Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, С. Г. Фосс, Оценки для перескока случайного блуждания через произвольную границу и их применения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 249–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:15:45

© 1999 г.

БОРОВКОВ А. А.*, ФОСС С. Г.*

ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЕРЕСКОКА
СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ
ПРОИЗВОЛЬНУЮ ГРАНИЦУ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ¹⁾

Найдены оценки для величины перескока через произвольную границу последовательности случайных величин. Показано, что если приращения последовательности удовлетворяют так называемому условию асимптотической однородности, а граница является асимптотически «гладкой», то имеет место слабая сходимость (с удалением границы) распределения величины перескока к предельному. В качестве приложений получена равномерная (по классу распределений) основная теорема восстановления и найдена асимптотика среднего времени прохождения криволинейных границ траекториями асимптотически однородных цепей Маркова.

Ключевые слова и фразы: последовательность случайных величин, цепь Маркова, случайное блуждание, время и величина первого перескока, равномерная интегрируемость, нелинейная граница, асимптотическая однородность.

1. Введение

Рассмотрим последовательность $X \equiv \{X(n)\}_{n \geq 0}$, $X(0) = 0$, случайных величин с конечными средними. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ сигма-алгебру, порожденную величинами $X(0), X(1), \dots, X(n)$. При $x \geq 0$ определим момент первого прохождения уровня x

$$\eta(x) = \min \{k \geq 1: X(k) > x\} \quad (1.1)$$

и положим $\eta(x) = \infty$, если $\sup_k X(k) \leq x$. На событии $\{\eta(x) < \infty\}$ определим величину перескока

$$\chi(x) = X(\eta(x)) - x. \quad (1.2)$$

*Институт математики СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, foss@math.nsc.ru

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-15-96295 и 96-01-01939, и российско-американского гранта RM1-226.

В ряде работ (см., например, [1]–[6] и библиографию в них) в качестве $\{X(n)\}$ рассматривались последовательности вида

$$X(n) = S(n) + \theta(n), \quad \text{где } S(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad (1.3)$$

$\{\xi_n\}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (с.в.), имеющие положительное среднее, а с.в. $\theta(n)$ удовлетворяют ряду условий, в частности, $\theta(n) = o(n)$ (в известном смысле), и последовательности $\{(\xi_i, \theta(i))\}_{i \leq n}$ и $\{\xi_i\}_{i > n}$ при каждом n взаимно независимы. В этом случае последовательность $X(n)$ часто называют «возмущенным» или «нелинейным» процессом восстановления (см., например, [4]). Такого рода модели возникают естественным образом в задачах последовательного анализа и теории очередей. Основным объектом изучения являются моменты остановки $\eta(x)$ и величины перескока $\chi(x)$. Обычно предполагается, что с.в. ξ_n имеют конечный второй момент, а с.в. $\theta(n)$ допускают представление $\theta(n) = -\gamma(n) - h(n)$, где последовательность с.в. $\gamma(n)$ стохастически ограничена и $h(\cdot)$ есть детерминированная функция, $h(n) = o(n)$. Наиболее общие результаты для таких моделей были получены в работе [2] в предположении, что функция h является дважды дифференцируемой, причем $h''(x) = O(x^{\alpha-2})$, $h'(x) = O(x^{\alpha-1})$ для некоторого $\alpha \in [0, 1)$. При выполнении ряда дополнительных технических условий показано, что

(а) имеет место локальная теорема восстановления для

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X(n) \in (u, u+v]\} \quad \text{при } u \rightarrow \infty;$$

(б) с удалением границы распределение величины перескока через нее сходится к предельному;

(в) найдено асимптотическое представление (с точностью до $o(1)$) для среднего времени прохождения.

Положим $x + h(n) = g(x, n)$. Тогда для $\theta(n)$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \min \{k \geq 1: S(k) > g(x, k) + \gamma(k)\}, \\ \chi(x) &= S(\eta(x)) - g(x, \eta(x)) - \gamma(\eta(x)). \end{aligned}$$

В этом случае распределения времени и величины перескока последовательности $X(n)$ через «постоянную» границу x совпадают с соответствующими распределениями для перескока последовательности $S(n)$ частичных сумм через нелинейную границу $g(x, \cdot) + \gamma(\cdot)$.

В настоящей работе мы уделяем основное внимание изучению распределения величины перескока через нелинейную границу $g(x, \cdot) + \gamma(\cdot)$ для более общего класса последовательностей $\{X(n)\}$, приращения

$X(n+1) - X(n)$ которых могут быть разнораспределенными, зависимыми и не обязаны иметь конечный второй момент. При этом функция $g(x, n)$ может, вообще говоря, не иметь представления $x + h(n)$. Оказывается, что в очень широких предположениях справедливы весьма точные оценки для $\chi(x)$ и имеют место утверждения о слабой сходимости распределения величины перескока к предельному.

Сначала мы рассматриваем случай «постоянной» границы x (т.е. $g(x, n) \equiv x$, $\gamma(n) \equiv 0$, x будет неограниченно возрастать) и показываем (см. теорему 2.1), что при определенных условиях (см. условия (G1)–(G3)) среднее время первого прохождения не может расти быстрее линейной функции от x , а распределения величин перескока допускают неухудшаемые оценки. Затем мы переходим к изучению случая, когда $\{X(n)\}$ образует цепь Маркова (вообще говоря, неоднородную), величины скачков которой являются асимптотически однородными (с ростом пространственной и временной переменных). В предположении нерешетчатости распределения скачка «на бесконечности» доказываемся слабая сходимость (при $x \rightarrow \infty$) распределений величин перескоков к некоторому предельному (см. теорему 2.2), являющемуся распределением перескока через бесконечно удаленный уровень для однородного случайного блуждания. Последнее утверждение затем переносится на случай нелинейных детерминированных (теорема 2.3) и случайных (теорема 2.4) границ. Далее показывается, что, вообще говоря, предельное распределение величины перескока может иметь и иной вид (теорема 2.5). Наряду с цепями Маркова, в теоремах 2.2–2.5 можно рассматривать последовательности $X(n)$ и более общего вида.

В качестве следствий получены равномерные теоремы восстановления в «однородном» (теоремы 2.6 и 2.7) и марковском (теорема 2.8) случаях. Затем приводятся следствия (теорема 2.9) для времени первого прохождения. Они применяются к двум цепям Маркова специального вида, играющим важную роль в приложениях.

Доказательства всех теорем приведены в разделе 3.

2. Основные результаты и их следствия

2.1. Утверждения, касающиеся величины перескока. Пусть $X \equiv \{X(n)\}_{n \geq 0}$, $X(0) = 0$, — произвольная последовательность с.в. и $\mathcal{F}_n = \sigma(X(0), X(1), \dots, X(n))$. Для любого целого $l \geq 0$ положим

$$X^{(l)}(n) = X(l+n) - X(l).$$

Нам понадобятся следующие условия.

(G1) *Существуют постоянная $A > 0$ и целое число $m \geq 1$ такие, что при всех целых $n \geq 0$*

$$E(X^{(mn)}(m) | \mathcal{F}_{mn}) \geq A \quad \text{п.н.} \quad (2.1)$$

Условие (G1) означает, что последовательность $X^{(mn)} - An$ образует при $n = 0, 1, \dots$ субмартингал.

(G2) Существует распределение F на $[0, \infty)$ такое, что при любых n и x

$$P\{X(n+1) - X(n) \geq x \mid \mathcal{F}_n\} \leq F([x, \infty)) \equiv \bar{F}(x) \quad \text{п.н.} \quad (2.2)$$

Случайная величина ζ с распределением F имеет конечное среднее

$$b = E\zeta \equiv \int_0^\infty \bar{F}(x) dx. \quad (2.3)$$

(G3) Если $m > 1$, то предполагается дополнительно, что найдется такая постоянная $V \geq 0$, что при всех $k = 0, 1, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, m-1$ выполнено п.н. неравенство

$$E(X^{(km+j)}(m-j) \mid \mathcal{F}_{km+j}) \geq -V. \quad (2.4)$$

Отметим, что если приращения $\{X(n+1) - X(n); n = 0, 1, \dots\}$ образуют последовательность независимых случайных величин, то условие (G3) вытекает из условий (G1) и (G2) при $V = mb - A$. Действительно, $EX^{(km+j)}(m-j) = EX^{(km)}(m) - EX^{(km)}(j) \geq A - jb \geq A - mb$.

Для величин $\eta(x)$ и $\chi(x)$, определенных в (1.1), (1.2), справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. При выполнении условий (G1)–(G3)

— найдется постоянная K такая, что при любом $x \geq 0$

$$E\eta(x) \leq K(1+x); \quad (2.5)$$

— найдутся постоянные c, c_1 такие, что при любых $x, t \geq 0$

$$P\{\chi(x) > t\} \leq c \left(\bar{F}(t) + \int_t^{t+x} \bar{F}(u) du \right), \quad (2.6)$$

$$P\{\chi(x) > t\} \leq c_1 E\{\zeta I(\zeta > t)\}. \quad (2.7)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Как будет видно из доказательства, постоянные K, c и c_1 зависят только от A, m, V и от функции $b(t) \equiv E\{\zeta I(\zeta > t)\}$. В частности, если $m = 1$, то при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ можно положить

$$c = K = \frac{b^*(\varepsilon A)}{A(1-\varepsilon)}, \quad (2.8)$$

$$c_1 = \frac{K}{\beta} \max \left(1, \beta + \frac{4N}{A} \right), \quad (2.9)$$

где $b^*(\varepsilon) = \min\{t: b(t) \leq \varepsilon\}$, $\beta = \frac{1}{2} \min\{N, 1, \frac{A}{4}\}$ и $N = b^*(A/2)$.

Все последующие результаты этого раздела могут быть доказаны при условиях (G1)–(G3). Однако для того, чтобы упростить рассуждения, мы положим $m = 1$ в условии (G1) и в дальнейшем будем предполагать, что последовательность X образует (вообще говоря, неоднородную) цепь Маркова: при $n \geq 0$

$$X(n+1) = X(n) + \xi(n+1, X(n)),$$

где семейства с.в. $\{\xi(1, x)\}, \{\xi(2, x)\}, \dots$ взаимно независимы и при каждом n с.в. $\xi(n, x) \equiv \xi(n, x, \omega)$ является измеримой функцией от (x, ω) .

В этих предположениях условия (G1), (G2) могут быть переписаны в следующей форме:

(MC1) существует постоянная $A > 0$ такая, что при любых n и x

$$E|\xi(n, x)| < \infty \quad \text{и} \quad E\xi(n, x) \geq A;$$

(MC2) существует распределение F такое, что при любых n, x и t

$$P\{\xi(n, x) \geq t\} \leq \bar{F}(t)$$

и среднее $b = b(0)$ в (2.3) конечно.

Введем следующее условие «асимптотической однородности».

(AO) Существует нерешетчатая случайная величина ξ такая, что

(1) $E\xi$ конечно;

(2) при $n, x \rightarrow \infty$ распределения случайных величин $\xi(n, x)$ слабо сходятся к распределению ξ .

Последнее означает, что $\rho(\xi(n, x), \xi) \rightarrow 0$ при $n, x \rightarrow \infty$, где ρ — метрика Леви (F_ξ означает распределение ξ):

$$\rho(\xi_1, \xi_2) \equiv \rho(F_{\xi_1}, F_{\xi_2}) = \inf\{\varepsilon > 0: \forall x, F_{\xi_i}(x) \leq F_{\xi_j}(x + \varepsilon) + \varepsilon, i, j = 1, 2\}.$$

Под нерешетчатостью с.в. ξ мы понимаем следующее: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{\xi = nC\} < 1$ для любого числа $C > 0$.

З а м е ч а н и е 2.2. Ряд приводимых ниже результатов остается в силе и в решетчатом случае, но при естественной модификации утверждений.

З а м е ч а н и е 2.3. Если семейство с.в. $\{\xi(n, x)\}$ удовлетворяет условиям (MC1), (MC2) и (AO), то с.в. ξ также удовлетворяет (MC1), (MC2) с теми же A и F .

Введем вспомогательную последовательность н.о.р.с.в. $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, где $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi$ (здесь $\stackrel{d}{=}$ означает равенство распределений с.в.). Для случайного блуждания $S(0) = 0, S(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$ определим

$$\eta_{as}(x) = \min\{n \geq 1: S(n) \geq x\}, \quad \chi_{as}(x) = S(\eta_{as}(x)) - x.$$

Как известно, в нерешетчатом случае существует с.в. $\chi_{as}(\infty)$ (так называемый перескок через бесконечно удаленный уровень) такая, что $\rho(\chi_{as}(x), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Заметим, что распределение $\chi_{as}(\infty)$ абсолютно непрерывно. При $x \geq 0$ положим $\rho(x) = \sup_{y \geq x} \rho(\chi_{as}(y), \chi_{as}(\infty))$, так что $\rho(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

При $y > 0$ положим $\rho_{N,y} = \sup_{m \geq N; x \geq y} \rho(\xi(m, x), \xi)$ и $N(y) = [y^{2/3}]$ (здесь $[x]$ есть целая часть числа x). Далее, обозначим $z \equiv z(y) = \{\min y, \rho_{N(y),y}^{-1}\}^{1/3}$.

Теорема 2.2. *Предположим, что цепь Маркова $\{X(n)\}$ удовлетворяет условиям (MC1), (MC2), с.в. ξ имеет нерешетчатое распределение, а число $y > 0$ таково, что $z \equiv z(y) \geq 1$. Тогда для любого $x \geq 2y + 2z(y) + 1$*

$$\rho(\chi(x), \chi_{as}(\infty)) \leq \frac{3(K+b)+1}{z(y)} + c_1 b(z) + \rho(z), \quad (2.10)$$

где $\chi(x)$ определяется в (1.2), $b(t)$ — в замечании 2.1 и $b = b(0)$. Следовательно, при выполнении условия (AO)

$$\rho(\chi(x), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Неравенство (2.10) показывает, что величины перескоков $\chi(x)$ сходятся к $\chi_{as}(\infty)$ равномерно в некотором классе цепей Маркова. Более точно, справедливо следующее

Следствие 2.1. *Пусть $B(t)$ и $R(y, N)$ — две невозрастающие функции такие, что $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \lim_{y, N \rightarrow \infty} R(y, N) = 0$, и с.в. ξ имеет нерешетчатое распределение с конечным положительным средним. Рассмотрим класс $\mathcal{X}$ марковских цепей $X \equiv \{X(n)\}$, которые удовлетворяют условиям (MC1), (MC2) и (AO) с заданными A и ξ , и пусть имеют место неравенства $b(t) = E\{\zeta I(\zeta > t)\} \leq B(t)$ и $\rho_{y,N} \leq R(y, N)$ при всех t, y, N (где ζ определена в (2.3)). Тогда*

$$\sup_{X \in \mathcal{X}} \rho(\chi(x), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

В частности, для любой цепи Маркова $X = \{X(n)\}$, удовлетворяющей условиям (MC1), (MC2) и (AO), выполняется

$$\sup_l \sup_{y \geq x} \rho(\chi^{(l)}(y), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

при $x \rightarrow \infty$. Здесь $\chi^{(l)}$ означает величину первого перескока через уровень x для последовательности $\{X^{(l)}(n), n = 0, 1, \dots\}$.

Теорема 2.2 распространяется на случай нелинейных границ следующим образом.

Рассмотрим семейство функций $g(x, \cdot): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $x > 0$, где $g(x, 0) = x$. Мы будем использовать значения $g(x, n)$ только при целых $n = 1, 2, \dots$. Поэтому можно без ограничения общности предполагать, что все функции $g(x, t)$ непрерывны по t и $\min(g(x, [t]), g(x, [t] + 1)) \leq g(x, t) \leq \max(g(x, [t]), g(x, [t] + 1))$ при любых x и t .

Пусть

$$\eta_g(x) = \min \{n \geq 0: X(n) > g(x, n)\} \quad (2.14)$$

есть момент первого перескока через границу $g(x, \cdot)$ и $\chi_g(x)$ — соответствующая величина перескока.

Зафиксируем $\Delta > 0$. Пусть $U \equiv U(x)$ — наименьшее решение уравнения $g(x, t) = (b + \Delta)t$, где b определено в (2.3). Предположим, что функции $g(x, \cdot)$ и число Δ таковы, что $U(x) < \infty$ при всех $x > 0$ и выполнены условия

$$(g1) \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \inf_{t \in [0, U(x)]} g(x, t) > 0;$$

$$(g2) \quad \text{для любого } T > 1$$

$$\sup_{t \in [U, TU]} |g(x, t) - g(x, t + 1)| \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$, где A из условий $(G1)$, $(MC1)$.

Можно рассматривать вместо $(g2)$ и формально более общее условие вида:

$$\sup_{t \in [U, TU]} |g(x, t) - g(x, t + 1) + C| \rightarrow 0$$

для некоторого $C < A$, однако оно сводится к $(g2)$ путем замены в исходной задаче последовательности $X(n)$ на $X(n) - nC$.

З а м е ч а н и е 2.4. Если функция g представима в виде $g(x, t) = x + h(t)$, то условия $(g1)$, $(g2)$ имеют место, если и только если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} |h(m+1) - h(m)| = 0$. В качестве примеров функций $h(t)$, удовлетворяющих этим условиям, можно предложить $\ln t$; t^α , $\alpha \in (0, 1)$; $t/\ln t$. Отметим, что функция $t/\ln t$ не входит в класс функций, рассматривавшихся в работе [2].

Теорема 2.3. В предположениях $(g1)$, $(g2)$ и при выполнении условий $(MC1)$, $(MC2)$ и (AO)

$$\rho(\chi_g(x), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Следствие 2.2. Если, дополнительно, случайная величина ζ имеет конечный второй момент, то случайные величины $\chi(x)$ и $\chi_g(x)$ равномерно по x интегрируемы, и, следовательно, $E\chi(x) \rightarrow E\chi_{as}(\infty) < \infty$ и $E\chi_g(x) \rightarrow E\chi_{as}(\infty)$ при $x \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 2.5. Если предположить, что цепь Маркова $X(n)$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т.е. $X(n)/n \rightarrow a \equiv E\xi$

п.н. (это выполнено, если $\{\xi(n) \equiv \xi(n, x)\}$ образуют последовательность н.о.р.с.в. со средним a , или, более общо, если $\xi(n, x)$ сходятся к ξ достаточно быстро), то утверждение теоремы 2.3 остается справедливым, если в условиях $(g1)$, $(g2)$ заменить $U \equiv U(x)$ на $(a - \varepsilon_x)x$, а TU — на $(a + \varepsilon_x)x$, где числа $\varepsilon_x > 0$ таковы, что $P\{|X(n)/n - a| > \varepsilon_x\} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Отметим одно простое следствие теорем 2.1 и 2.3.

Следствие 2.3. Пусть $\varphi: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ — строго монотонная функция такая, что

$$|\varphi(x) - x| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Если цепь Маркова $\{\varphi(X(n))\}$ удовлетворяет условиям $(MC1)$, $(MC2)$, то для $X(n)$ имеет место (2.5).

Если $\{\varphi(X(n))\}$ удовлетворяет условиям $(MC1)$, $(MC2)$ и (AO) , то справедливо (2.11). Если, в дополнение, выполнены предположения $(g1)$, $(g2)$, то имеет место (2.15).

Пусть $\{\gamma(n)\}_{n \geq 1}$ — последовательность с.в. такая, что при любом n с.в. $\gamma(n)$ измерима относительно сигма-алгебры, порожденной с.в. $X(1), \dots, X(n)$ (или, более общо, с.в. $\gamma(1), \dots, \gamma(n)$ и семейства $\{\xi(n+1, x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, $\{\xi(n+2, x)\}_{x \in \mathbb{R}}, \dots$ взаимно независимы). Положим $\eta_{(\gamma)}(x) = \min\{n \geq 1: X(n) > x + \gamma(n)\}$ и $\chi_{(\gamma)}(x) = X(\eta_{(\gamma)}(x)) - x - \gamma(\eta_{(\gamma)}(x))$.

Теорема 2.4. Предположим, что с.в. $\{\gamma(n)\}$ сходятся п.н. к конечной с.в. γ .

Если цепь Маркова $X(n)$ удовлетворяет условиям $(MC1)$, $(MC2)$ и (AO) , то

$$\rho(\chi_{(\gamma)}(x), \chi_{as}(\infty)) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

В частности, если с.в. $\hat{\gamma} \equiv \sup_n |\gamma(n)|$ интегрируема и с.в. ζ (см. условия $(G2)$, $(MC2)$) интегрируема в квадрате, то

$$E\chi_{(\gamma)}(x) \rightarrow E\chi_{as}(\infty) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Теорема 2.4 допускает естественное обобщение на случай произвольных границ $g(x, n)$.

Приводимая ниже теорема 2.5 показывает, что, вообще говоря, предельное распределение в теоремах 2.2–2.4 может отличаться от распределения $\chi_{as}(\infty)$. Простоты ради, мы сформулируем и докажем эту теорему только в случае однородного случайного блуждания $X(n) = S(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и нелинейной границы одного частного вида.

Теорема 2.5. Предположим, что

— $\{\xi_n\}$ образуют последовательность н.о.р.с.в. со средним $a = E\xi_1 > 0$ и с конечной дисперсией $\sigma^2 = E\xi_1^2 - a^2 > 0$;

— функция $g(x, t)$ представима в виде $g(x, t) = x + \alpha_1 t$ при $t < t_0 \equiv t_0(x) = x/(a - \alpha_1)$ и $g(x, t) = ax/(a - \alpha_1) + (t - t_0)\alpha_2$ при $t \geq t_0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, a)$ — некоторые постоянные;

— с.в. $\xi_1 - \alpha_1$ и $\xi_1 - \alpha_2$ имеют нерешетчатые распределения.

Тогда

$$P\{\chi_g(x) > t\} \rightarrow \frac{1}{2} (P\{\chi_{as}^{(1)} > t\} + P\{\chi_{as}^{(2)} > t\}),$$

где $\chi_{as}^{(i)} \equiv \chi_{as}^{(i)}(\infty)$ — величина перескока через бесконечно удаленный барьер для однородного случайного блуждания с приращениями $\{\xi_n - \alpha_i\}_{n \geq 1}$, $i = 1, 2$.

Нетрудно обобщить утверждение теоремы 2.5 на случай цепей Маркова и функций g из более широкого класса, и получить в качестве предельного распределения смесь распределений перескоков через бесконечно удаленный барьер для однородных случайных блужданий со «сдвинутыми» приращениями, $\{\xi_n - \alpha\}_{n \geq 1}$, «взвешенных» с помощью стандартного нормального распределения.

2.2. Равномерная теорема сходимости для перескока и равномерная теорема восстановления. Отметим предварительно, что в силу соотношений типа тождества Вальда существует тесная взаимосвязь между утверждениями, касающимися существования предельного распределения $\chi(x)$ для последовательности $X(n) = S(n)$, и теоремой восстановления. Одно из этих утверждений влечет другое (см., например, [7]). В настоящей работе в качестве первичных выбраны утверждения, касающиеся перескока. С их помощью мы получим ниже теорему восстановления. Но так как нужные нам результаты о величине перескока удастся сделать равномерными по классу распределений, то такую же равномерность можно получить и в теореме восстановления.

Существует и иной, не менее естественный подход, когда в качестве первичных берутся оценки в теореме восстановления, и с их помощью получаются результаты, касающиеся величины перескока. Соответствующие результаты будут вскоре опубликованы. Пусть $B(t)$ — произвольная неотрицательная функция, $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ и функция $\psi(u)$, $u > 0$ строго положительна. Введем класс функций распределения $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}(A, B, \psi)$. Мы будем говорить, что функция F принадлежит классу $\mathfrak{F}$, если с.в. ξ с распределением F удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $E\xi \equiv a(F) \geq A$;
- (ii) $E\{\xi I(\xi > t)\} \leq B(t)$ при всех $t \geq 0$;
- (iii) при всех $u > 1$ $|E \exp\{iu\xi\} - 1| \geq \psi(u)$.

Условие (iii) означает, что любое распределение $F \in \mathfrak{F}$ нерешетчато и любой слабый предел функций распределения из $\mathfrak{F}$ также является нерешетчатым. Обозначим через $\chi^{(F)}(x)$ величину перескока через уровень x для последовательности сумм $S^{(F)}(n) = \xi_1^{(F)} + \dots + \xi_n^{(F)}$

н.о.р.с.в. с общим распределением F и через $H^{(F)}(u, v) = \sum_n P\{S^{(F)}(n) \in (u, u+v]\}$ — соответствующую функцию восстановления.

Теорема 2.6. 1. *Справедливо соотношение*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathfrak{F}} \rho(\chi^{(F)}(x), \chi^{(F)}(\infty)) = 0. \quad (2.19)$$

2. *Если заменить условие (ii) в определении $\mathfrak{F}$ на условие «двусторонней» равномерной интегрируемости:*

$$(ii)' \quad \sup_{F \in \mathfrak{F}} E\{|\xi|I(|\xi| > t)\} \leq B(t), \quad (2.20)$$

то при любом $v > 0$

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathfrak{F}} \left| H^{(F)}(u, v) - \frac{v}{a(F)} \right| = 0. \quad (2.21)$$

Отметим, что дополнительное условие (ii)' необходимо для получения следующего результата: если $F^{(n)} \in \mathfrak{F}$ и слабо сходятся к F , то $a(F^{(n)}) \rightarrow a(F)$ (если слагаемые ξ_n неотрицательны, то условия (ii) и (ii)' совпадают). После того как эта статья была подготовлена к печати, мы узнали, что утверждение (2.21) уже было получено в недавней работе [8]. Предложенный в ней метод доказательства отличен от нашего и использует аппарат характеристических функций.

Нетрудно сформулировать естественный аналог теоремы 2.6 в решетчатом случае. А именно, имеет место

Теорема 2.7. Пусть $\psi_1(u)$, $u \in [0, 2\pi]$, — непрерывная функция такая, что $\psi_1(0) = \psi_1(2\pi) = 0$ и $\psi_1(u) > 0$ при всех $u \in (0, 2\pi)$. Далее, пусть $\mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_1(C, B, \psi_1)$ — класс функций распределения, удовлетворяющих условиям (i), (ii) и следующим двум:

(iv) каждая функция $F \in \mathfrak{F}_1$ есть функция распределения целочисленной случайной величины ξ с шагом 1 (т.е. $2\pi = \min\{u > 0: E \exp\{iu\xi\} = 1\}$);

(v) для с.в. ξ с распределением $F \in \mathfrak{F}_1$ и для всех $u \in (0, 2\pi)$

$$|E \exp\{iu\xi\} - 1| \geq \psi_1(u).$$

Тогда для любого целого $t = 0, 1, \dots$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathfrak{F}_1} |P\{\chi^{(F)}(x) > t\} - P\{\chi^{(F)}(\infty) > t\}| = 0,$$

где x пробегает целые значения.

Если условие (ii) заменить на (ii)', то при $x \in \{1, 2, \dots\}$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathfrak{F}_1} \left| \sum_n P\{S(n) = x\} - \frac{1}{a(F)} \right| = 0.$$

На основе теоремы 2.2 и замечания 2.1 можно доказать естественные аналоги равномерной теоремы сходимости для перескока и равномерной теоремы восстановления для асимптотически однородных цепей Маркова.

Сформулируем одно из таких утверждений. Предположим, что заданы невозрастающие функции $B(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, и $\{R(n, x)\}, R(n, x) \rightarrow 0$ при $n, x \rightarrow \infty$. Цепь Маркова $X = \{X(n)\}$ с приращениями $\{\xi(n, x)\}$ назовем (B, R) -регулярной, если

(а) она удовлетворяет условиям $(MC1), (MC2)$, а также условию (AO) с заданной оценкой скорости сходимости $\rho(\xi(n, x), \xi) \leq R(n, x)$;

(б) распределение мажоранты ζ в (2.3) удовлетворяет условию

$$b(t) = E\{\zeta I(\zeta > t)\} \leq B(t) \quad \text{при всех } t > 0;$$

(с) распределение с.в. ξ принадлежит классу $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.8. Пусть $\mathcal{X}_1$ — семейство всех (B, R) -регулярных цепей Маркова. Тогда

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{X \in \mathcal{X}_1} \rho(\chi(x), \chi_{as}(\infty)) = 0.$$

2.3. Следствия для среднего времени первого прохождения и примеры. В этом пункте мы ограничимся рассмотрением функций $g(x, t) = x + h(t)$.

Отметим прежде всего, что существует тесная взаимосвязь между утверждениями о предельном распределении $\chi_g(x) \equiv \chi_{(h)}(x)$ и асимптотикой среднего времени первого прохождения $\eta = \eta_g(x) \equiv \eta_{(h)}(x)$. Она вытекает из тождества

$$X(\eta) = x + h(\eta) + \chi_{(h)}(x).$$

Поэтому если существует сходимость $\chi_{(h)}(x)$ в среднем к χ и удастся оценить асимптотику $E h(\eta)$ и $E X(\eta)$ в терминах $E \eta$, то мы получим уравнение для $E \eta$.

Если, например, h — выпуклая вверх функция, $X(n) = S(n)$, то из тождества Вальда получаем:

$$x + h(E \eta) + E \chi_{(h)}(x) \leq a E \eta + o(1).$$

Поэтому, если $u(x)$ — решение уравнения $x + h(u) + E \chi = au$, то $E \eta_{(h)}(x) \leq u(x) + o(1)$. Можно показать, что в широких предположениях справедливо и обратное неравенство. Мы не будем на этом останавливаться, поскольку аналогичные результаты для гладких h получены в [2].

Здесь мы более подробно рассмотрим лишь один частный случай, играющий важную роль в приложениях. Именно, мы будем считать, как и прежде, что $g(x, n) = x + h(n)$ и что выполнено условие

(МСЗ) $X(n)$ есть ЦМ, представляемая в виде суммы $X(n) = S(n) + \theta(n)$, где $S(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$, последовательность $\{\xi_n\}$ состоит из н.о.р.с.в. со средним $E \xi_1 = a > 0$ и конечным вторым моментом $E \xi_1^2 < \infty$, а $\theta(n)$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\theta(n) \xrightarrow{P} \theta$, $E \theta^2(n) < C < \infty$.

Ниже мы приведем примеры двух цепей Маркова, часто встречающихся в приложениях и удовлетворяющих условию (МСЗ).

Функцию h мы будем предполагать гладкой, выпуклой вверх и допускающей представление: $h(t) = t^\alpha l(t)$, $\alpha < 1$, где функция $l(t)$ является медленно меняющейся и «дважды дифференцируемой на бесконечности». А именно, введем условие

(g3) при всех t, v ; $t \geq 0$, $t + v \geq 0$, функция $h(t)$ допускает представление

$$h(t+v) = h(t) \left[1 + \frac{v}{t} c(t) + \frac{v^2}{2t^2} c(t, v) \right], \quad (2.22)$$

где функции $c(t)$, $c(t, v)$ ограничены и $c(t) \rightarrow \alpha < 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что функции $h(t) = t^\alpha l(t)$ удовлетворяют условию (g3), если $l(t)$ является гладкой на бесконечности (скажем, $l(t) = \ln t$). Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то последний член в разложении (2.22) не потребуется; достаточно представления вида $h(t+v) = h(t)[1 + vc(t, v)/t]$.

Обозначим для всего дальнейшего через $u(x)$ решение уравнения

$$au = x + h(u) + d,$$

где $d = E\chi - E\theta$ и χ имеет распределение $\chi_{as}(\infty)$. Такое решение всегда существует и единственно, если функция $au - h(u)$ возрастает по u (это предположение, возможно, и не нужно в силу (g3)).

Теорема 2.9. При выполнении предположений (МСЗ), (g3)

$$E \eta(x) = u(x) + o(1).$$

Рассмотрим два примера стохастически рекурсивных последовательностей $X(n+1) = f(X(n), \xi_{n+1})$, $f(\cdot, \cdot): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, играющих важную роль в теории систем обслуживания и в задачах последовательного анализа (см., например, [9]). Если ξ_n — н.о.р.с.в., то $X(n)$ образует цепь Маркова.

Пример 1. Рассмотрим стохастически рекурсивную последовательность

$$w_{n+1} = (w_n + \xi_{n+1})^+ \equiv \max(0, w_n + \xi_{n+1})$$

и положим, простоты ради, начальное условие w_0 равным нулю.

Положим $\xi(n, x) = (x + \xi_n)^+ - x^+$. Тогда $w_{n+1} = w_n + \xi(n+1, w_n)$. Заметим, что $\xi_n \leq \xi(n, x) \leq \xi_n^+$ п.н. и $\xi(n, x) \rightarrow \xi_n$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому условия (MC1), (MC2) и (AO) выполнены при $A = a$, $\zeta = \xi_1^+$ и $\xi = \xi_1$. Следовательно, для последовательности $\{w_n\}$ имеют место утверждения теорем 2.2–2.4.

Далее, отметим, что имеет место представление $w_n = \max(0, \xi_n, \xi_n + \xi_{n-1}, \dots, \xi_n + \dots + \xi_1)$. Поэтому, последовательность $\theta(n) \equiv w_n - S(n) = \max(0, -S(1), \dots, -S(n))$ монотонно сходится к $\theta \equiv \sup(0, -S(1), -S(2), \dots)$. Если предположить дополнительно конечность моментов $E\xi_1^2 < \infty$, $E(\xi_1^-)^3 < \infty$, то будет выполнено условие (MC3) и, следовательно, утверждение теоремы 2.9. Заметим, что условия $E\theta^2 < \infty$, $E(\xi_1^-)^3 < \infty$ при существовании $E\theta$, $E\xi_1^2$ являются, по-видимому, излишними.

Пример 2. Рассмотрим стохастически рекурсивную последовательность (см. [9])

$$W_{n+1} = \xi_{n+1} + \ln(1 + \exp(W_n)).$$

Как и в первом примере, будем считать $W_0 = 0$. Отметим, что

$$\max(0, W_n) + \xi_{n+1} < W_{n+1} < \max(0, W_n) + \xi_{n+1} + 1 \quad (2.23)$$

п.н. при всех n .

Положим $\varphi(x) = x$ при $x \geq 0$ и $\varphi(x) = \exp(x) - 1 \geq x$ при $x < 0$. Функция φ непрерывна, строго возрастает и удовлетворяет условиям следствия 2.3. Положим $W_n^* = \varphi(W_n)$ и при $x > -1$

$$\xi(n, x) = \varphi(\xi_n + \ln(1 + \exp\{\varphi^{-1}(x)\})) - x.$$

Для $x \leq -1$ положим $\xi(n, x) = \xi_n$. Тогда $W_{n+1}^* = W_n^* + \xi(n+1, W_n^*)$ п.н. Если $x \gg 1$, то $\xi(n, x) = \xi_n + O(\exp\{-x\})$ п.н. на событии $\{\xi_n \geq -x\}$. Поэтому $\xi(n, x) \rightarrow \xi_n$ п.н. при $x \rightarrow \infty$. Отметим, что $\xi_n \leq \xi(n, x) \leq \xi_n^+ + 2$ п.н. при любом x . Значит, для цепи Маркова $\{W_n^*\}$ условия (MC1), (MC2), (AO) выполняются при $A = a$, $\zeta = \xi_1^+ + 2$ и $\xi = \xi_1$. Поэтому мы можем воспользоваться следствием 2.3 и заключить, что для последовательности $\{W_n\}$ имеют место утверждения теорем 2.2–2.4.

Далее, отметим, что имеют место соотношения

$$\exp(W_n) = \exp(S(n)) [1 + \exp(-S(1)) + \dots + \exp(-S(n-1))].$$

Значит, последовательность $\theta(n) \equiv W_n - S(n) = \ln(\sum_{i=0}^{n-1} \exp(-S(i)))$ монотонно сходится к $\theta \equiv \ln(\sum_{i=0}^{\infty} \exp(-S(i))) < \infty$. Нетрудно показать, что если второй момент $E\xi_1^2$ конечен, то и $E\theta^2 < \infty$. Следовательно, имеет место утверждение теоремы 2.9.

3. Доказательства

3.1. Доказательства утверждений п. 2.1. Нам потребуется несколько вспомогательных предложений. В лемме 3.1 доказывается, что при любом $x > 0$ все условные средние моментов перескоков равномерно ограничены некоторой величиной $M(x)$ (см. (3.1)); это следует из естественного обобщения леммы Пэйкса. В лемме 3.2 показано, что функция $M(x)$ является субаддитивной, что позволяет получить оценки (2.5) и (3.5). Лемма 3.3 носит технический характер.

Пусть $\xi(n) = X(n) - X(n-1)$ и $X^{(l)}(n) = X(l+n) - X(l)$ при $l = 0, 1, \dots$. Положим $\eta^{(l)}(x) = \min\{n: X^{(l)}(n) > x\}$ и $\chi^{(l)}(n) = X^{(l)}(\eta^{(l)}(x)) - x$.

Лемма 3.1. В условиях теоремы 2.1 имеет место неравенство (2.5). Кроме того, при каждом $x \geq 0$

$$M(x) \equiv \sup_l \text{vraisup } \mathbf{E} \{\eta^{(l)}(x) \mid \mathcal{F}_l\} < \infty. \quad (3.1)$$

Доказательство. При любом $0 < \varepsilon < 1$ выберем число $r \equiv r(\varepsilon A/m)$ так, что

$$\mathbf{E} \{(\xi(n+1) - r)^+ \mid \mathcal{F}_n\} \leq \mathbf{E}(\zeta - r)^+ \leq \frac{\varepsilon A}{m}$$

п.н. при всех n (здесь мы используем запись $x^+ = \max(0, x)$). Введем случайные величины $\tilde{\xi}(n) = \min(\xi(n), r)$ и по ним построим величины $\tilde{X}(n) = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}(i)$; $\tilde{\eta}(x)$; $\tilde{X}^{(l)}(n)$; функцию $\tilde{M}(x)$ и т.д. Отметим, что имеют место следующие неравенства: $M(x) \leq \tilde{M}(x)$ при всех x и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{\tilde{X}^{(km+j)}(m-j) \mid \mathcal{F}_{km+j}\} &\geq \mathbf{E} \{X^{(km+j)}(m-j) \mid \mathcal{F}_{km+j}\} - \varepsilon A \\ &\geq -V - \varepsilon A \equiv -\tilde{V}, \end{aligned}$$

где V из условия (G3). Мы покажем, что

$$\tilde{M}(x) \leq \frac{m(x + mr + \mathbf{I}(m > 1)(V + A))}{A(1 - \varepsilon)}. \quad (3.2)$$

Для $l = km + j$ (где $0 \leq j \leq m-1$, $k \geq 0$) положим $Y^{(l)}(0) = 0$ и, при $n \geq 1$, $Y^{(l)}(n) = \tilde{X}^{(l)}(nm - j)$. Пусть

$$\tau^{(l)} \equiv \tau^{(l)}(x) = \min\{n \geq 1: Y^{(l)}(n) > x\}.$$

Тогда $\tilde{M}(x) \leq m \sup_l \text{vraisup } \mathbf{E} \{\tau^{(l)} \mid \mathcal{F}_l\}$, и неравенство (3.2) будет иметь место, если мы докажем, что при всех l

$$\mathbf{E} \{\tau^{(l)} \mid \mathcal{F}_l\} \leq \frac{x + mr + \mathbf{I}(m > 1)(V + A)}{A(1 - \varepsilon)} \quad \text{п.н.} \quad (3.3)$$

Зафиксируем произвольно l и обозначим, краткости ради, $\tau = \tau^{(l)}$, $Y(0) = 0$, $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}_l$ и $Y(n) = Y^{(l)}(n)$, $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}_{(k+n)m}$ при $n = 1, 2, \dots$. Соотношения

$$\mathbf{P}\{Y(n+1) \leq Y(n) + mr\} = 1;$$

$$\mathbf{E}\{Y(n+1) - Y(n) \mid \mathcal{F}_n\} \geq A(1 - \varepsilon) > 0 \quad \text{п.н.}$$

справедливы при всех $n \geq 1$. Если $j = 0$, то эти соотношения имеют место и при $n = 0$. Если же $j \geq 1$, то $\mathbf{P}\{Y(1) \leq (m - j)r\} = 1$ и $\mathbf{E}(Y(1) \mid \mathcal{F}(0)) \geq -\tilde{V}$ п.н.

Введем пробную функцию $L(y) = (x + mr - y)^+ \geq 0$. Тогда $\tau = \min\{n \geq 1: L(Y(n)) < mr\}$, и неравенство (3.3) следует из естественного обобщения леммы Пэкса (в которой справедливость естественного аналога неравенства (3.3) показывается в случае, когда $\{Y(n)\}$ является однородной цепью Маркова). Докажем для полноты изложения это неравенство.

При любом $N \geq 1$ положим

$$\tau_N = \min\{\tau, N\}; \quad F_N = \mathbf{E}\left\{\sum_1^{\tau_N} L(Y(n)) \mid \mathcal{F}_l\right\}.$$

Заметим, что при каждом n событие $\{\tau \geq n\}$ принадлежит сигма-алгебре $\mathcal{F}(n-1)$. Поэтому (в следующих ниже формулах мы используем сокращенную запись: $\mathbf{E}_l\{\cdot\}$ вместо $\mathbf{E}\{\cdot \mid \mathcal{F}_l\}$ и $\mathbf{P}_l\{\cdot\}$ вместо $\mathbf{P}\{\cdot \mid \mathcal{F}_l\}$)

$$\begin{aligned} F_N &= \mathbf{E}_l\left(\sum_{n=1}^N L(Y(n)) \mathbf{I}(\tau \geq n)\right) \\ &= \mathbf{E}_l L(Y(1)) + \mathbf{E}_l\left(\sum_{n=2}^N \mathbf{E}\left\{L(Y(n)) \mathbf{I}(\tau \geq n) \mid \mathcal{F}(n-1)\right\}\right) \\ &= \mathbf{E}_l L(Y(1)) + \mathbf{E}_l\left(\sum_{n=2}^N \mathbf{I}(\tau \geq n) \mathbf{E}\left\{L(Y(n)) \mid \mathcal{F}(n-1)\right\}\right) \\ &\leq \mathbf{E}_l L(Y(1)) + \mathbf{E}_l\left(\sum_{n=2}^N \mathbf{I}(\tau \geq n) [L(Y(n-1)) - A(1 - \varepsilon)]\right) \\ &\leq \mathbf{E}_l L(Y(1)) + \mathbf{E}_l\left(\sum_{n=2}^N \mathbf{I}(\tau \geq n-1) L(Y(n-1))\right) \\ &\quad - A(1 - \varepsilon) \sum_{n=2}^N \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_l L(Y(1)) + F_{N-1} - A(1-\varepsilon) \sum_{n=2}^N \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\} \\
&\leq x + m\tau - \mathbf{E}_l Y(1) + F_N - A(1-\varepsilon) \sum_{n=2}^N \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\}.
\end{aligned}$$

В частности, если $j = 0$, то $\mathbf{E}_l Y(1) \geq A(1-\varepsilon)$ п.н., и при всех $N = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство:

$$A(1-\varepsilon) \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\} \leq x + m\tau.$$

Если же $j \geq 1$, то $\mathbf{E}_l Y(1) \geq -\tilde{V}$ п.н. и

$$A(1-\varepsilon) \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\} \leq x + m\tau + \tilde{V} + A(1-\varepsilon) \equiv x + m\tau + V + A.$$

Устремив N к бесконечности и заметив, что, во-первых, $\sum_1^\infty \mathbf{P}_l\{\tau \geq n\} = \mathbf{E}_l \tau$ и, во-вторых, $j = 0$ при $m = 1$, мы получим (3.3).

Лемма 3.2. Положим $K = M(1) < \infty$. В условиях теоремы 2.1,
1) при любом $v \geq 0$

$$M(v) \leq K(1+v); \quad (3.4)$$

2) при любых $v, t > 0, l = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}\{\chi^{(l)}(v) > t \mid \mathcal{F}_l\} \leq M(v)\bar{F}(t) \quad \text{п.н.}; \quad (3.5)$$

при любых $v, t > 0, l = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{P}\{\chi^{(l)}(v) > t \mid \mathcal{F}_l\} \leq K \left(\bar{F}(t) + \int_t^{t+v} \bar{F}(x) dx \right), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}\{\chi^{(l)}(v) > t \mid \mathcal{F}_l\} \leq c_1 \mathbf{E}\{\zeta \mathbf{I}(\zeta > t)\} \quad (3.7)$$

п.н., где c_1 определена в (3.9).

Доказательство. Во-первых, функция $M(v)$ не убывает по $v \geq 0$. Во-вторых, она субаддитивна: при любых $u, v \geq 0$

$$M(v+u) \leq M(v) + M(u). \quad (3.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\eta^{(l)}(v+u) &= \eta^{(l)}(v) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{v+0}^{v+u} \mathbf{I}(\eta^{(l)}(v) = m) \mathbf{I}(\theta^{(l)} S(m) \in dy) \eta^{(l+m)}(v+u-y) \\
&\leq \eta^{(l)}(v) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{I}(\eta^{(l)}(v) = m) \eta^{(l+m)}(u).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \eta^{(l)}(v+u) \mid \mathcal{F}_l \} &\leq \mathbf{E} \{ \eta^{(l)}(v) \mid \mathcal{F}_l \} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \eta^{(l)}(v) = m \mid \mathcal{F}_l \} \vee \sup \mathbf{E} \{ \eta^{(l+m)}(u) \mid \mathcal{F}_{l+m} \} \\ &\leq M(v) + M(u). \end{aligned}$$

Следовательно, при любом $v > 0$:

$$M(v) \leq M([v] + 1) \leq K([v] + 1) \leq K(1 + v),$$

где $[v]$ есть целая часть числа v . Докажем второе утверждение (далее, $\mathbf{P}_l\{\cdot\}$ означает $\mathbf{P}\{\cdot \mid \mathcal{F}_l\}$).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l\{\chi^{(l)}(v) > t\} &= \sum_n \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v) = n, X^{(l)}(n) > t + v\} \\ &\leq \sum_n \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v) = n, \xi(n+l) > t\} \\ &\leq \sum_n \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v) \geq n, \xi(n+l) > t\} \\ &\leq \sum_n \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v) \geq n\} \vee \sup \mathbf{P}\{\xi(n+l) > t \mid \mathcal{F}_{l+n-1}\} \\ &\leq \bar{F}(t) \sum_n \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v) \geq n\} \equiv \bar{F}(t) M(v). \end{aligned}$$

В частности, для любого $v_0 \in [0, 1]$ и любого целого l $\mathbf{P}_l\{\chi^{(l)}(v_0) > t\} \leq K\bar{F}(t)$.

Перейдем к доказательству (3.6).

Пусть $v = v_0 + N$, где $0 \leq v_0 \leq 1$, $N \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l\{\chi^{(l)}(v) > t\} &\leq \mathbf{P}_l\{\chi^{(l)}(v-1) > t+1\} \\ &+ \sum_n \int_0^1 \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v-1) = n, \\ &\quad \chi^{(l)}(v-1) \in v-1+y+dy, \chi^{(l+n)}(1-y) > t\} \end{aligned}$$

и второе слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается сверху выражением

$$\begin{aligned} &\sum_n \int_0^1 \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v-1) = n, \chi^{(l)}(v-1) \in v-1+y+dy\} \\ &\quad \times \vee \sup \mathbf{P}\{\chi^{(n+l)}(1-y) > t \mid \mathcal{F}_{n+l}\} \\ &\leq K\bar{F}(t) \sum_n \int_0^1 \mathbf{P}_l\{\eta^{(l)}(v-1) = n, \chi^{(l)}(v-1) \in v-1+y+dy\} \\ &\leq K\bar{F}(t). \end{aligned}$$

Используя шаг индукции, получаем оценку

$$P\{\chi^{(l)}(v) > t\} \leq K \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}(t+k).$$

Последнее выражение не превосходит $K(\bar{F}(t) + \int_t^{t+v} \bar{F}(u) du)$.

Докажем (3.7). Пусть $N > 0$ таково, что $b(N) \equiv E\{\zeta I(\zeta \geq N)\} \leq A/(2m)$. Положим $\beta = \frac{1}{2} \min\{N, 1, A/(4m)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{A}{m} &\leq E\zeta = E\{\zeta I(\zeta < 2\beta)\} + E\{\zeta I(2\beta \leq \zeta < N)\} + b(N) \\ &\leq 2\beta + N\bar{F}(2\beta) + \frac{A}{2m}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\bar{F}(2\beta) \geq A/(4Nm)$. Отметим, что при $t \geq \beta$

$$b(t) = t\bar{F}(t) + \int_t^\infty \bar{F}(u) du \geq \beta \left(\bar{F}(t) + \int_t^\infty \bar{F}(u) du \right),$$

а при $t < \beta$

$$b(t) \geq \int_t^\infty \bar{F}(u) du \geq \int_t^{t+\beta} \bar{F}(u) du \geq \beta \bar{F}(2\beta) \geq \frac{\beta A}{4Nm} \bar{F}(t).$$

Поэтому при любых $t, v \geq 0$

$$\bar{F}(t) + \int_t^{t+v} \bar{F}(u) du \leq b(t) \frac{1}{\beta} \max\left(1, \beta + \frac{4Nm}{A}\right),$$

и неравенство (3.7) имеет место при

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{K}{\beta} \max\left(1, \beta + \frac{4Nm}{A}\right); \quad \beta = \frac{1}{2} \min\left\{1, N, \frac{A}{4m}\right\}; \\ N &= b^*\left(\frac{A}{2m}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольная константа. Предположим, что условие (G1) выполняется при $m = 1$. Тогда неравенство (3.6) остается справедливым при замене постоянной $K = M(1)$ на величину $K' = r(\varepsilon A)/A(1 - \varepsilon)$, где, как и ранее, $r(t)$ есть наименьшее r , при котором $E(\zeta - r)^+ \leq t$ и $r(t) \leq b^*(t)$.

Доказательство. В доказательстве леммы 3.1, если $m = 1$, то имеем неравенства

$$K = M(1) \leq \widetilde{M}(1) \leq \frac{1 + r(\varepsilon A)}{A(1 - \varepsilon)}.$$

При любом $z > 0$ рассмотрим вспомогательную последовательность $X_z(n) \equiv X(n)/z$. Для нее выполнены условия (G1), (G2) с константой $A_z = A/z$ и функцией $F_z(t) = F(tz)$. Поэтому $r_z(t) = r(t)/z$ и

$$\mathbf{P}\{\chi(v) > t\} \equiv \mathbf{P}\left\{\chi_z\left(\frac{v}{z}\right) > \frac{t}{z}\right\} \leq K_z \left(\bar{F}(t) + \int_t^{t+v} \bar{F}(x) dx\right)$$

при любом $z > 0$, где

$$K_z = \frac{1 + r_z(\varepsilon A)}{A_z(1 - \varepsilon)} = \frac{z + r(\varepsilon A)}{A(1 - \varepsilon)}.$$

Устремляя z к нулю, получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 2.1 вытекает из лемм 3.1 и 3.2. Утверждение (2.8) замечания 2.1 следует из леммы 3.3, а (2.9) — из (3.9).

Следует отметить, что существует альтернативный естественный вариант доказательства теоремы 2.1, основанный на оценках функции восстановления (см. также замечания в п. 2.2). Соответствующие результаты, по-видимому, будут вскоре опубликованы.

Доказательство теоремы 2.2. Начнем со следующих замечаний.

З а м е ч а н и е 3.1. По теореме Штрассена, если $\rho(F, G) \leq \delta$, то можно задать на одном вероятностном пространстве с.в. ψ_1 с распределением F и с.в. ψ_2 с распределением G так, что $\mathbf{P}\{|\psi_1 - \psi_2| > \delta\} \leq \delta$.

Как следствие, имеет место следующий факт. Пусть $\{X(n)\}$ — ЦМ с приращениями $\xi(n) = X(n) - X(n-1)$. Обозначим через $F_{n+1} \equiv F_{n+1}(\omega)$ условное распределение приращения $\xi(n+1)$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_n$:

$$F_{n+1}(x) = \mathbf{P}\{\xi(n+1) < x \mid \mathcal{F}_n\}.$$

Предположим теперь, что существует функция распределения G и, при некотором n и всех $i = 1, \dots, l$ события $A_{n+i-1} \in \mathcal{F}_{n+i-1}$ таковы, что $\rho(F_{n+i}, G) \leq \delta$ п.н. на событии A_{n+i-1} . Тогда существует задание на одном вероятностном пространстве с.в. $\xi(1), \dots, \xi(n+l)$ и н.о.р.с.в. $\xi_1, \dots, \xi_l$ с совместным распределением G , при котором

- (а) с.в. ξ_1 не зависит от $\{\xi(1), \dots, \xi(n)\}$ и при любом $i = 1, \dots, l-1$ с.в. ξ_{i+1} не зависит от $\{\xi(1), \dots, \xi(n+i), \xi_1, \dots, \xi_i\}$;
- (б) неравенство

$$\mathbf{P}\{|\xi(n+i) - \xi_i| \leq \delta \forall i = 1, \dots, l \mid \mathcal{F}_n\} \geq 1 - l\delta - \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{l-1} A_{n+i} \mid \mathcal{F}_n\right\}$$

имеет место п.н. на событии A_n .

З а м е ч а н и е 3.2. Рассмотрим две числовые последовательности $z_1, \dots, z_l$ и $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l$ такие, что $|z_i - \tilde{z}_i| \leq \delta$ при всех $i = 1, \dots, l$. Положим $Z_i = z_1 + \dots + z_i$ и $\tilde{Z}_i = \tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_i$. Возьмем произвольно $x > 0$ и $t > 2l\delta$ и обозначим $N_x = \min\{i: Z_i > x\}$; $H_x = Z_{N_x} - x$ ($\tilde{N}_x$ и $\tilde{H}_x$ определяются аналогично). Нетрудно видеть, что справедлива следующая импликация: если $N_x \leq l$ и $H_x > t$, то $\tilde{N}_{x+l\delta} \leq l$ и $\tilde{H}_{x+l\delta} > t - l\delta$.

Перейдем собственно к доказательству теоремы 2.2. Пусть $\rho(z) = \sup_{u \geq z} \rho(\chi_{as}(x), \chi_{as}(\infty))$. Отметим, что при всех $u \geq z$ и $t \geq \rho(z)$

$$P\{\chi_{as}(\infty) > t\} \leq P\{\chi_{as}(u) > t - \rho(z)\} + \rho(z).$$

Пусть сначала $x = 2y + 2z$, где y и z — произвольные положительные числа. Для любого $N \geq 1$

$$P\{\chi_{as}(\infty) > t\} \leq \rho(z) + P\{\eta(2y) < N\} + P\{\chi(2y) > z\} + \sum_{n=N}^{\infty} \int_0^z P\{\eta(2y) = n; \chi(2y) \in dv\} P\{\chi_{as}(x - 2y - v) > t - \rho(z)\}.$$

Здесь $P\{\chi(2y) > z\} \leq c_1 b(z)$ и, по неравенству Чебышева,

$$P\{\eta(2y) < N\} \leq P\{\eta(2y) < N\} \leq P\{\zeta_1 + \dots + \zeta_{N-1} > 2y\} \leq \frac{E \zeta_1 \cdot N}{2y} \equiv \frac{bN}{2y}$$

(где $\{\zeta_n\}$ — последовательность н.о.р.с.в., распределенных как ζ).

Далее, пусть $\varepsilon = \rho_{y,N}$ и $l \geq 1$ — целое число. В соответствии с замечаниями 3.1 и 3.2, при $t - \rho(z) > l\varepsilon$, $v \leq z$ и $n \geq N$ справедливы п.н. неравенства

$$P\{\chi_{as}(x - 2y - v) > t - \rho(z)\} \leq P\{\chi(x + l\varepsilon) > t - \rho(z) - l\varepsilon \mid \eta(2y) = n, \chi(2y) \in (v, v + dv)\} + P\{\tilde{\eta}(2z) > l\} + l\varepsilon + P\{\min_{1 \leq i \leq l} X(n+i) < y \mid \eta(2y) = n, \chi(2y) \in (v, v + dv)\}.$$

По неравенству Колмогорова последнее слагаемое в правой части неравенства не превосходит $2bl/y$, и по неравенству Чебышева $P\{\tilde{\eta}(2z) > l\} \leq K(1 + 2z)/l$. Следовательно,

$$P\{\chi_{as}(\infty) > t\} - P\{\chi(x + l\varepsilon) > t - \rho(z) - l\varepsilon\} - \rho(z) - c_1 b(z) \leq \frac{bN}{2y} + \frac{2bl}{y} + \frac{K(1 + 2z)}{l} + l\varepsilon.$$

Возьмем $N \equiv N(y) = [y^{2/3}]$, $l = [\min(y, \varepsilon^{-1})]^{2/3}$ и $z \equiv z(y) = l^{1/2}$. Тогда (при $z \geq 1$) правая часть неравенства не превосходит

$$\frac{b}{2} y^{1/3} + 2by^{1/3} + \varepsilon^{1/3} + 3K\varepsilon^{1/3} \leq (3(K + b) + 1)z^{-1}.$$

Положим $Q(z) = c_1 b(z) + \rho(z) + (3(K+b) + 1)z^{-1}$. Тогда при $x = 2y + 2z(y)$, $t > Q(z)$

$$\mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t\} \leq \mathbf{P}\{\chi(x + l\varepsilon) > t - Q(z)\} + Q(z). \quad (3.10)$$

Заметим теперь, что если при фиксированных y и $z = z(y)$ взять любое $x \geq 2y + 2z(y)$, то неравенство (3.10) остается справедливым — достаточно положить $x = 2y' + 2z(y)$, где $y' \geq y$, и повторить вышеприведенные рассуждения.

Совершенно аналогично находится нижняя оценка

$$\mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t\} \geq \mathbf{P}\{\chi(x - l\varepsilon) > t + Q(z)\} - Q(z).$$

Замечая, что $l\varepsilon \leq 1$, получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим

$$c(x) = \inf_{t \in [0, U(x)]} g(x, t) \quad \text{и} \quad u(x) = \left(\frac{c(x)}{b + \Delta} \right)^{1/2}.$$

Пусть $\{\zeta(n)\}$ — последовательность н.о.р.с.в., распределенных как ζ . Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_g(x) < U(x)\} &\leq \mathbf{P}\{\exists n \leq u(x): X(n) > c(x)\} \\ &+ \mathbf{P}\{\exists n \in (u(x), U(x)): X(n) > (b + \Delta)n\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства не превосходит

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{i=1}^{u(x)} \zeta(i) > c(x) \right\} \leq \frac{bu(x)}{c(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

а второе —

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{n \geq u(x)} \frac{\zeta(1) + \dots + \zeta(n)}{n} > b + \Delta \right\} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Положим $U = U(x)$, $G(x, T) = \sup_{t \in [U, TU]} |g(x, t) - g(x, t + 1)|$ и $v(x) = U(b + \Delta + G(x, T)(T - 1))$. По неравенству Чебышева для любого $T > 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_g(x) > TU\} &\leq \mathbf{P}\{\eta(v(x)) > TU\} + \mathbf{P}\{\eta(v(x)) \leq U\} \\ &\leq \frac{K(1 + u(x))}{TU} + o(1) \rightarrow O\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные с.в. $\{\bar{X}(n)\}$, полагая $\bar{X}(n) = X(n)$ при $n \leq U$; $\bar{X}(n) = X(n) + g(x, n) - g(x, U)$ при $U < n \leq TU$ и $\bar{X}(n) = X(n) +$

$g(x, TU) - g(x, U)$ при $n > TU$. Обозначим $\bar{\xi}(n) = \bar{X}(n) - \bar{X}(n-1)$, $\bar{\eta}(y) = \min\{n: \bar{X}(n) > y\}$ и $\bar{\chi}(y) = \bar{X}(\bar{\eta}(y)) - y$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\chi_g(x) > t\} = \mathbf{P}\{\bar{\chi}(U(x)) > t\} + O\left(\frac{1}{T}\right) + o(1).$$

Отметим, что для последовательности $\{\bar{X}(n)\}$ имеет место неравенство $\bar{\rho}_{y,N} \equiv \sup_{v \geq y, m \geq N} \rho(\bar{\xi}(v, m), \xi) \leq G(x, T) + \rho_{y,N}$. Поэтому, в силу теоремы 2.6,

$$\rho(\bar{\chi}(U(x)), \chi_{as}(\infty)) = O\left(\frac{1}{T}\right) + o(1)$$

при любом фиксированном T . Теорема 2.3 доказана.

Доказательство следствия 2.3. Первое утверждение следствия вытекает из того, что выражение $\sup_{x>0} |\varphi(x) - x|$ конечно. Замечание 3.2 и условие (2.16) влекут второе утверждение.

Доказательство теоремы 2.4. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем число l такое, что $\mathbf{P}\{\sup_{n \geq l} |\gamma(n) - \gamma| > \varepsilon\} \leq \varepsilon$, а также число L , для которого $\mathbf{P}\{|\gamma| > L - \varepsilon\} \leq \varepsilon$ и $\mathbf{P}\{|X(l)| > L\} \leq \varepsilon$. Введем событие $A = \{\sup_{n \geq l} |\gamma(n) - \gamma| > \varepsilon\} \cup \{|\gamma| > L - \varepsilon\} \cup \{|X(l)| > L\}$. При $t > \varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi_{(\gamma)}(x) > t\} &\leq \mathbf{P}\{\eta_{(\gamma)}(x) \leq l\} + \mathbf{P}\{A\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{\chi_{(\gamma)}(x) > t; \mathbf{I}(A) = 0, \eta_{(\gamma)}(x) > l\}, \end{aligned}$$

где последнее слагаемое не превосходит выражения

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\chi^{(k)}(x - X(k) - \gamma(k)) > t - \varepsilon; \mathbf{I}(A) = 0\} \\ &\quad + \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{P}\{\chi^{(k)}(x - u - v) > t - \varepsilon\} \mathbf{P}\{X(k) \in du; \gamma(k) \in dv\}. \end{aligned}$$

При $|u| \leq L$ и $|v| \leq L$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\chi^{(k)}(x - u - v) > t - \varepsilon\} - \mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t - \varepsilon\} \\ &\leq \sup_k \sup_{y \geq x-2L} \rho(\chi^{(k)}(y), \chi_{as}(\infty)) \equiv q(x - 2L), \end{aligned}$$

где $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\chi_{(\gamma)}(x) > t\} \leq \mathbf{P}\{\eta_{(\gamma)}(x) \leq l\} + 3\varepsilon + q(x - 2L) + \mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t - \varepsilon\}.$$

Устремляя x к бесконечности, получаем неравенство

$$\limsup \mathbf{P}\{\chi_{(\gamma)}(x) > t\} \leq 3\varepsilon + \mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t - \varepsilon\}$$

при любых $\varepsilon > 0$ и $t > \varepsilon$. Совершенно аналогично можно получить и нижнюю оценку: $\liminf \mathbf{P}\{\chi_{(\gamma)}(x) > t\} \geq \mathbf{P}\{\chi_{as}(\infty) > t + \varepsilon\} - 3\varepsilon$.

Следовательно, $\limsup \rho(\chi_{(\gamma)}, \chi_{as}(\infty)) \leq 3\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, и имеет место утверждение (2.17).

Если с.в. $\tilde{\gamma}$ и ζ^2 интегрируемы, то с.в. $\chi_{(\gamma)}(x)$ интегрируемы равномерно по x , что влечет (2.18).

Доказательство теоремы 2.5. Возьмем $y \equiv y(x) = at_0(x) - x^{1/2}$. Тогда $\eta(y) < \eta_g(x)$ п.н. Для процесса восстановления $\eta(y)$, $y \geq 0$, справедлива центральная предельная теорема: распределения случайных величин $(\eta(y) - y/a)(\sigma y^{1/2} a^{-3/2})^{-1}$ слабо сходятся к стандартному нормальному распределению при $y \rightarrow \infty$. В частности, $P\{\eta(y) < y/a\}$ стремится к $1/2$ и, при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$, можно выбрать числа $0 < \delta \ll N < \infty$ так, что $P\{|\eta(y) - y/a| \leq \delta y^{1/2}\} \leq \varepsilon/4$ и $P\{|\eta(y) - y/a| \geq N y^{1/2}\} \leq \varepsilon/4$ при всех достаточно больших y . Возьмем $C \gg 1$ такое, что $P\{\chi(y) > C\} \leq \varepsilon/2$ при всех y . Тогда, с вероятностями, близкими к $\frac{1}{2}$, случайное блуждание пересекает либо линейную границу $x + \alpha_1 t$, либо линейную границу $at_0 + \alpha_2(t - t_0)$. Как хорошо известно, в обоих случаях величина перескока (через линейную границу) слабо сходится (при $x \rightarrow \infty$) к соответствующей величине перескока через бесконечно удаленный барьер.

3.2. Доказательство утверждений п. 2.2. Доказательство теоремы 2.6. Начнем с утверждения (2.19).

Предположим, что значение предела в (2.19) положительно. Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$, $t > 0$, последовательность распределений $\{F^{(m)}\}$ и числовая последовательность $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \rightarrow \infty$, такие, что

$$|P\{\chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)}) > t\} - P\{\chi^{(F^{(m)})}(\infty) > t\}| \geq 2\varepsilon. \quad (3.11)$$

Заметим, что семейство $\mathfrak{F}$ компактно: из любой последовательности $\{F^{(m)}\}$, принадлежащей $\mathfrak{F}$, можно выбрать подпоследовательность $\{F^{(m_k)}\}$, сходящуюся слабо — скажем, к распределению $F \in \mathfrak{F}$. Без ограничения общности можно предполагать, что первоначальная последовательность $\{F^{(m)}\}$ является сходящейся. Тогда с.в. $\chi^{(F^{(m)})}(\infty)$ слабо сходятся к $\chi^{(F)}(\infty)$. Так как с.в. $\chi^{(F)}(\infty)$ имеет непрерывное распределение, то из (3.11) следует, что $|P\{\chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)}) > t\} - P\{\chi^{(F)}(\infty) > t\}| \geq \varepsilon$ при всех достаточно больших m . Без ограничения общности можно считать, что это неравенство верно при всех m .

Для любого фиксированного $0 < \delta < t$ выберем число $y > \delta$ так, что $\rho(\chi^{(F)}(z), \chi^{(F)}(\infty)) \leq \delta$ при всех $z \geq y - \delta$.

По следствию 2.1 $\sup_{F \in \mathfrak{F}} \sup_x P\{\chi^{(F)}(x) > t\} \leq C_1 B(t)$. Поэтому можно выбрать постоянную $C > 0$ так, что $P\{\chi^{(F)}(x) > C\} \leq \delta$ при всех x и всех $F \in \mathfrak{F}$.

Положим $l = [K(y + C)/\delta] + 1$, где константа K определена в лемме 3.2. Для любой функции $F \in \mathfrak{F}$

$$\mathbf{P}\{\eta^{(F)}(y + C) > l\} \leq \frac{K(y + C)}{l} \leq \delta.$$

Наконец, возьмем $m_0 \equiv m_0(\delta)$ такое, что $x_{m_0} > y + C + \delta$ и $\rho(F^{(m)}, F) \leq \delta/l$ при любом $m \geq m_0$. При этом

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)}) > t\} \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)}) > t, \chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)} - y - C) \in (u, u + du)\} \\ &= O(\delta) + \int_0^C. \end{aligned}$$

Из замечаний 3.1–3.2 следует, что, равномерно по $0 < u \leq C$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(y + C - u) > t\} \\ &= \mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(y + C - u) > t, \eta^{(F^{(m)})}(y + C - u) \leq l\} + O(\delta) \\ &\leq \mathbf{P}\{\chi^{(F)}(y + \delta + C - u) > t - \delta\} + O(2\delta) \\ &\leq \mathbf{P}\{\chi^{(F)}(\infty) > t\} + O(3\delta). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(y + C - u) > t\} \geq \mathbf{P}\{\chi^{(F)}(\infty) > t\} - O(3\delta).$$

Тем самым,

$$\left| \mathbf{P}\{\chi^{(F^{(m)})}(x^{(m)}) > t\} - \mathbf{P}\{\chi^{(F)}(\infty) > t\} \right| \leq 5\delta$$

при любых $\delta > 0$ и $m \geq m_0(\delta)$. Последнее противоречит предположению (3.11). Утверждение (2.19) доказано.

Перейдем к доказательству (2.21). Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $S^{(F)}(n)$ — последовательность сумм н.о.р.с.в. с распределением F и

$$h^{(F)}(y, v) = \mathbf{E} \left(\sum_1^{\eta^{(F)}(v)} \mathbf{I}(S^{(F)}(n) \leq y) \right). \quad (3.12)$$

Отметим, что $h^{(F)}(y, v) \leq \mathbf{E} \eta^{(F)}(v)$ при любых $v \geq 0$ и y .

Лемма 3.4. Для любых функции $F \in \mathfrak{F}$ и чисел $v \geq 0$ и y

$$H^{(F)}(y, v) \leq h^{(F)}(y + v, v) \leq \mathbf{E} \eta^{(F)}(v).$$

В частности, $H^{(F)}(y, v) \leq K(1 + v)$, где постоянная K одна и та же для всех F и определяется равенством (2.8).

Доказательство. Зафиксируем функцию F и положим $H = H^{(F)}$, $h = h^{(F)}$, $\eta = \eta^{(F)}$, $\chi = \chi^{(F)}$. При $N = 1, 2, \dots$ обозначим

$$H^N(y) = \mathbf{E} \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{I}(S(n) \leq y) \right) \text{ и } h^N(y, v) = \mathbf{E} \left(\sum_1^{\min(N, \eta(v))} \mathbf{I}(S(n) \leq y) \right),$$

где $S(n)$ — последовательность сумм н.о.р.с.в. с распределением F . Тогда при любых фиксированных $v \geq 0$ и y последовательность разностей $H^N(y + v) - H^N(y)$ не убывает по N и $H(y, v) = \lim_{N \rightarrow \infty} (H^N(y + v) - H^N(y))$, а последовательность $\{h^N(y, v)\}$ монотонно возрастает по N и стремится к $h(y, v)$ при $N \rightarrow \infty$. При любом N имеют место соотношения

$$\begin{aligned} H^N(y) &= \int_{-\infty}^y dH^N(x) = \int_{-\infty}^y dx h^N(x, v) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{z=0}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{y-v-z} \mathbf{P}\{\chi(v) \in dz, \eta(v) = k\} dH^{N-k}(x) \\ &\leq h^N(y, v) + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{y-v-z} \mathbf{P}\{\chi(v) \in dz, \eta(v) < N\} dH^N(x) \\ &\leq h(y, v) + H^N(y - v). \end{aligned}$$

Следовательно, $H^N(y) - H^N(y - v) \leq h(y, v)$ при всех N и, тем самым, $H(y, v) \leq h(y + v, v) \leq \mathbf{E} \eta(v) \leq K(1 + v)$ при любых $v \geq 0$ и y .

Лемма 3.5. При выполнении условий (i), (ii)' и (iii) и при любом фиксированном $v \geq 0$ семейства случайных величин $\{\chi^{(F)}(v)\}_{F \in \mathfrak{F}}$ и $\{\eta^{(F)}(v)\}_{F \in \mathfrak{F}}$ равномерно по $F \in \mathfrak{F}$ интегрируемы.

Доказательство. Для любой фиксированной функции F из (3.4) и (3.5) следует оценка:

$$\mathbf{P}\{\chi(v) > x\} \leq \mathbf{P}\{\xi_1 > x\} \mathbf{E} \eta(v) \leq K(1 + v) \mathbf{P}\{\xi_1 > x\}.$$

Так как постоянная K одна и та же для всех функций F , то семейство $\{\chi^{(F)}(v)\}$ равномерно интегрируемо.

Покажем равномерную интегрируемость второго семейства. Как и в доказательстве первой части теоремы, нам достаточно показать равномерную интегрируемость последовательности $\{\eta^{(F^{(m)})}\}$, где $F^{(m)} \in \mathfrak{F}$ таковы, что $F^{(m)}$ сходятся слабо к F и $a(F^{(m)}) \rightarrow a(F)$.

Отметим, что

$$\mathbf{P}\{S^{(F)}(n) \neq y \forall n \leq \eta^{(F)}(y)\} = 1 \quad (3.13)$$

для всех y , за исключением, быть может, счетного числа. Выберем $y \geq v$, для которого (3.13) имеет место. Тогда $\chi^{(F^{(m)})}(y)$ сходятся слабо к $\chi^{(F)}(y)$, а $\eta^{(F^{(m)})}(y) \rightarrow \eta^{(F)}(y)$. Действительно, при любом фиксированном n

$$\begin{aligned} P\{\eta^{(F^{(m)})}(y) > n\} &= P\{S^{(F^{(m)})}(k) \leq y \forall k \leq n\} \\ &\rightarrow P\{S^{(F)}(k) \leq y \forall k \leq n\} = P\{\eta^{(F)}(y) > n\} \end{aligned}$$

и при любом $v \geq 0$

$$P\{\chi^{(F^{(m)})}(y) > v\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S^{(F^{(m)})}(n) > y + v, S^{(F^{(m)})}(k) \leq y \forall k < n\},$$

где каждое слагаемое последнего ряда сходится к нужному пределу и «хвосты» рядов равномерно ограничены по m .

Далее, $E\chi^{(F^{(m)})}(y) \rightarrow E\chi^{(F)}(y)$ в силу равномерной интегрируемости. Из представления $\chi(y) = S(\eta(y)) - y$ и тождества Вальда следует сходимость:

$$E\eta^{(F^{(m)})}(y) = \frac{E\chi^{(F^{(m)})}(y) + y}{a(F^{(m)})} \rightarrow \frac{E\chi^{(F)}(y) + y}{a(F)} = E\eta^{(F)}(y).$$

Хорошо известно, что если некоторая последовательность неотрицательных с.в. слабо сходится к предельной и средние также сходятся к конечному среднему предельной с.в., то эти с.в. равномерно интегрируемы. Это доказывает равномерную интегрируемость семейства $\{\eta^{(F^{(m)})}(y)\}$. Так как $0 \leq \eta^{(F^{(m)})}(v) \leq \eta^{(F^{(m)})}(y)$ п.н., то равномерно интегрируемо и семейство $\{\eta^{(F^{(m)})}(v)\}$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. При любом фиксированном $y > 0$, семейство с.в. $\{\eta^{(F)}(u + y) - \eta^{(F)}(u)\}$ равномерно интегрируемо по $F \in \mathfrak{F}$ и $u \geq 0$.

Действительно, так как $S^{(F)}(\eta^{(F)}(u)) = \chi^{(F)}(u) + u \geq u$ и $\eta^{(F)}(u)$ — марковский момент, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta^{(F)}(u + y) - \eta^{(F)}(u) = \min \{n \geq 0: S^{(F)}(n + \eta^{(F)}(u)) > u + y\} \\ &= \min \{n \geq 0: \chi^{(F)}(u) + \tilde{S}^{(F)}(n) > y\} \leq \min \{n \geq 0: \tilde{S}^{(F)}(n) > y\} \\ &\stackrel{d}{=} \eta^{(F)}(y), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{S}^{(F)}(0) = 0, \quad \tilde{S}^{(F)}(n) = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i^{(F)}, \quad \tilde{\xi}_i^{(F)} = \xi^{(F)}(i + \eta^{(F)}(u)), \quad (3.14)$$

$\{\tilde{\xi}_i^{(F)}\}$ образуют последовательность независимых с.в., распределенных как $\xi_1^{(F)}$ и не зависящих от $\chi^{(F)}(u)$. И так как семейство случайных

величин $\{\eta^{(F)}(y)\}$ равномерно по F интегрируемо, то этим свойством обладают и $\{\eta^{(F)}(u+y) - \eta^{(F)}(u)\}$. Следствие доказано.

Из последнего утверждения вытекает, что так как

$$\psi^{(F)}(u, y, v) \equiv \sum_{n=\eta^{(F)}(u)}^{\eta^{(F)}(u+y)-1} \mathbf{I}(S^{(F)}(n) \in (u, u+v]) \leq \eta^{(F)}(u+y) - \eta^{(F)}(u),$$

то при любых фиксированных $y, v \geq 0$ семейство с.в. $\{\psi^{(F)}(u, y, v)\}$ также равномерно интегрируемо по $F \in \mathfrak{F}$ и $u \geq 0$.

Следствие 3.2. Для любого фиксированного $v \geq 0$

$$h^{(F)}(y, v) \rightarrow 0$$

при $y \rightarrow -\infty$ равномерно по $F \in \mathfrak{F}$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдем $N \equiv N(\varepsilon)$ такое, что $\mathbf{E}(\eta^{(F)}(v) \mathbf{I}(\eta^{(F)}(v) \geq N)) \leq \varepsilon$ при всех F . Тогда

$$h^{(F)}(y, v) \leq \varepsilon + N \mathbf{P} \left\{ -\sum_{k=1}^N |\xi^{(F)}(k)| \leq y \right\} \leq \varepsilon + N^2 \frac{B(0)}{|y|} \rightarrow \varepsilon$$

при $y \rightarrow -\infty$. Следствие доказано.

При любых $y \geq v$ имеет место представление

$$\begin{aligned} H^{(F)}(u, v) &= \mathbf{E} \left(\sum_{n=\eta^{(F)}(u)}^{\infty} \mathbf{I}(S^{(F)}(n) \in (u, u+v]) \right) \\ &= \mathbf{E} \{ \psi^{(F)}(u, y, v) \} + \int_0^{\infty} \mathbf{P} \{ \chi^{(F)}(u+y) \in dz \} H^{(F)}(-y-z, v) \\ &\equiv E_1^{(F)}(u, y, v) + E_2^{(F)}(u, y, v), \end{aligned}$$

где при фиксированном v $0 \leq E_2^{(F)}(u, y, v) \leq \sup_{x \geq y} H^{(F)}(-x, v) \rightarrow 0$ равномерно по $F \in \mathfrak{F}$ при $y \rightarrow \infty$. Совершенно аналогично, если обозначить

$$\psi^{(F)}(\infty, y, v) = \sum_{n=0}^{\tilde{\eta}^{(F)}(y)-1} \mathbf{I}(\chi^{(F)}(\infty) + S^{(F)}(n) \in (0, v]),$$

где $\chi^{(F)}(\infty)$ не зависит от $\{\xi_n^{(F)}\}$ и $\tilde{\eta}^{(F)}(y) = \min\{n \geq 0: \chi^{(F)}(\infty) + S^{(F)}(n) > y\}$, то

$$\frac{v}{a(F)} = \lim_{u \rightarrow \infty} H^{(F)}(u, v) \equiv H^{(F)}(\infty, v) = \mathbf{E} \psi^{(F)}(\infty, y, v) + E_2^{(F)}(\infty, y, v),$$

где $0 \leq E_2^{(F)}(\infty, y, v) \leq \sup_{x \geq y} H^{(F)}(-x, v)$.

Перейдем собственно к доказательству (2.21). Нам достаточно показать, что если последовательность функций распределения $\{F^{(m)}\}$ и последовательность чисел $u^{(m)} \rightarrow \infty$ выбраны так, что $\{F^{(m)}\}$ слабо

сходится к $F \equiv F^{(\infty)}$, то предел $\lim_{m \rightarrow \infty} H^{(F^{(m)})}(u^{(m)}, v)$ существует и совпадает с $v/a(F)$.

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем $y = y(\varepsilon)$ такое, что $H^{(F)}(-x, v) \leq \varepsilon$ при всех $x \geq y$ и $F \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$\left| H^{(F^{(m)})}(u^{(m)}, v) - \frac{v}{a(F)} \right| \leq |E \psi^{(F^{(m)})}(u^{(m)}, y, v) - E \psi^{(F)}(\infty, y, v)| + 2\varepsilon.$$

Как было доказано в первой части теоремы, с.в. $\chi^{(F^{(m)})}(u^{(m)})$ сходятся слабо к с.в. $\chi^{(F)}(\infty)$, имеющей непрерывное распределение. Поэтому при каждом $n = 1, 2, \dots$

— с.в. $I(\chi^{(F^{(m)})}(u^{(m)} + \tilde{S}^{(F^{(m)})}(n)) \in (0, v])$ сходятся слабо к $I(\chi^{(F)}(\infty) + S^{(F)}(n) \in (0, v])$;

— с.в. $(\eta^{(F^{(m)})}(u^{(m)} + y) - \eta^{(F^{(m)})}(u^{(m)}))$ сходятся к $\tilde{\eta}^{(F)}(y)$ и

— с.в. $\psi^{(F^{(m)})}(u^{(m)}, y, v)$ сходятся к $\psi^{(F)}(\infty, y, v)$.

И так как последние с.в. равномерно интегрируемы, то и средние $E \psi^{(F^{(m)})}(u^{(m)}, y, v)$ сходятся к $E \psi^{(F)}(\infty, y, v)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение (2.21) имеет место. Теорема доказана.

Доказательства теорем 2.7 и 2.8 отличаются от доказательства теоремы 2.6 лишь незначительными модификациями, поэтому мы их опускаем.

3.3. Доказательство теоремы 2.9.

Лемма 3.6. Для $\eta \equiv \eta(x)$

$$E \eta = \frac{x}{a}, \quad E \eta < \frac{x}{a} + u(x), \quad E(\eta - E \eta)^2 < cx.$$

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Последнее известно для прямолинейных границ $h(t) = \varepsilon t$ и $\theta(n) \equiv 0$ (и при замене $< cx$ на $\approx (\sigma^2/a^3)x$).

Если $\theta(n) \rightarrow \theta$, $E(\theta(n))^2 < c < \infty$, то стандартные рассуждения о сходимости $\eta(x)$ (для прямолинейных границ) к нормальному распределению вместе с двумя моментами не претерпят никаких существенных изменений. То же относится к равномерности этой сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поэтому будем считать, что

$$E(\eta - E \eta)^2 < cx \tag{3.15}$$

при $x \gg 1$ для $\theta(n) \rightarrow \theta$ и любой прямолинейной границы $h(t) = \varepsilon t$. Для произвольных границ h имеем

$$\begin{aligned} E(\eta - E \eta)^2 &= E((\eta - E \eta)^2 I(\eta > E \eta)) + E((\eta - E \eta)^2 I(\eta \leq E \eta)) \\ &\leq E((\eta_{\text{касат}} - E \eta)^2 I(\eta > E \eta)) + E((\eta_{\text{хорды}} - E \eta)^2 I(\eta \leq E \eta)), \end{aligned}$$

где $\eta_{\text{касат}}$ и $\eta_{\text{хорды}}$ — моменты пересечения прямолинейных границ $g_{\text{касат}}(x, t) = x + h(E) + (t - E)h'(E)$ и $g_{\text{хорды}}(x, t) = x + th(E)/E$ соответственно. Но значения $E\eta_{\text{касат}}$ и $E\eta_{\text{хорды}}$ известны и равны $E\eta + C_1$, $E\eta + C_2$, соответственно (при некоторых постоянных C_1, C_2). Поэтому $E(\eta - E\eta)^2 \leq E(\eta_{\text{касат}} - E\eta_{\text{касат}} - C_1)^2 + E(\eta_{\text{хорды}} - E\eta_{\text{хорды}} - C_2)^2 < cx$ при $x \gg 1$, в силу (3.15).

Перейдем собственно к доказательству теоремы. Отметим, что последовательность $S(n)$ образует мартингал. Поэтому $ES(\eta) = aE\eta \equiv aE$. Так как $S(\eta) = X(\eta) - \theta + o(1) = x + h(\eta) + \chi - \theta + o(1)$, то $aE = x + Eh(\eta) + d + o(1)$ и, в силу условия (g3),

$$Eh(\eta) = Eh(E + (\eta - E)) = h(E) + \frac{E(\eta - E)^2}{2E^2} h(E) Ec(E, \eta - E),$$

где в последнем слагаемом первый сомножитель имеет порядок $(x/x^2)x^\alpha = x^{\alpha-1} \rightarrow 0$, а второй сомножитель ограничен. Поэтому $Eg(\eta) = g(E) + o(1)$, и мы получаем для E уравнение $aE = x + h(E) + d + o(1)$. Непрерывность решения по $o(1)$ очевидна. Теорема доказана.

В заключение мы хотим поблагодарить наших коллег А. А. Могульского и Д. А. Коршунова за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alsmeyer G., Irlle A. Asymptotic expansions for the variance of stopping times in nonlinear renewal theory. — Stochastic Process. Appl., 1986, v. 23, p. 235–258.
2. Walk H. Nonlinear renewal theory under growth conditions. — Stochastic Process. Appl., 1989, v. 32, p. 289–303.
3. Woodroffe M. A renewal theorem for curved boundaries and moments of first passage times. — Ann. Probab., 1976, v. 4, p. 67–80.
4. Woodroffe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia: SIAM, 1982. 119 p.
5. Woodroffe M., Keener R. Asymptotic expansions in boundary crossing problems. — Ann. Probab., 1987, v. 15, p. 102–114.
6. Zhang C.-H. A nonlinear renewal theory. — Ann Probab., 1988, v. 16, p. 793–824.
7. Боровков А. А. Теория вероятностей. Москва/Новосибирск: УРСС/Наука, 1998.
8. Wang M., Woodroffe M. A uniform renewal theorem. — Sequential Anal., 1996, v. 15, p. 21–36.
9. Боровков А. А. Асимптотически оптимальные решения в задаче о разладке. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 625–654.

Поступила в редакцию
12.X.1998