Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соболев, Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 490–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:58:17

© 2007 г.

СОБОЛЕВ В. Н.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В
ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В статье приводятся новые явные оценки точности для асимптотических разложений в центральной предельной теореме.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность разложения.

Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Обозначим P распределение X_1 , P_n — распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, а через Φ — стандартный нормальный закон с плотностью $\varphi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2}$. Мы предполагаем, что все используемые в дальнейшем моменты $\mathbf{E}X_1^m$ и $\mathbf{E}|X_1|^m$ существуют. Далее мы будем использовать величины $\alpha_m = \mathbf{E}X_1^m/m!$, $\beta_m = \mathbf{E}|X_1|^m/m!$. Из наших предположений следует, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Соответствующие величины для стандартного нормального закона обозначим $\alpha_m(\varphi)$, $\beta_m(\varphi)$. Так, $\alpha_{2j}(\varphi) = 1/(2^j j!)$ для $j = 0, 1, 2, \dots$.

Мы также будем использовать моменты Чебышёва–Эрмита $\theta_k(P)$ (далее вместо $\theta_k(P)$ будем часто писать θ_k), которые определяются формулой $\theta_k(P) = (1/k!) \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) P(dx)$, где $H_k(x)$ — многочлены Чебышёва–Эрмита. В разных источниках многочлены Чебышёва–Эрмита определяются по-разному. Мы будем называть многочленами Чебышёва–Эрмита многочлены, которые определяются формулой $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$. Для $H_k(x)$ и θ_k хорошо известны равенства

$$H_k(x) = k! \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \alpha_{2j}(\varphi) \frac{x^{k-2j}}{(k-2j)!} \quad \text{и} \quad \theta_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \alpha_{2j}(\varphi) \alpha_{k-2j}.$$

Нам также потребуются числа

$$\|\theta_k\| = \beta_k + \|\theta_k^{(k-2)}\|, \quad \text{где} \quad \|\theta_k^{(k-2)}\| = \sum_{j=1}^{[k/2]} |\alpha_{k-2j}| \alpha_{2j}(\varphi).$$

* Российский государственный торгово-экономический университет, ул. Смольная, 36, 125195 Москва, Россия; e-mail: 6li@mail.ru; sobolev-vn@mail.ru

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию распределения P . Далее будем предполагать, что для некоторого неотрицательного ν функция $|f(t)|^\nu$ интегрируема на всей числовой оси. Обозначим

$$\alpha(T) = \max\{|f(t)|: t \geq T\}, \quad A_n(T) = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt.$$

Заметим, что выполнение условия $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^\nu dt < \infty$ гарантирует существование непрерывной плотности $p_n(x)$ у распределения P_n при всех $n \geq \nu$, эту плотность можно вычислять при помощи формулы обращения для преобразования Фурье:

$$p_n(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt,$$

кроме того, величина $\alpha(T)$ строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Для получения разложений для $p_n(x)$ мы будем использовать вспомогательные заряды Q с характеристическими функциями $g(t)$. Явный вид $g(t)$ будет приведен ниже. Обозначим $q_n(x)$ плотность n -кратной нормированной свертки Q_n заряда Q , характеристическая функция заряда Q_n равна $g^n(t/\sqrt{n})$. Плотность $q_n(x)$ при любом $n \geq 1$ можно вычислять по формуле обращения для преобразования Фурье:

$$q_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Нам понадобятся неотрицательные четные функции $\mu(t) \geq e^{-t^2/2}$ и числа $0 < T \leq 1$ такие, что $|f(t)| \leq \mu(t)$ при $|t| \leq T$. Для пары (μ, T) определим величины

$$B_{l,n-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^l \mu^{n-k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad B_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |t|^l e^{-t^2/2} dt,$$

$$L_l(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq u} |t|^l e^{-t^2/2} dt.$$

При достаточно широких условиях на распределение P пару (μ, T) можно подобрать так, чтобы величины $B_{l,n-k}$ при росте n стремились к величинам B_l [1].

Сформулируем условие, которое будет нами часто использоваться.

У с л о в и е 1. У распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией существует конечный абсолютный момент порядка $m+2$; существует число $\nu > 0$ такое, что для характеристической функции $f(t)$ распределения P выполняется условие $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^\nu dt < \infty$; неотрицательная четная функция $\mu(t)$ и число $0 < T \leq 1$ таковы, что $|f(t)| \leq \mu(t)$ при $|t| \leq T$.

1. Результаты. Мы получим асимптотические разложения в центральной предельной теореме (ЦПТ) для независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$, у которых конечны моменты β_{m+2} , $m = 4, 5, 6$. Эти разложения занимают промежуточное место между разложениями Эджворта–Крамера и короткими разложениями Грама–Шарлье [1].

Утверждение теоремы 1 отличается от соответствующего результата, приведенного в [1], главным образом тем, что в теореме 1 нет ограничения $\theta_4(P) \leq 6$, присутствующего в [1]. Аналога теоремы 3 в [1] нет.

Поскольку отличия в доказательствах теорем 1–3 носят технический, а не идейный характер, мы дадим полное доказательство лишь для теоремы 1, а затем укажем, как следует модифицировать это доказательство, с тем чтобы получить утверждения теорем 2 и 3. Здесь следует заметить, что громоздкость формулировок теорем связана не с техническими проблемами, а с существом дела.

Теорема 1. Пусть справедливо условие 1 при $m = 4$. Тогда для любых x и $n \geq \max(\nu, 6)$

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^2}{2(\sqrt{n})^2} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{(\sqrt{n})^2} H_4(x) \varphi(x) \\ & + \frac{\theta_3^3}{6(\sqrt{n})^3} H_9(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{(\sqrt{n})^3} H_5(x) \varphi(x) \\ & + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) + R(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R(x)| \leq & \frac{\|\theta_6\| B_{6,n-1}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\theta_3^2}{2} \frac{B_{6,n}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_4| \|\theta_4\| B_{8,n-1}}{2(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_8}{(\sqrt{n})^4} \\ & + \frac{\theta_3^2 |\theta_4|}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\theta_3^4}{4!} \frac{B_{12}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\|\theta_7^{(5)}\| B_{7,n-1}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_4 \theta_5| B_9}{2(\sqrt{n})^5} \\ & + \frac{|\theta_4| \|\theta_5^{(3)}\| B_{9,n-1}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_{8,n}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4| B_{10,n}}{4(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^6} \\ & + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10,n-1}}{(\sqrt{n})^8} + A_n(T) \\ & + L_0(T\sqrt{n}) + \frac{|\theta_4| L_4(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} + \frac{|\theta_3 \theta_4| L_7(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^3}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть справедливо условие 1 при $m = 5$. Тогда для любых x и $n \geq \max(\nu, 7)$

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^2}{2(\sqrt{n})^2} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{(\sqrt{n})^2} H_4(x) \varphi(x) \\ & + \frac{\theta_3^3}{6(\sqrt{n})^3} H_9(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{(\sqrt{n})^3} H_5(x) \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^4}{4! (\sqrt{n})^4} H_{12}(x) \varphi(x) \\
& + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\theta_3^2 \theta_4}{2(\sqrt{n})^4} H_{10}(x) \varphi(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_4^2}{2(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) \\
& + \frac{\theta_3 \theta_5}{(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) + \left(\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right) \frac{1}{(\sqrt{n})^4} H_6(x) \varphi(x) + R(x),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
|R(x)| \leq & \frac{\|\theta_7\| B_{7,n-1}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_4 \theta_5| B_9}{2(\sqrt{n})^5} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{|\theta_3| B_9}{(\sqrt{n})^5} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| |\theta_5| \frac{B_{11}}{2(\sqrt{n})^5} \\
& + \frac{|\theta_4| \|\theta_5\| B_{9,n-1}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_3| \theta_4^2 B_{11}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{\theta_3^2 |\theta_5| B_{11}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{\theta_3^3 |\theta_4| B_{13}}{2(\sqrt{n})^5} \\
& + \frac{\theta_3^5}{5!} \frac{B_{15}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{\|\theta_8^{(6)}\| B_{8,n-1}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_{8,n}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^6} \\
& + \frac{|\theta_6 - \theta_3^2/2| \|\theta_4\| B_{10,n-1}}{2(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_4| \|\theta_6^{(4)}\| B_{10,n-1}}{2(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4| B_{10,n}}{4(\sqrt{n})^6} \\
& + \frac{\|\theta_4\| \theta_4^2 B_{12,n-4}}{6(\sqrt{n})^6} + A_n(T) + \frac{\|\theta_5^{(3)}\| \theta_4^2 B_{13,n-4}}{6(\sqrt{n})^7} + \frac{\theta_4^2 |\theta_5| B_{13}}{3! (\sqrt{n})^7} \\
& + \frac{|\theta_3^3| B_{9,n}}{3! (\sqrt{n})^7} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \|\theta_5^{(3)}\| \frac{B_{11,n-1}}{(\sqrt{n})^7} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10,n-1}}{(\sqrt{n})^8} \\
& + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{\theta_3^2}{2} \frac{B_{12,n}}{(\sqrt{n})^8} + \frac{\theta_3^2 \theta_4^2 B_{14,n-3}}{12(\sqrt{n})^8} + L_0(T\sqrt{n}) + \frac{|\theta_4| L_4(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} \\
& + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{L_6(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_3 \theta_4| L_7(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^3} \\
& + \frac{\theta_4^2 L_8(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_3^2 \theta_4| L_{10}(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4}.
\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть справедливо условие 1 при $m = 6$. Тогда для любых x и $n \geq \max(\nu, 8)$

$$\begin{aligned}
p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^2}{2(\sqrt{n})^2} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{(\sqrt{n})^2} H_4(x) \varphi(x) \\
& + \frac{\theta_3^3}{6(\sqrt{n})^3} H_9(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{(\sqrt{n})^3} H_5(x) \varphi(x) \\
& + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^4}{4! (\sqrt{n})^4} H_{12}(x) \varphi(x) \\
& + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\theta_3^2 \theta_4}{2(\sqrt{n})^4} H_{10}(x) \varphi(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_4^2}{2(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) \\
& + \frac{\theta_3 \theta_5}{(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) + \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{(\sqrt{n})^4} H_6(x) \varphi(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n-1}{n} \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2) \theta_3}{(\sqrt{n})^5} H_9(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^4}{4! (\sqrt{n})^4} H_{12}(x) \varphi(x) \\
& + \frac{\theta_3 \theta_5}{(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) + \frac{\theta_7}{(\sqrt{n})^5} H_7(x) \varphi(x) \\
& + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_4 \theta_5}{(\sqrt{n})^5} H_9(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^2 \theta_5}{2(\sqrt{n})^5} H_{11}(x) \varphi(x) \\
& + \frac{C_n^2}{n^2} \frac{\theta_3 \theta_4^2}{(\sqrt{n})^5} H_{11}(x) \varphi(x) + \left(\frac{n-1}{n} \right)^3 \frac{\theta_3^3 \theta_4}{3! (\sqrt{n})^5} H_{13}(x) \varphi(x) \\
& + \frac{\theta_3^5}{5! (\sqrt{n})^5} H_{15}(x) \varphi(x) + R(x),
\end{aligned}$$

зде

$$\begin{aligned}
|R(x)| \leq & \frac{\|\theta_8\| B_{8,n-1}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_{8,n}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_4|}{2} \left(\|\theta_6\| + \frac{\theta_3^2}{2} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \right) \frac{B_{10,n-2}}{(\sqrt{n})^6} \\
& + \left(|\theta_3 \theta_7| + \frac{\theta_5^2}{2} \right) \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{\|\theta_4\| \theta_4^2 B_{12,n-4}}{6(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^2 \theta_4^2 B_{14}}{4(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^3 |\theta_5| B_{14}}{3! (\sqrt{n})^6} \\
& + \frac{\theta_3^6}{6!} \frac{B_{18}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_4^4 \theta_4|}{4!} \frac{B_{16}}{(\sqrt{n})^6} + |\theta_3 \theta_4 \theta_5| \frac{B_{12}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^3}{3!} \frac{B_{9,n}}{(\sqrt{n})^7} \\
& + \frac{\|\theta_9^{(7)}\| B_{9,n-1}}{(\sqrt{n})^7} + \frac{|\theta_4 \theta_7| B_{11}}{2(\sqrt{n})^7} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| |\theta_5| \frac{B_{11}}{(\sqrt{n})^7} \\
& + \frac{|\theta_4|}{2} \frac{\|\theta_7^{(5)}\| B_{11,n-2}}{(\sqrt{n})^7} + \frac{\theta_4^2 |\theta_5| B_{13,n-2}}{3! (\sqrt{n})^7} + \frac{\|\theta_5^{(3)}\| \theta_4^2 B_{13,n-4}}{6(\sqrt{n})^7} \\
& + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10,n-1}}{(\sqrt{n})^8} + |\theta_5 \theta_7| \frac{B_{12}}{(\sqrt{n})^8} \\
& + \frac{1}{2} \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \left(\|\theta_6\| + \frac{\theta_3^2}{2} + \frac{|\theta_3 \theta_4 \theta_5|}{2} \right) \frac{B_{12,n-2}}{(\sqrt{n})^8} + \frac{\theta_3^2 \theta_4^2 B_{14,n-3}}{12(\sqrt{n})^8} \\
& + \frac{|\theta_4| \theta_5^2 B_{14}}{2(\sqrt{n})^8} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| |\theta_7| \frac{B_{13}}{2(\sqrt{n})^9} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| |\theta_5| \frac{\theta_3^2}{2} \frac{B_{17}}{(\sqrt{n})^9} \\
& + \frac{\theta_4^2 |\theta_5| B_{15}}{3! (\sqrt{n})^9} + \frac{1}{2} \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{\|\theta_7^{(5)}\| B_{13,n-2}}{(\sqrt{n})^9} + \frac{\theta_7^2}{2} \frac{B_{14}}{(\sqrt{n})^{10}} \\
& + \frac{|\theta_4|}{2} \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{14,n-2}}{(\sqrt{n})^{10}} + \frac{1}{2} \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \left(\frac{|\theta_3 \theta_5| B_{14,n}}{(\sqrt{n})^{10}} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{16,n-2}}{(\sqrt{n})^{12}} \right) \\
& + A_n(T) + L_0(T\sqrt{n}) + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \left(\frac{L_6(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^4} + |\theta_3| \frac{L_9(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^5} \right) \\
& + \frac{\theta_3 \theta_4^2 L_{11}(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_3^3 \theta_4| L_{13}(T\sqrt{n})}{3! (\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_4| L_4(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} + \frac{\theta_4^2 L_8(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4} \\
& + \frac{|\theta_3 \theta_4| L_7(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^3} + \frac{|\theta_4 \theta_5| L_9(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_3^2 \theta_4| L_{10}(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4}.
\end{aligned}$$

2. Доказательство теорем. Для доказательства теорем используются вспомогательные сопровождающие заряды с характеристическими функциями $g_3(t) = \exp\{(it)^2/2 + \theta_3(it)^3\}$, $g_5(t) = \exp\{(it)^2/2 + \theta_3(it)^3 + \theta_5(it)^5\}$ и $g_7(t) = \exp\{(it)^2/2 + \theta_3(it)^3 + \theta_5(it)^5 + \theta_7(it)^7\}$.

Нам также понадобится лемма 1 из [1], из которой следует, что при $|t| < \sqrt{n}$ и любом натуральном $m \geq 2$ для характеристической функции $f(t)$ распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией, имеющей конечные моменты до $(m+2)$ -го включительно, справедливо равенство

$$e^{t^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{m+1} \theta_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^k + \gamma e^{t^2/(2n)} \left(\|\theta_{m+2}\| \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+2} + \|\theta_{m+3}^{(m+1)}\| \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^{m+3} \right). \quad (1)$$

Здесь и далее γ обозначает различные величины, для которых справедлива оценка $|\gamma| \leq 1$.

Доказательство теоремы 1. При $|t| \leq 1$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} p_n(x) - q_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-itx} g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Абсолютные величины двух последних слагаемых в правой части (2) допускают оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt &\leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt = A_n(T), \\ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-itx} g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dt = L_0(T\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Мы видим, что $A_n(T)$ и $L_0(T\sqrt{n})$ убывают экспоненциально быстро при росте n .

Для первого слагаемого в правой части равенства (2) сделаем следующее известное преобразование:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g_5^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \sum_{j=0}^{n-1} f^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g_5^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/(2n)} \\
&\quad \times \left[e^{t^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{t^2/(2n)} g_5\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] dt.
\end{aligned} \quad (3)$$

Из разложения (1) при $m = 4$ следует, что

$$\begin{aligned}
e^{t^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \sum_{k=0}^5 \theta_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^k + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_6\| \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 \\
&\quad + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_7^{(5)}\| \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^7,
\end{aligned} \quad (4)$$

и почти очевидно, что

$$\begin{aligned}
e^{t^2/(2n)} g_5\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \exp \left\{ \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \theta_5 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^5 \right\} = \exp \left\{ \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \right\} \\
&\quad + \theta_5 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^5 \exp \left\{ \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \right\} + \gamma \frac{\theta_5^2}{2} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{10} \\
&= 1 + \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \gamma \frac{\theta_3^2}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 + \theta_5 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^5 \\
&\quad + \gamma \theta_3 \theta_5 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^8 + \gamma \frac{\theta_5^2}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{10}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что разность в квадратных скобках в правой части (3) равна $\theta_4(it/\sqrt{n})^4 + r_5(t)$, где $r_5(t)$ есть сумма (с соответствующими знаками) тех слагаемых в правых частях (4) и (5), которые содержат функции γ . Поэтому правая часть (3) равна

$$\frac{\theta_4}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 e^{-itx} \sum_{j=0}^{n-1} f^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g_5^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/(2n)} dt + R_5, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
|R_5| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |e^{-itx}| \left| f^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \left| g_5^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| e^{-t^2/(2n)} |r_5(t)| dt \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) |r_5(t)| dt \\
&\leq \frac{\|\theta_6\| B_{6,n-1}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\theta_3^2}{2} \frac{B_{6,n}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\|\theta_7^{(5)}\| B_{7,n-1}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_{8,n}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10,n-1}}{(\sqrt{n})^8}.
\end{aligned}$$

Все слагаемые в правой части последнего неравенства входят в оценку остаточной части разложения теоремы 1.

Рассмотрим первое слагаемое в (6). Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi n^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \sum_{j=1}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left[f^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] e^{-t^2/(2n)} dt \\ & + \frac{\theta_4}{2\pi n^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \sum_{j=0}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Второе слагаемое в (7) равно

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left\{ \frac{n-j-1}{n} \theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\ & = \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} dt + R_6, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} |R_6| & \leq \frac{|\theta_4|}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^4 e^{-t^2/2} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n-j-1}{n} \frac{|\theta_5| |t|^5}{(\sqrt{n})^3} dt \\ & = \frac{|\theta_4 \theta_5| (n-1)}{2\pi \cdot 2(\sqrt{n})^7} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^9 e^{-t^2/2} dt \leq \frac{|\theta_4 \theta_5| B_9}{2(\sqrt{n})^5}. \end{aligned}$$

Последняя величина также входит в оценку остаточной части разложения теоремы 1. Первое слагаемое в правой части (8) равно

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \\ & = \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\ & \times \left(1 + \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \gamma \frac{\theta_3^2}{2} \frac{t^6}{(\sqrt{n})^2} \right) dt \\ & = \frac{\theta_4}{(\sqrt{n})^2} H_4(x) \varphi(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) + R_7, \end{aligned}$$

где

$$|R_7| \leq \frac{|\theta_4| L_4(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} + \frac{|\theta_3 \theta_4| L_7(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^3} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4|}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^4}.$$

Все слагаемые в правой части последнего неравенства входят в оценку остаточной части разложения теоремы 1. Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^l e^{-itx-t^2/2} dt = H_l(x) \varphi(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим первое слагаемое в (7). Применив преобразование, аналогичное тому, которое уже использовалось в равенстве (3), его можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \sum_{j=1}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} \\ & \times \left[\sum_{j_0=0}^{j-1} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g_3^{j-j_0-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} \right. \\ & \left. \times \left\{ e^{t^2/(2n)} f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{t^2/(2n)} g_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right] dt. \quad (9) \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что величину, стоящую в фигурных скобках, можно записать в виде

$$\gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_4\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^4 + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_5^{(3)}\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 + \frac{\gamma \theta_3^2}{2} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^6,$$

поэтому абсолютная величина (9) не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{|\theta_4|}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ & \times \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} \left[\|\theta_4\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^4 + \|\theta_5^{(3)}\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 + \frac{\theta_3^2}{2} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^6 e^{-t^2/(2n)} \right] dt \\ & = C_n^2 \left[\frac{|\theta_4| \|\theta_4\| B_{8,n-1}}{(\sqrt{n})^8} + \frac{|\theta_4| \|\theta_5^{(3)}\| B_{9,n-1}}{(\sqrt{n})^9} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4| B_{10,n}}{2(\sqrt{n})^{10}} \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{|\theta_4| \|\theta_4\| B_{4,n-1}}{(\sqrt{n})^8} + \frac{|\theta_4| \|\theta_5^{(3)}\| B_{5,n-1}}{(\sqrt{n})^9} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4| B_{6,n}}{2(\sqrt{n})^{10}} \right]. \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части содержатся в оценке остаточной части разложения теоремы 1.

Таким образом,

$$p_n(x) - q_n(x) = \frac{\theta_4}{n} H_4(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) + R_8,$$

где абсолютная величина R_8 не превосходит суммы тех величин, входящих в оценку остаточной части разложения теоремы 1, о которых говорилось выше.

Теперь для завершения доказательства этой теоремы нам достаточно написать разложение для $q_n(x)$:

$$\begin{aligned} q_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_5^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - t^2/2} \exp \left\{ \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-t^2/2} \\
&\quad \times \left(1 + \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_3^2}{2} \frac{(it)^6}{(\sqrt{n})^2} + \frac{\theta_3^3}{6} \frac{(it)^9}{(\sqrt{n})^3} + \gamma \frac{\theta_3^4}{4!} \frac{(it)^{12}}{(\sqrt{n})^4} \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-t^2/2} \left(\theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} + \gamma \theta_3 \theta_5 \frac{(it)^8}{(\sqrt{n})^4} + \gamma \frac{\theta_5^2}{2} \frac{(it)^{10}}{(\sqrt{n})^6} \right) dt \\
&= \varphi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{(\sqrt{n})^3} H_5(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^2}{2(\sqrt{n})^2} H_6(x) \varphi(x) \\
&\quad + \frac{\theta_3^3}{6(\sqrt{n})^3} H_9(x) \varphi(x) + R_9,
\end{aligned}$$

где

$$|R_9| \leq \frac{\theta_3^4}{4!} \frac{B_{12}}{(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_8}{(\sqrt{n})^4} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^6}.$$

Слагаемые правой части этого неравенства входят в оценку остаточной части разложения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Слагаемое главной части разложения теоремы 1, связанное с многочленом $H_7(x)$, можно было разбить на два и одно из них, $(\theta_3 \theta_4 / (\sqrt{n})^5) H_7(x) \varphi(x)$, оставить в главной части разложения, а оценку второго $|\theta_3 \theta_4 / (\sqrt{n})^5 H_7(x) \varphi(x)| \leq |\theta_3 \theta_4| B_7 / (\sqrt{n})^5$ добавить в оценку остаточной части разложения. Так мы бы получили разложение Эджворта–Крамера, записанное в форме разложения Грама–Шарлье [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Для того чтобы из доказательства теоремы 1 получить доказательство теоремы 2, необходимо сделать следующие изменения.

В правой части (4) сумму двух последних слагаемых следует заменить на $\theta_6(it/\sqrt{n})^6 + \gamma \|\theta_7\| (t/\sqrt{n})^7 + \gamma \|\theta_8^{(6)}\| (t/\sqrt{n})^8$, а в правой части равенства (5) величину $\gamma(\theta_3^2/2)(t/\sqrt{n})^6$ заменить на $(\theta_3^2/2)(it/\sqrt{n})^6 + \gamma(\theta_3^3/3!)(t/\sqrt{n})^9$. При этом в (6) вместо величины $\theta_4(it/\sqrt{n})^4$ будет участвовать величина $\theta_4(it/\sqrt{n})^4 + (\theta_6 - \theta_3^2/2)(it/\sqrt{n})^6$, а для величины R_5 из (6) будет справедливо неравенство

$$|R_5| \leq \frac{\|\theta_7\| B_{7,n-1}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{\|\theta_8^{(6)}\| B_{8,n-1}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_3 \theta_5| B_{8,n}}{(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_3^3|}{3!} \frac{B_{9,n}}{(\sqrt{n})^7} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10,n-1}}{(\sqrt{n})^8}.$$

Аналог (7) следует записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \\
&\quad \times \sum_{j=1}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left[f^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] e^{-t^2/(2n)} dt \\
&\quad + \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \sum_{j=0}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{2\pi(\sqrt{n})^6} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^6 e^{-itx} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left[f^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] e^{-t^2/(2n)} dt \\
& + \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{2\pi(\sqrt{n})^6} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^6 e^{-itx} \sum_{j=0}^{n-1} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g_3^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

Последнее слагаемое в (10) равно

$$\begin{aligned}
& \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{2\pi(\sqrt{n})^6} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^6 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \\
& \quad \times \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left\{ \frac{j}{n} \theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
& = \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^6 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} dt + R_{10},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$|R_{10}| \leq \frac{|\theta_6 - \theta_3^2/2|}{2\pi(\sqrt{n})^6} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^6 e^{-t^2/2} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j}{n} \frac{|\theta_5| |t|^5}{(\sqrt{n})^3} dt \leq \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| |\theta_5| \frac{B_{11}}{2(\sqrt{n})^7}.$$

Первое слагаемое в правой части (11) равно

$$\frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^6 e^{-itx - t^2/2} dt + R_{11} = \frac{(\theta_6 - \theta_3^2/2)}{(\sqrt{n})^4} H_6(x) \varphi(x) + R_{11},$$

где

$$\begin{aligned}
|R_{11}| & \leq \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{1}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-\infty}^{\infty} t^6 e^{-t^2/2} |\theta_3| \frac{|t|^3}{\sqrt{n}} dt + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{L_6(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^4} \\
& \leq \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{|\theta_3| B_9}{(\sqrt{n})^5} + \left| \theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2} \right| \frac{L_6(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^4}.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в (10), как и при доказательстве теоремы 1 (см. равенство (8)), может быть представлено в виде

$$\frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} dt + R_6, \tag{12}$$

где $|R_6| \leq |\theta_4 \theta_5| B_9 / [2(\sqrt{n})^5]$. Эта оценка устанавливается точно так же, как при доказательстве теоремы 1. Первое слагаемое в (12) рассматривается с помощью чуть более точного разложения экспоненты,

содержащей θ_3 , чем в доказательстве теоремы 1. Именно, эта величина равна

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^2} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\ & \quad \times \left(1 + \frac{n-1}{n} \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\theta_3^2}{2} \frac{t^6}{(\sqrt{n})^2} + \gamma \frac{\theta_3^3}{3!} \frac{t^9}{(\sqrt{n})^3} \right) dt \\ & = \frac{\theta_4}{(\sqrt{n})^2} H_4(x) \varphi(x) + \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3 \theta_4}{(\sqrt{n})^3} H_7(x) \varphi(x) \\ & \quad + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{\theta_3^2 \theta_4}{2(\sqrt{n})^4} H_{10}(x) \varphi(x) + R_{12}, \end{aligned}$$

где

$$|R_{12}| \leq \frac{|\theta_4| L_4(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^2} + \frac{|\theta_3 \theta_4| L_7(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^3} + \frac{|\theta_3^2 \theta_4| L_{10}(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4} + \frac{|\theta_3^3 \theta_4| B_{13}}{2 (\sqrt{n})^5}.$$

Третье слагаемое в (10) рассматривается аналогично тому, как мы рассматривали первое слагаемое в (7), и для его абсолютной величины получается оценка

$$\frac{|\theta_6 - \theta_3^2/2| \|\theta_4\| B_{10,n-1}}{2(\sqrt{n})^6} + \frac{|\theta_6 - \theta_3^2/2| \|\theta_5^{(3)}\| B_{11,n-1}}{(\sqrt{n})^7} + \frac{|\theta_6 - \theta_3^2/2| \theta_3^2 B_{12,n}}{2(\sqrt{n})^8}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в (10). Оно совпадает с первым слагаемым в (7), для которого в доказательстве теоремы 2 была получена формула (9). Но для преобразования первого слагаемого из (10) нам придется использовать более тонкие соображения, чем при доказательстве теоремы 1. Заметим, что

$$\begin{aligned} e^{t^2/(2n)} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \sum_{k=0}^4 \theta_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^k + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_5\| \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^5 \\ & \quad + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_6^{(4)}\| \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6, \\ e^{t^2/(2n)} g_3\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \exp \left\{ \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 \right\} = 1 + \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^3 + \gamma \frac{\theta_3^2}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6. \end{aligned}$$

Поэтому для рассматриваемого слагаемого величина (9) равна

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^4 e^{-itx} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ & \quad \times e^{-t^2/(2n)} g_3^{j-j_0-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/(2n)} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \theta_4 \left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^4 dt + R_{13} \\ & = \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 e^{-itx} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ & \quad \times e^{-t^2/(2n)} g_3^{j-j_0-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-t^2/(2n)} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt + R_{13}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
 |R_{13}| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} \frac{|\theta_4|}{2\pi(\sqrt{n})^4} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} t^4 \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad \times \left[\|\theta_5\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 + \|\theta_6^{(4)}\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^6 + \frac{\theta_3^2}{2} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^6 e^{-t^2/(2n)} \right] dt \\
 &\leq \frac{|\theta_4| \|\theta_5\| B_{9,n-1}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{|\theta_4| \|\theta_6^{(4)}\| B_{10,n-1}}{2(\sqrt{n})^6} + \frac{\theta_3^2 |\theta_4| B_{10,n}}{4(\sqrt{n})^6}.
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (13) равно

$$\begin{aligned}
 &\frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 e^{-itx} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad \times e^{-t^2/(2n)} g_3^{j-j_0-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} g_5^{n-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt \\
 &= \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{j-1} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 e^{-itx} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad \times \exp \left\{ - (n-j_0) \frac{t^2}{2n} + (n-j_0-2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ (n-j-1) \theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^5} \right\} dt \\
 &= \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j_0=0}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \\
 &\quad \times \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 e^{-itx} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad \times \exp \left\{ - (n-j_0) \frac{t^2}{2n} + (n-j_0-2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt + R_{14}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где

$$|R_{14}| \leq \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^8 e^{-t^2/2} C_n^3 \frac{|\theta_5| |t|^5}{(\sqrt{n})^5} dt \leq \frac{\theta_4^2 |\theta_5| B_{13}}{3! (\sqrt{n})^7}.$$

Первое слагаемое в правой части (14) равно

$$\begin{aligned}
 &\frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j_0=0}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ - itx - \frac{t^2}{2} \right\} f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
 &\quad \times \exp \left\{ j_0 \frac{t^2}{2n} + (n-j_0-2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
 &= \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ - itx - \frac{t^2}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{j_0=0}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \left[f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_3^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] \right) \\
& \times \exp \left\{ j_0 \frac{t^2}{2n} + (n - j_0 - 2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
& + \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\
& \times \sum_{j_0=1}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \exp \left\{ -j_0 \frac{t^2}{2n} + j_0 \theta_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 \right\} \\
& \times \exp \left\{ j_0 \frac{t^2}{2n} + (n - j_0 - 2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt. \quad (15)
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (15) равно

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\
& \times \sum_{j_0=1}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \exp \left\{ (n-2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
& = \frac{\theta_4^2 C_n^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \exp \left\{ (n-2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
& = \frac{\theta_4^2 C_n^2 L_8(T\sqrt{n})}{(\sqrt{n})^8} + \frac{\theta_4^2 C_n^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} dt \\
& + \gamma \frac{\theta_3 \theta_4^2 C_n^2 (n-2)}{2\pi(\sqrt{n})^{11}} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^{11} \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} dt \\
& = \frac{\theta_4^2 C_n^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} dt + R_{17} \\
& = \frac{\theta_4^2 C_n^2}{(\sqrt{n})^8} H_8(x) \varphi(x) + R_{17},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
|R_{17}| & \leq \frac{|\theta_3| \theta_4^2}{4\pi(\sqrt{n})^5} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^{11} e^{-t^2/2} dt + \frac{\theta_4^2 L_8(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4} \\
& = \frac{|\theta_3| \theta_4^2 B_{11}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{\theta_4^2 L_8(T\sqrt{n})}{2(\sqrt{n})^4}.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (15) равно

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j_0=1}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\
& \times \exp \left\{ j_0 \frac{t^2}{2n} + (n - j_0 - 2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[f^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_3^{j_0} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] dt \\
& = \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j_0=1}^{n-2} C_{n-1-j_0}^1 \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ j_0 \frac{t^2}{2n} + (n - j_0 - 2) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} \\
& \quad \times \left[\sum_{j=1}^{j_0-1} f^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g_3^{j_0-j-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-t^2/(2n)} \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ e^{t^2/(2n)} f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{t^2/(2n)} g_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right] dt \\
& = \frac{\theta_4^2}{2\pi(\sqrt{n})^8} \sum_{j=0}^{n-3} C_{n-1-j}^2 \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} (it)^8 \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} f^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
& \quad \times \exp \left\{ \frac{j t^2}{2n} + (n - j - 3) \theta_3 \frac{(it)^3}{(\sqrt{n})^3} \right\} \\
& \quad \times \left\{ e^{t^2/(2n)} f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{t^2/(2n)} g_3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Последнее выражение по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\theta_4^2(\sqrt{n})^6}{2\pi 6(\sqrt{n})^8} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} t^8 \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right. \\
& \quad \times \left(\gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_4\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^4 + \gamma e^{t^2/(2n)} \|\theta_5^{(3)}\| \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 + \gamma \frac{\theta_3^2}{2} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^6 \right) \Big| dt \\
& \leq \frac{\|\theta_4\| \theta_4^2 B_{12,n-4}}{6(\sqrt{n})^6} + \frac{\|\theta_5^{(3)}\| \theta_4^2 B_{13,n-4}}{6(\sqrt{n})^7} + \frac{\theta_3^2 \theta_4^2 B_{14,n-3}}{12(\sqrt{n})^8}.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 нам достаточно написать разложение для $q_n(x)$, более точное, чем то, что использовалось ранее:

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_5^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \exp \left\{ \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} \right\} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \left(1 + \theta_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_3^2}{2} \frac{(it)^6}{(\sqrt{n})^2} + \frac{\theta_3^3}{6} \frac{(it)^9}{(\sqrt{n})^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\theta_4^4}{4!} \frac{(it)^{12}}{(\sqrt{n})^4} + \gamma \frac{\theta_3^5}{5!} \frac{(it)^{15}}{(\sqrt{n})^5} \right) dt \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -itx - \frac{t^2}{2} \right\} \left(\theta_5 \frac{(it)^5}{(\sqrt{n})^3} + \theta_3 \theta_5 \frac{(it)^8}{(\sqrt{n})^4} \right. \\
& \quad \left. + \gamma \frac{\theta_3^2}{2} \theta_5 \frac{(it)^{11}}{(\sqrt{n})^5} + \gamma \frac{\theta_5^2}{2} \frac{(it)^{10}}{(\sqrt{n})^6} \right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{(\sqrt{n})^3} H_5(x) \varphi(x) \\
&+ \frac{\theta_3^2}{2(\sqrt{n})^2} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3^3}{6(\sqrt{n})^3} H_9(x) \varphi(x) \\
&+ \frac{\theta_3^4}{4!(\sqrt{n})^4} H_{12}(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3 \theta_5}{(\sqrt{n})^4} H_8(x) \varphi(x) + R_{18},
\end{aligned}$$

где

$$|R_{18}| \leq \frac{\theta_3^5}{5!} \frac{B_{15}}{(\sqrt{n})^5} + \frac{\theta_3^2 |\theta_5| B_{11}}{2(\sqrt{n})^5} + \frac{\theta_5^2}{2} \frac{B_{10}}{(\sqrt{n})^6}.$$

Слагаемые правой части этого неравенства входят в оценку остаточной части разложения теоремы. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 1 и 2, при этом следует использовать заряд с характеристической функцией $g_7(t)$. Новых идей при этом не требуется, и поэтому доказательство теоремы 3 мы опускаем полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В. В. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценками остаточных членов. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 810–816.

Поступила в редакцию
24.I.2007