(1, y)$, $y \in \mathbf{R}$. Теперь утверждение (xii) очевидно. Теорема 1 доказана.

6. Заключительные замечания. Идею, лежащую в основе нашего определения f -дивергенции, можно использовать для определения более общего класса «выпуклых дивергенций», причем не только двух конечно-аддитивных мер, но и конечного их числа.

Именно, пусть задано произвольное множество $D \subseteq \mathbf{R}^k$. Обозначим $(\mathcal{L}^\infty)^k = \underbrace{\mathcal{L}^\infty \times \dots \times \mathcal{L}^\infty}_{k \text{ раз}}$, $ba^k = \underbrace{ba \times \dots \times ba}_{k \text{ раз}}$ и положим

$$\mathbf{D} = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in (\mathcal{L}^\infty)^k: \xi(\omega) \in D \text{ для всех } \omega\}.$$

Определим D -дивергенцию $\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k)$, $\mu_1, \dots, \mu_k \in ba$, как опорную функцию множества $\mathbf{D}$, т.е.

$$\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k) = \sup_{\xi \in \mathbf{D}} [\mu_1(\xi_1) + \dots + \mu_k(\xi_k)].$$

Определенная выше f -дивергенция является частным случаем D -дивергенции: возьмите $k = 2$ и множество

$$D = D(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: y + g(x) \leq 0\}, \quad (14)$$

где g — функция, сопряженная к f . Как отмечалось во введении, И. Чисар, Ф. Гамбоа и Э. Гассиа в статье [7] ввели понятие γ -дивергенции знакопеременной счетно-аддитивной меры μ и вероятностной меры ν ; эта γ -дивергенция есть не что иное, как $\mathcal{J}_D(\mu, \nu)$, где D по-прежнему определяется соотношением (14), но от $f = \gamma$ требуется только выпуклость и полунепрерывность снизу, а эффективная область функции f не обязательно является подмножеством положительной полупрямой. Отметим также, что понятие D -дивергенции охватывает понятие f -различия (f -dissimilarity) k вероятностных мер, введенное Л. Дьёрфи и Т. Неметцем [15], [16].

Следуя доказательству теоремы 1, легко убедиться, что основные свойства f -дивергенций сохраняются для D -дивергенций. В частности: функция $\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k)$ на ba^k принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, выпукла и полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(ba^k, (\mathcal{L}^\infty)^k)$; $\mathcal{J}_D(\mu_1|_{\mathcal{G}}, \dots, \mu_k|_{\mathcal{G}}) \leq \mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k)$ для σ -подалгебры $\mathcal{G}$ σ -алгебры $\mathcal{F}$;

$$\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k) = \sup \sum_{i=1}^n F_D(\mu_1(A_i), \dots, \mu_k(A_i)), \quad \mu_1, \dots, \mu_k \in ba, \quad (15)$$

где F_D есть опорная к множеству D функция:

$$F_D(t_1, \dots, t_k) = \sup_{(x_1, \dots, x_k) \in D} (t_1 x_1 + \dots + t_k x_k), \quad (t_1, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k,$$

а супремум берется по всем конечным разбиениям Ω на дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$;

$$\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k) = \mathcal{J}_D(\mu_1^c, \dots, \mu_k^c) + \mathcal{J}_D(\mu_1^a, \dots, \mu_k^a), \quad \mu_1, \dots, \mu_k \in ba,$$

и

$$\mathcal{J}_D(\mu_1, \dots, \mu_k) = \int_{\Omega} F_D\left(\frac{d\mu_1}{d\rho}, \dots, \frac{d\mu_k}{d\rho}\right) d\rho$$

для любых счетно-аддитивных $\mu_1, \dots, \mu_k \in sa$ и σ -конечной неотрицательной меры ρ на $(\Omega, \mathcal{F})$, доминирующей $\mu_1, \dots, \mu_k$.

Следует отметить, что в определении D -дивергенции без ограничения общности можно считать множество D замкнутым и выпуклым; более того, если нас интересуют только конечно-аддитивные меры с неотрицательными значениями, то можно еще считать, что $\mathbf{x} \in D$ влечет $\mathbf{y} \in D$ для всех $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, где частичный порядок $\leq$ на $\mathbf{R}^k$ понимается покомпонентно. Действительно, пусть $D \subseteq \mathbf{R}^k$ произвольно. Определим D_1 как выпуклое замыкание множества D , $D_2 := \bigcup_{\mathbf{x} \in D} \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k: \mathbf{y} \leq \mathbf{x}\}$, D_3 — выпуклое замыкание D_2 . Поскольку опорные функции множества и его выпуклого замыкания совпадают, имеем $F_D = F_{D_1}$ и $F_{D_2} = F_{D_3}$; легко также видеть, что F_D и F_{D_2} совпадают на $\mathbf{R}_+^k$. В силу (15)

$\mathcal{I}_D$ и $\mathcal{I}_{D_1}$ совпадают на ba^k , а $\mathcal{I}_D$ и $\mathcal{I}_{D_3}$ — на ba_+^k (при этом $\mathcal{I}_{D_3}(\mu_1, \dots, \mu_k) = +\infty$, если $\mu_i \notin ba_+$ для некоторого i).

В случае $k = 2$ класс замкнутых выпуклых множеств D , для которых $\mathbf{x} \in D$ влечет $\mathbf{y} \in D$ для всех $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, содержит все множества вида (14) с $g \in \mathcal{W}$, а помимо них — только плоскость $\mathbf{R}^2$ (что дает D -дивергенцию, тождественно равную $+\infty$ за исключением пары нулевых мер) и вертикальные полуплоскости $D = \{(x, y): x \leq a\}$, $a \in \mathbf{R}$ (в этом случае $\mathcal{I}_D(\mu, \nu) = \mathcal{I}_f(\nu, \mu)$, где $f = a\delta_{\{0\}}$, ср. с утверждением (xii) теоремы 1). Таким образом, если ограничиться конечно-аддитивными мерами с неотрицательными значениями, для $k = 2$ переход от f -дивергенций к D -дивергенциям не приводит к появлению новых содержательных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005, 384 с.
2. Bednarski T. Binary experiments, minimax tests and 2-alternating capacities. — Ann. Statist., 1982, v. 10, № 1, p. 226–232.
3. Богачев В. И. Основы теории меры, т. 1. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, 583 с.
4. Broniatowski M., Keziou A. Minimization of ϕ -divergences on sets of signed measures. — Studia Sci. Math. Hungar., 2006, v. 43, № 4, p. 403–442.
5. Csizsár I. Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1963, v. 8, p. 85–108.
6. Csizsár I. I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 1, p. 146–158.
7. Csizsár I., Gamboa F., Gassiat E. MEM pixel correlated solutions for generalized moment and interpolation problems. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1999, v. 45, № 7, p. 2253–2270.
8. Csizsár I., Tusnády G. Information geometry and alternating minimization procedures. — Statist. Decisions, 1984, suppl. 1, p. 205–237.
9. Cvitanic J., Schachermayer W., Wang H. Utility maximization in incomplete markets with random endowment. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 2, p. 259–272.
10. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. — Math. Ann., 1994, v. 300, № 3, p. 463–520.
11. Экланд И., Темам П. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 399 с.
12. Föllmer H., Gundel A. Robust projections in the class of martingale measures. — Illinois J. Math., 2006, v. 50, № 2, p. 439–472.
13. Goll T., Rüschendorf L. Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 4, p. 557–581.
14. Gundel A. Robust utility maximization for complete and incomplete market models. — Finance Stoch., 2005, v. 9, № 2, p. 151–176.
15. Györfi L., Nemetz T. f -dissimilarity: a general class of separation measures of several probability measures. — Topics in Information Theory (Second Colloq., Keszthely, 1975). Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 309–321. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai, v. 16.)

16. Györfi L., Nemetz T. f -dissimilarity: a generalization of the affinity of several distributions. — Ann. Inst. Statist. Math., 1978, v. 30, № 1, p. 105–113.
17. Гуцин А. А. f -дивергенция конечно-аддитивных мер. — Обзор. прикл. промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 657–658.
18. Гуцин А. А., Мордецкий Э. Границы цен опционов для семимартингальных моделей рынка. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 80–122.
19. Huber P. J., Strassen V. Minimax tests and the Neyman–Pearson lemma for capacities. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 2, p. 251–263; correction: Ann. Statist., 1974, v. 2, № 1, p. 223–224.
20. Lembcke J. The necessity of strongly subadditive capacities for Neyman–Pearson minimax tests. — Monatsh. Math., 1988, v. 105, № 2, p. 113–126.
21. Léonard C. Minimizers of energy functionals. — Acta Math. Hungar., 2001, v. 93, № 4, p. 281–325.
22. Liese F. On the existence of f -projections. — Topics in Information Theory (Second Colloq., Keszthely, 1975). Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 431–446. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai, v. 16.)
23. Liese F., Vajda I. Convex Statistical Distances. Leipzig: Teubner, 1987, 224 p.
24. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
25. Rockafellar R. T. Integrals which are convex functionals. — Pacific J. Math., 1968, v. 24, № 3, p. 525–539.
26. Rockafellar R. T. Integrals which are convex functionals, II. — Pacific J. Math., 1971, v. 39, № 2, p. 439–469.
27. Рокфеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
28. Rüschendorf L. On the minimum discrimination information theorem. — Statist. Decisions, 1984, suppl. 1, p. 263–283.
29. Schied A., Wu C.-T. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 3, p. 199–217.
30. Yosida K., Hewitt E. Finitely additive measures. — Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 72, № 1, p. 46–66.

Поступила в редакцию
26.II.2007