Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Валкейла, А. В. Мельников, Мартингальные модели стохастической аппроксимации и их сходимость, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 278–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:35:56

© 1999 г. ВАЛКЕЙЛА Э.*, МЕЛЬНИКОВ А. В.**

МАРТИНГАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ
АППРОКСИМАЦИИ И ИХ СХОДИМОСТЬ¹⁾

Изучаются процедуры стохастической аппроксимации с точки зрения общей теории случайных процессов. Едиными методами получены результаты о сходимости как в случае дискретного, так и в случае непрерывного времени. Асимптотический анализ (сходимость почти наверное, асимптотическая нормальность) процедур основывается на стохастическом методе Ляпунова, а изучение скорости сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации — на законе повторного логарифма для мартингалов.

Ключевые слова и фразы: стохастическая аппроксимация, мартингальные методы, стохастические экспоненты, стохастический метод Ляпунова.

1. Введение

С появлением в 1951 г. знаменитой работы Роббинса и Монро, внесшей в классический метод касательных Ньютона «стохастическую компоненту», в теорию вероятностей и ее приложения прочно вошла *стохастическая аппроксимация*.

Главное в исследовании процедур стохастической аппроксимации — это различные виды их устойчивости («по вероятности», «почти наверное», «по распределению»). В идейном плане источником многих работ был, в сущности, метод Ляпунова, а используемая техника базировалась на теории диффузионных (марковских) процессов, их связях с дифференциальными уравнениями (непрерывные модели) и теоремах типа центральной предельной теоремы, закона больших чисел (дискретные модели).

* Department of Mathematics, P. O. BOX 4, FIN-00014 University of Helsinki, Finland; e-mail: Esko.Valkeila@Helsinki.Fi

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия; e-mail: melnikov@mi.ras.ru

¹⁾ Первый автор поддержан Research Grants Committee of the University of Helsinki; второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 96-15-96033, № 96-01-01929, INTAS-RFBR, грант № 95-0061.

Адекватный итог таких 20-летних исследований был подведен, на наш взгляд, монографией Невельсона и Хасьминского [15]. Уже в этой книге, где диффузионные и дискретные модели стохастической аппроксимации изучаются отдельно, видна принципиальная общность используемых методов. Более внимательный анализ и этой книги и огромного числа других публикаций (упомянем хорошо известные книги Кушнера, Цыпкина и др.) приводит к выводу о том, что в обоих типах моделей в основе изучения устойчивости лежат *мартингальные предельные теоремы сходимости*, а основным техническим средством является *формула Колмогорова–Ито*.

Развитие стохастического исчисления в 70–80-е годы дало прекрасную технику для введения и детального изучения асимптотических свойств моделей стохастической аппроксимации, «не различающих» непрерывного и дискретного времени. Именно эти обстоятельства определяют тематику данной работы и ее место в существенно разросшейся области под названием *стохастическая аппроксимация*.

1. Рассмотрим следующее уравнение

$$R(x) = 0, \quad (1.1)$$

где R — непрерывная функция на вещественной прямой, $R: \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^1$.

Допустим, что уравнение (1.1) имеет *единственное решение* x^* . На протяжении всей статьи считаем, что функция R удовлетворяет следующему условию:

R.0 Для всех $x \neq x^*$ выполнено неравенство $(x - x^*)R(x) > 0$.

Если мы точно знаем функцию R , то можно либо решить уравнение (1.1), либо, по крайней мере, дать его численное приближение. Например, если функция R непрерывно дифференцируема, можно использовать для этих целей метод Ньютона (см., например, [20, с. 209]).

Но часто мы не знаем функцию R полностью, и, более того, наши наблюдения значений функции R содержат ошибки. Это нередко случается в задачах математической статистики (регрессионный анализ, рекурсивное оценивание и т.д.), когда уравнение (1.1) решается с помощью стохастической аппроксимации, так называемым *методом Роббинса–Монро* (см. [5, с. 238–252] или [15]). Развитие указанного метода приводит к следующей общей процедуре решения уравнения (1.1):

$$\theta_t = \theta_0 - \int_0^t R(\theta_{s-}) \gamma_s da_s - \int_0^t \gamma_s dm_s, \quad (1.2)$$

где a — предсказуемый возрастающий процесс, γ — положительный предсказуемый процесс и m — локально квадратично интегрируемый мартингал.

Прежде всего опишем содержание статьи, а затем охарактеризуем спектр работ, примыкающих к рассматриваемой тематике.

В следующем разделе показывается, что при определенных допущениях на γ и m процедура сходится почти наверное к решению x^* . Там рассматривается как сходимость *стандартной* процедуры, где $\gamma = (1 + a_-)^{-1}$, так и сходимость процедуры с *медленно меняющимися весами*, где $\gamma = (1 + a_-)^{-r}$ с $0 < r < 1$. Доказательство основывается на двух фактах: на подходящем для уравнения (1.2) варианте стохастического метода Ляпунова и на модификации результатов о сходимости положительных семимартингалов из [10] и [21]. Развиваемый метод дает также и первое представление о скорости сходимости рассматриваемой аппроксимации.

В третьем разделе доказывается *асимптотическая нормальность* стандартной процедуры и процедуры с медленно меняющимися весами в предположении детерминированности a и γ . Доказательство асимптотической нормальности основано на модифицированной для изучаемого случая центральной предельной теореме для квадратично интегрируемых мартингалов.

В четвертом разделе рассматриваются процедуры стохастической аппроксимации с *усреднением*. Там доказывается сходимость (п.н.) процедуры с усреднением и изучается асимптотическая нормальность.

В пятом разделе изучается точное асимптотическое поведение траекторий процедуры (1.2). Метод, предложенный впервые для дискретной модели Гапошкиным и Красулиной [24], базируется на *законе повторного логарифма* для локально квадратично интегрируемых мартингалов.

В последнем, шестом, разделе приводятся необходимые примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

На протяжении всей статьи используются *стохастические экспоненты*, определенные для возрастающей функции. В связи с этим все необходимые сведения и ряд привлекательных свойств этих экспонент, не отраженных пока в достаточной степени в литературе, вынесены в приложение А.

2. Стохастические аппроксимационные алгоритмы как сильные решения стохастических дифференциальных уравнений для семимартингалов и техника стохастических экспонент для изучения их сходимости предложены Мельниковым [12] и получили дальнейшее развитие в [13], [14] и целом ряде других работ. Ле Бретон и Новиков [8], [9] изучали стохастическую аппроксимацию в случае, когда функция R линейна, в специальном случае с гауссовскими ошибками (сходимость п.н., асимптотическая нормальность, закон повторного логарифма). Детальный анализ нелинейной модели (1.2) с гауссовскими ошибками дан в [13].

В этой статье мы требуем только, чтобы мартингал m в модели (1.2) был квадратично интегрируемым, и прежде всего в этом состоит вклад данной работы по сравнению с [12]–[14]. Характерным здесь, как

и в [12]–[14], является систематическое использование стохастических экспонент как технического средства, имеющего самостоятельный интерес. Отметим также статью [23], в которой исследуется сходимость (п.н.) несколько более общей процедуры в сравнении с (1.2).

2. Сходимость алгоритма

2.1. Основные определения. 1. Предположим, что все процессы непрерывны справа и имеют пределы слева.

Ниже будут использоваться следующие обозначения: когда f непрерывна справа и имеет левые пределы (т.е. càdlàg), положим $f_{u-} = \lim_{s \uparrow u}$ и скачок функции f обозначим через $\Delta f_t = f_t - f_{t-}$.

Пусть k — неотрицательная функция со свойствами $k_s \Delta a_s < 1$ для всех $s \geq 0$, положим $(k \cdot a)_t = \int_0^t k_s da_s$, где интеграл есть обычный интеграл Лебега–Стилтьеса.

Напомним (см. [10]), что единственное решение линейного дифференциального уравнения

$$dY_t = -Y_{t-} k_t da_t, \quad Y_0 = 1,$$

дается «экспонентой»

$$\mathcal{E}_t(-k \cdot a) = e^{(-k \cdot a)_t} \prod_{s \leq t} (1 - k_s \Delta a_s) e^{k_s \Delta a_s}. \quad (2.1)$$

2. Приведем несколько фактов, требующихся для понимания уравнения (1.2). Для этого потребуется несколько определений и утверждений из общей теории стохастических процессов (более детально см. [7] и [10]).

Зафиксируем стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Напомним, что предсказуемые процессы измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{P}$, образованной всеми непрерывными слева процессами, определенными на базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Если m — локально квадратично интегрируемый мартингал, обозначим $\langle m, m \rangle$ предсказуемый процесс ограниченной вариации, являющийся компенсатором m^2 в том смысле, что процесс $m^2 - \langle m, m \rangle$ есть локальный мартингал. Если h — предсказуемый процесс с $h^2 \cdot \langle m, m \rangle_\infty < \infty$ (P-п.н.), то $h \cdot m$ — стохастический интеграл, который также является локально квадратично интегрируемым мартингалом. Если m — локальный мартингал, обозначим через m^c непрерывную мартингальную часть m , а через m^d — его чисто разрывную составляющую. Определим «скобку» m как $[m, m]_t = \langle m^c, m^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta m_s)^2$. Если m — локально квадратично интегрируемый мартингал, то $[m, m] - \langle m, m \rangle$ есть локальный мартингал. Наконец, X есть семимартингал, если $X = X_0 + A + M$, где A — процесс с локально ограниченной вариацией и M — локальный мартингал. При

этом семимартингал X называется специальным семимартингалом, если $X = X_0 + A + M$, где A — предсказуемый процесс.

Пусть a с $a_0 = 0$ — предсказуемый возрастающий процесс, γ — положительный предсказуемый процесс и m — локально квадратично интегрируемый мартингал.

Общая процедура стохастической аппроксимации — это единственное сильное решение следующего стохастического дифференциального уравнения относительно специального семимартингала $a + m$:

$$\theta_t = \theta_0 - \int_0^t R(\theta_{s-}) \gamma_s da_s - \int_0^t \gamma_s dm_s.$$

2.2. Сходимость процедуры стохастической аппроксимации. 1. Пусть выполнены два следующих предположения.

R.1 Функции k и a таковы, что $0 < \mathcal{E}_t(-k \cdot a) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

R.2.T Функция R удовлетворяет для всех $t \geq T$, $x \in \mathbf{R}$, где $T \geq 0$, условию

$$k_t(x - x^*)^2 + \gamma_t^2 \Delta a_t R^2(x) \leq 2\gamma_t(x - x^*) R(x).$$

Процедура $\theta = \theta(\gamma, a)$ зависит от предсказуемых процессов γ и a . Будем называть квадратично интегрируемый мартингал m *шумом* процедуры $\theta(\gamma, a)$, процесс k из условий **R.1** и **R.2.T** — *управляющим параметром Ляпунова* процедуры $\theta(\gamma, a)$.

Как существует множество процедур стохастической аппроксимации для задачи « $R(x) = 0$ », так существует много управляющих параметров Ляпунова для данной аппроксимационной процедуры $\theta(\gamma, a)$.

В дополнение к условиям **R.1** и **R.2.T** необходимо следующее условие на уровень шума:

M Локально квадратично интегрируемый мартингал m таков, что

$$\int_0^\infty (\mathcal{E}_s(-k \cdot a))^{-1} \gamma_s^2 d\langle m, m \rangle_s < \infty.$$

Если X — случайный процесс, обозначим через $\{X \rightarrow\}$ множество тех ω , где $X_t(\omega)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$.

Условия **R.1**, **R.2.T** и **M** по предположению имеют место почти наверное относительно меры P . Пусть также T есть конечный предсказуемый момент останова.

2. Следующая теорема практически есть переформулировка теоремы 3.1 в [14, с. 190], где условие **R.2.0** использовалось вместо более естественного **R.2.T**. Приведем поэтому кратко основные шаги доказательства.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия **R.0**, **R.1**, **R.2.T** и **M**. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\theta_t \rightarrow x^* \quad \text{н.н.} \quad (2.2)$$

Кроме того, для почти всех $\omega \in \Omega$ и всех $t \geq 0$

$$(\theta_t - x^*)^2 \leq C(\omega) \mathcal{E}_t(-k \cdot a) \quad (2.3)$$

(см. доказательство для уточнения константы C).

Доказательство. Применим формулу Ито к $Z_t := (\mathcal{E}_t(-k \cdot a))^{-1}(\theta_t - x^*)^2$ и получим

$$Z_t = (\theta_0 - x^*)^2 + A_t + B_t + M_t, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t (\mathcal{E}_s(-k \cdot a))^{-1} \gamma_s^2 d\langle m, m \rangle_s, \\ B_t &= \int_0^t (\mathcal{E}_s(-k \cdot a))^{-1} (k_s(\theta_{s-} - x^*)^2 + \Delta a_s \gamma_s^2 R^2(\theta_{s-}) \\ &\quad - 2\gamma_s(\theta_{s-} - x^*)R(\theta_{s-})) da_s. \end{aligned}$$

Не будем уточнять вид локального мартингала M (см. [14, с. 189]) в формуле (2.4).

Перед тем как продолжить изложение, рассмотрим лемму, касающуюся свойств сходимости неотрицательных семимартингалов, которая является некоторой модификацией результата Спрэя (см. [21, с. 245], [18] и [10, с. 115], где излагаются первые общие результаты данного типа). В этой связи полезно упомянуть статью [23], в которой общий результат Спрэя доказан методом, предложенным в монографии [21].

Лемма 2.1. *Предположим, что специальный семимартингал X обладает следующими свойствами:*

- (i) $X_t \geq 0$ для всех $t \geq 0$;
- (ii) $X_t = X_0 + A_t - B_t + M_t$, где A — неотрицательный предсказуемый возрастающий процесс, B — предсказуемый процесс с ограниченной вариацией такой, что существует конечный предсказуемый момент остановки T такой, что $B_t \geq B_s \geq B_T$ для всех $t \geq s \geq T$, т.е. B — возрастает после T , и M — локальный мартингал.

Тогда (п.н.)

$$\{A_\infty < \infty\} \subset \{X \rightarrow, B \rightarrow\}. \quad (2.5)$$

Доказательство очевидно: процесс $X - A$ является супермартингалом, ограниченным снизу после момента T и, следовательно, сходится почти наверное.

Используя условие **R.2.T** в (2.4), видим, что положительный семимартингал удовлетворяет (ii). Из условия **M** вытекает, что положительный семимартингал Z сходится почти наверное. Поскольку положительный семимартингал Z сходится, то $Z_\infty^* := \sup_t |Z|_t < \infty$. Следовательно, мы получили (2.3) с $C = Z_\infty^*$ и из условия **R.1** вытекает (2.2). Теорема 2.1 доказана.

2.3. Сходимость стандартной процедуры и процедуры с «медленно меняющимися весами». 1. Рассмотрим стандартную процедуру, т.е. случай, когда $\gamma = (1 + a_-)^{-1}$. Введем следующие дополнительные условия на функцию R .

Р.3 Функция R удовлетворяет условию $R(x) = \beta(x - x^*) + U(x - x^*)$, где $U(y) = O(y^2)$ при $y \rightarrow 0$.

Дополнительно предположим, что процедура $\theta(\gamma, a)$ имеет следующую специальную структуру:

— вес γ имеет вид: $\gamma = \alpha/(1 + a_-)$, где $\alpha > 0$ — «свободная» константа;

— управляющий параметр Ляпунова k имеет вид: $k = \beta\gamma$, т.е. $(k \cdot a)_t = \int_0^t \alpha\beta/(1 + a_{s-}) da_s$, где константа β находится из **Р.3**;

— константы α, β таковы, что

$$\alpha\beta < 1 < 2\alpha\beta, \quad (2.6)$$

и вместе с a удовлетворяют условию $\alpha\beta\Delta a/(1 + a_-) < 1$.

Обычно, $a_t = t$ или $a_t = [t]$, но это требование не обязательно в данном случае.

Ниже мы полагаем, что

$$a_\infty = \infty \quad \text{и} \quad [\gamma \cdot a, \gamma \cdot a]_\infty < \infty. \quad (2.7)$$

Далее имеем, что (см. приложение А для более детальной информации)

$$\mathcal{E}_t(-\beta\gamma \cdot a) = (1 + a_t)^{-\alpha\beta} \pi_t(-\alpha\beta),$$

где $\pi_t(\delta) = \prod_{s \leq t} (1 + \delta \Delta v_s)/(1 + \Delta v_s)^\delta$ и $v = (1 + a_-)^{-1} \cdot a$. Так как $\alpha\beta\Delta v < 1$, то $0 < \pi_\infty(-\alpha\beta) < \infty$. Ниже будем использовать запись $\mathcal{E}(-\beta\gamma \cdot a) = \mathcal{E}(-\alpha\beta)$. Изучим сходимость процедуры $\theta(\gamma, \alpha)$. Из условия (2.7) получаем **Р.1**. Предположим, что после некоторого фиксированного момента t_0 выполнено следующее неравенство:

$$\beta(x - x^*)^2 + \frac{\alpha}{1 + a_{t-}} \Delta a_t R^2(x) \leq 2R(x)(x - x^*) \quad (2.8)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. условие **Р.2.Т** выполнено. Поскольку $a_\infty = \infty$, то это незначительное ограничение на «свободную» константу α .

Вместо условия **М** предположим, что возрастающий процесс $\langle m, m \rangle$ абсолютно непрерывен относительно возрастающей функции a и

$$0 < \sigma_t^2 \leq C < \infty \quad (2.9)$$

с $\sigma_t^2 := d\langle m, m \rangle_t / (da_t)$. Далее, ввиду (2.6) и результатов из приложения

$$\int_0^\infty (\mathcal{E}_t(\alpha\beta))^{-1} \gamma_t^2 d\langle m, m \rangle_t \leq C(\alpha, \beta, a) \int_0^\infty (1 + a_{t-})^{\alpha\beta-2} da_t < \infty,$$

и мы получаем условие М. Итак, доказана следующая теорема для стандартной процедуры.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (2.6), (2.7), (2.9), (2.8) после некоторого t_0 и **Р.3**. Стандартная процедура сходится почти наверное, и для всех t и почти всех ω

$$|\theta_t - x^*| \leq C(\omega)(1 + a_t)^{-\alpha\beta/2}.$$

2. Рассмотрим процедуру с «медленно изменяющимися весами», т.е. случай $\gamma = (1 + a_-)^{-r}$ с некоторым $0 < r < 1$.

Пусть $\gamma(r) = \alpha(1 + a_-)^{-r}$, а функция R удовлетворяет **Р.0** и **Р.3**. Выбираем управляющий параметр Ляпунова $k = -\alpha\beta(1 + a_-)^{-1}$. Допустим, что выполнено **Р.2.Т**, т.е.

$$\frac{\alpha\beta}{1 + a_{t-}}(x - x^*)^2 + R^2(x) \frac{\Delta a_t}{(1 + a_{t-})^{2r}} \leq \frac{2(x - x^*)R(x)}{(1 + a_{t-})^r} \quad (2.10)$$

после некоторого фиксированного $t_0 > 0$. Заметим, что это ослабляет допущение на функцию R , если взять параметр r достаточно малым. Пусть, как и выше, мартингал m таков, что $\langle m, m \rangle = \sigma^2 \cdot a$, где $\sigma_t^2 \leq C < \infty$ для всех $t \geq 0$. Допустим, что «свободные» параметры α, r вместе с β удовлетворяют неравенству

$$1 - \frac{r}{2} < \alpha\beta < 2r - 1. \quad (2.11)$$

Так как $\mathcal{E}_t(-\alpha\beta) = (1 + a_t)^{-\alpha\beta} \pi_t(-\alpha\beta)$, то используя указанное выше допущение на α и r в (2.11), получаем, что $\int_0^\infty (\mathcal{E}_t(-\alpha\beta))^{-1} (1 + a_{t-})^{2r} da_t < \infty$. Итак, условие М выполнено, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть выполнены (2.7), (2.10) после некоторого t_0 , (2.11), (2.9) и **Р.3**. Тогда процедура с «медленно меняющимися весами» сходится (п.н.) со скоростью

$$|\theta_t - x^*| \leq C(\omega)(1 + a_t)^{-\alpha\beta/2}.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Скорость сходимости в теореме 2.3 зависит также от r через ограничение (2.11).

3. Асимптотическая нормальность

В этом разделе изучается асимптотическая нормальность стандартной процедуры и процедуры с «медленно меняющимися весами». Предполагается, что возрастающий процесс a детерминирован, и, следовательно, γ и $\gamma(r)$ также детерминированы.

3.1. Асимптотическая нормальность стандартной процедуры. 1. Начнем с описания асимптотической нормальности процедуры (1.2).

Чтобы доказать асимптотическую нормальность, предположим, что

$$\sigma_t^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad (3.1)$$

где $\sigma^2 > 0$ — константа и $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности.

Положим $g_s^t(\alpha; a) = (1 + a_t)^{\alpha-1/2} (1 + a_{s \wedge t})^{1-\alpha}$, где $s, t \geq 0$. Заметим, что $\lim_t g_s^t(\alpha\beta; a) = \infty$ и $g_s^t(\alpha\beta; a)$ возрастает по s . Определим процесс $L(\varepsilon, g^t(\alpha\beta; a))$ формулой

$$L_t(\varepsilon, g^t(\alpha\beta; a)) = \int_0^t (g_s^t(\alpha\beta; a))^{-2} \int_{\{|x| > \varepsilon g_s^t(\alpha\beta; a)\}} x^2 \nu^m(ds, dx).$$

Пусть скачки шума m удовлетворяют следующему условию Линдберга:

$L(L(\varepsilon, g^t(\alpha\beta; a)))_t \xrightarrow{P} 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и при $t \rightarrow \infty$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполнено (3.1), (2.6), (2.7), (2.9), (2.8) после некоторого t_0 , **R.3** и **L**. Тогда

$$(1 + a_t)^{1/2}(\theta_t - x^*) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1}\right), \quad (3.2)$$

где $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению и $N(\mu, \sigma^2)$ — нормальная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 .

2. Прежде всего, дадим описание способа, который используется для доказательства теоремы.

Положим $h_t = \mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta)$. Напомним, что $\mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) = (1 + a_t)^{1/2}(\pi_t(-\alpha\beta))^{-1/(2\alpha\beta)}$. Запишем нормированное отклонение в следующей форме:

$$Y_t = h_t(\theta_t - x^*) = f_t(\theta_0 - x^*) + f_t M_t + f_t A_t$$

с $f_t = \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta)$. Здесь M — локально квадратично интегрируемый мартингал и A — предсказуемый процесс. Заметим, что $f_t = (1 + a_t)^{1/2-1/(2\alpha\beta)}(\pi_t(-\alpha\beta))^{1-1/(2\alpha\beta)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Фиксируем t и определим процесс $Y(t, s)$ как

$$Y(t, s) = f_t(\theta_0 - x^*) + f_t M_s^t + f_t A_s^t. \quad (3.3)$$

Здесь X^t — остановленный процесс: $X_s^t = X_{s \wedge t}$. Функция f — детерминированная, и, следовательно, процесс $s \mapsto f_t M_s^t$ — квадратично интегрируемый мартингал и $s \mapsto f_t A_s^t$ — предсказуемый процесс.

Рассмотрим теперь последовательность (t_n) с $t_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Мы хотим показать, что $Y_{t_n} \xrightarrow{d} N(0, C^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $Y_{t_n} = Y(t_n, t_n)$, то достаточно доказать, что $Y(t_n, t_n) \xrightarrow{d} N(0, C^2)$.

Наконец, делая замену времени $t \mapsto t/t_n$, получаем последовательность специальных семимартингалов на интервале $[0, 1]$, определенную как

$$Y_u^n = Y_0^n + M_u^n + A_u^n,$$

где $Y_0^n = f_{t_n}(\theta_0 - x^*)$, $A_u^n = f_{t_n} A_{ut_n}^{t_n}$ и $M_u^n = M_{ut_n}^{t_n}$. Здесь фильтрация определяется как $F_u^n = F_{ut_n}$. Очевидно, что $Y_1^n = Y_{t_n}$ и для доказательства асимптотической нормальности Y_{t_n} достаточно установить, что $Y_0^n \xrightarrow{P} 0$, $A_1^n \xrightarrow{P} 0$ и $M_1^n \xrightarrow{d} N(0, C^2)$. Из этих фактов вытекает сходимость (3.2).

3. Начнем с доказательства теоремы 3.1. Далее мы будем часто использовать следующую простую лемму, которая легко доказывается с помощью интегрирования по частям с использованием (1.2) и того факта, что

$$(\mathcal{E}_t(-\alpha\beta))^{-1} = 1 + \beta \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta))^{-1} \gamma_s da_s.$$

Лемма 3.1. Пусть функция R удовлетворяет условию **R.3**. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_t(-\alpha\beta))^{-1}(\theta_t - x^*) &= \theta_0 - x^* - \int_0^t \gamma_s U(\theta_{s-}) (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta))^{-1} da_s \\ &\quad - \int_0^t \gamma_s (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta))^{-1} dm_s. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для простоты допустим, что $x^* = 0$. Изучим асимптотическую нормальность выражения

$$\mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \theta_t. \quad (3.5)$$

Умножим θ_t на $\mathcal{E}_t^{-1}(\alpha\beta)$, воспользуемся леммой 3.1, умножим результат на $\mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta)$ и получим следующее равенство:

$$\mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \theta_t = A_0(t) - A_t - V_t, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \theta_0, \\ A_t &= \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) U(\theta_{s-}) \gamma_s da_s, \\ V_t &= \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) \gamma_s dm_s. \end{aligned}$$

По предположению (2.6) $1 - 1/(2\alpha\beta) > 0$, и, следовательно, с использованием (2.7) имеем, что

$$A_0(t) = \left((1 + a_t)^{-\alpha\beta} \pi_t(-\alpha\beta) \right)^{1-1/(2\alpha\beta)} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Следующий шаг состоит в доказательстве сходимости $A_t \rightarrow 0$ (п.н.) при $t \rightarrow \infty$. Напомним, что $Z_t = (\theta_t - x^*)^2 (\mathcal{E}_t(-\alpha\beta))^{-1}$ и $Z_\infty^* < \infty$.

Лемма 3.2 (см. [15, с. 142] и [14, Лемма 3.1, с. 191]). Пусть выполнены условия **R.0**, **R.1**, **R.2.T** и **M**. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует детерминированный момент времени $T = T(\varepsilon, \delta)$ такой, что

$$\mathbf{P}\left\{\omega: \sup_{t \geq T} \theta^2 < \delta\right\} \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.8)$$

Доказательство. Очевидно, что $\sup_{t \geq T} \theta_t^2 \leq \mathcal{E}_T(-\alpha\beta) Z_\infty^*$. Случайная величина Z_∞^* ограничена (п.н.), и из условия **R.1** вытекает, что $\mathcal{E}_t(-\alpha\beta) \rightarrow 0$. Следовательно, так как $\beta\gamma \cdot a$ — детерминированная функция, мы можем найти такое число $T := T(\delta)$, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq T} \theta^2 \geq \delta\right\} \leq \mathbf{P}\{Z_\infty^2 \geq \delta \mathcal{E}_T^{-1}(-\alpha\beta)\} < \varepsilon,$$

т.е. получаем (3.8).

Воспользуемся леммой 3.2 и найдем $\delta > 0$ такое, что $|U(x)| \leq c|x|^2$, и для $\varepsilon > 0$ положим T как в (3.8). Тогда мы можем написать

$$|A_t| \leq \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \left(\int_0^T \gamma_s \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) |U(\theta_{s-})| da_s + \int_T^t \gamma_s \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) |U(\theta_{s-})| da_s \right).$$

Момент времени T является фиксированным моментом времени, так что, используя предположение **R.1**, получаем аналогично (3.7), что

$$\mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^T \gamma_s \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) |U(\theta_{s-})| da_s \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Используя (2.3), на множестве $\{\sup_{t \geq T} \theta_t^2 < \delta\}$ получаем оценку

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_T^t \gamma_s \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) |U(\theta_{s-})| da_s \\ & \leq \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) c Z_\infty^* \int_0^t \gamma_s da_s. \end{aligned}$$

Ввиду $\mathcal{E}_t(-B) \leq e^{-Bt}$, получаем $\mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \gamma_s da_s \rightarrow 0$ п.н., и по лемме 3.2 имеем, что $A_t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Следовательно, для асимптотической

нормальности процедуры (1.2) достаточно доказать асимптотическую нормальность выражения

$$V_t = \mathcal{E}_t^{1-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\alpha\beta) \gamma_s dm_s.$$

Вернемся к приему, описанному в подпункте 2 (см. выше). Возьмем $t_n \uparrow \infty$ и рассмотрим последовательность $Y_1^n = f_{t_n} \theta_0 + A_1^n + M_1^n$. Мы показали, что $f_{t_n} \theta_0 \rightarrow 0$ и $A_1^n \xrightarrow{P} 0$, при $n \rightarrow \infty$. Для завершения надо доказать, что

$$\langle M^n, M^n \rangle_1 \xrightarrow{P} \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1} (\pi_\infty(-\alpha\beta))^{-1/(\alpha\beta)}, \quad (3.9)$$

$$\int_0^1 \int_{\{|x|>\varepsilon\}} x^2 \nu^{M^n}(ds, dx) \xrightarrow{P} 0. \quad (3.10)$$

Из центральной предельной теоремы для локально квадратично интегрируемых мартингалов следует, что

$$M_1^n \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1} \pi_\infty(-\alpha\beta)^{-1/(\alpha\beta)}\right)$$

(см. [10, теорема 5.5.4, с. 314]).

Очевидно,

$$\langle M^n, M^n \rangle_1 = \mathcal{E}_{t_n}^{2-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^{t_n} \gamma_s^2 \mathcal{E}_s^{-2}(-\alpha\beta) d\langle m, m \rangle_s.$$

Заметим, что $\mathcal{E}_t^{2-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta) = (1 + a_t)^{1-2\alpha\beta} (\pi_t(-\alpha\beta))^{2-1/(\alpha\beta)}$. Поскольку $(1 + a_t)^{1-2\alpha\beta} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из этого следует, что асимптотическое поведение интеграла

$$\mathcal{E}_t^{2-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \gamma_s^2 \mathcal{E}_s^{-2}(-\alpha\beta) d\langle m, m \rangle_s$$

зависит от поведения его хвоста. Следовательно, мы можем заменить анализ предела этого интеграла соответствующим анализом интеграла

$$\mathcal{E}_t^{2-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \gamma_s^2 \mathcal{E}_s^{-2}(-\alpha\beta) \sigma^2 da_s, \quad (3.11)$$

где мы воспользовались условием (3.1), чтобы получить нужное утверждение.

Из леммы А.3 в приложении следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_t^{2-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \int_0^t \gamma_s^2 \mathcal{E}_s^{-2}(-\alpha\beta) d\langle m, m \rangle_s \\ & \xrightarrow{P} \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1} \pi_\infty(-\alpha\beta)^{-1/(\alpha\beta)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Следовательно, условие (3.9) имеет место и для последовательности M_1^n .

Покажем, что условие (3.10) также имеет место. Запишем $s_n = st_n$ и заметим сначала, что

$$(\Delta M_s^n)^2 \leq C(\pi(-\alpha\beta), a)(g_{s_n}^t(\alpha\beta; a))^{-2}(\Delta m_{s_n})^2, \quad (3.13)$$

где константа C такова, что $0 < C(\pi(-\alpha\beta), a) < \infty$.

Из неравенства (3.13) следует, что

$$1\{|\Delta M_s^n| > \varepsilon\} \leq 1\{|\Delta m_{s_n}| > C^{-1}g_s^t(\alpha\beta; a)\varepsilon\}. \quad (3.14)$$

Воспользуемся теперь соотношениями (3.13) и (3.14), чтобы получить

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\{|x|>\varepsilon\}} x^2 \nu^{M^n}(ds, dx) \\ \leq K(\pi(\alpha\beta), a) \left((g_{t_n}^t(\alpha\beta; a))^{-2} \cdot L(\varepsilon', g_{t_n}^t(\alpha\beta; a)) \right)_{t_n}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

с $\varepsilon' = \varepsilon C^{-1}$ и конечной константой K . Поэтому (3.10) следует из условия L.

Мы показали, что

$$\mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)} \theta_t \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1} \pi_\infty^{-1/(\alpha\beta)}(-\alpha\beta)\right).$$

Но $(1 + a_t)^{1/2} = \mathcal{E}_t^{-1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta) \pi_t^{1/(2\alpha\beta)}(-\alpha\beta)$, значит, доказано утверждение (3.2).

З а м е ч а н и е 3.1 (см. [14] и [13]). Пусть m — гауссовский мартингал с независимыми приращениями и $\langle m, m \rangle = \sigma^2 \cdot a$, $\sigma_t^2 \rightarrow \sigma^2$, при $t \rightarrow \infty$. В этом случае для доказательства асимптотической нормальности процедуры $\theta(\alpha/(1 + a_-) \cdot a, a)$ не требуется никакого условия на скачки мартингала m .

3.2. Асимптотическая нормальность процедуры с «медленно меняющимися весами». 1. Изучим асимптотическую нормальность процедуры с «медленно меняющимися весами».

Пусть $v(r) = (1 + a_-)^r \cdot a$. Предположим, что

$$[v(r), v(r)]_\infty < \infty. \quad (3.16)$$

Имеем

$$\mathcal{E}(-\alpha\beta v(r)) = \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{1-r}(1 + a_t)^{1-r} - 1\right) \rho(-\alpha\beta; v(r)), \quad (3.17)$$

где

$$\rho(-\alpha\beta; v(r)) = \prod \left(1 - \frac{\alpha\beta}{(1 + a_-)r}\right) \exp\left\{\frac{\alpha\beta}{1-r} \Delta(1 + a)^{1-r}\right\}.$$

Воспользовавшись условием (3.16), имеем $0 < \rho_\infty(-\alpha\beta; v(r)) < \infty$ (см. лемму А.4 в приложении). Ниже будем использовать обозначение $\mathcal{E}(-\alpha\beta v(r)) = \mathcal{E}(-\alpha\beta; r)$.

Определим функцию $h^t := h^t(\alpha, r; a)$ как

$$h_s^t = (1 + a_t)^{-r/2} (\mathcal{E}_t(-\alpha; r))^{-1} \mathcal{E}_{s \wedge t}(-\alpha; r) (1 + a_{s \wedge t-})^r.$$

Теорема 3.2. Пусть функция a — детерминированная и $\gamma(r) = \alpha/(1+a_-)^{-r}$. Пусть выполнены (2.7), (2.10) после некоторого t_0 , (2.11), (2.9), **Р.3**, (3.1), (3.16) и выполнено условие **L** с $h^t(\alpha\beta, r; a)$ вместо $g^t(\alpha\beta; a)$. Тогда

$$(1 + a_t)^{r/2} (\theta_t - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta}\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Доказательство. Умножая $\theta_t - \theta$ на $(\mathcal{E}(-\alpha\beta; r))^{-1}$, получим

$$(\mathcal{E}_t(-\alpha\beta; r))^{-1} (\theta_t - \theta) = (\theta_0 - \theta) - A_t - M_t, \quad (3.19)$$

где

$$A_t = \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} \frac{\alpha}{(1 + a_{s-})^r} U(\theta_{s-}) da_s,$$

$$M_t = \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} \frac{\alpha}{(1 + a_{s-})^r} dm_s.$$

Умножая уравнение (3.19) на $B_t = (1 + a_t)^{r/2} (\mathcal{E}_t(-\alpha\beta; r))$, получим

$$(1 + a_t)^{r/2} (\theta_t - \theta) = B_t(\theta_0 - \theta) - B_t A_t - B_t M_t. \quad (3.20)$$

По лемме А.4 $B_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, $B_t(\theta_0 - \theta) \rightarrow 0$.

Остальные шаги аналогичны шагам в доказательстве теоремы 3.1, поэтому выделим только ключевые моменты.

Используем лемму 3.2, чтобы выбрать фиксированное время так, что $\mathbf{P}\{\sup_{t \geq T} \theta_t^2 < \delta\} \geq 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon, \delta > 0$. Далее, если $t \geq T$, то $|U(\theta_{t-})| \leq Z_\infty^* \mathcal{E}_t(-\alpha\beta)$, и мы получим, что $B_t A_t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ (см. лемму А.6).

Воспользуемся леммой А.5 для проверки соотношения $B_t^2 \langle M, M \rangle_t \xrightarrow{\mathbf{P}} \alpha\sigma^2/(2\beta)$, и мы имеем условие (3.9) для процесса $B_{t_n} M_{s \wedge t_n/t_n}$.

Чтобы завершить доказательство, используем условие **L** относительно $h^t(\alpha\beta, r; a)$ для проверки (3.10) для мартингала $M_1^n := B_{t_n} M_{t_n}$. В результате получим (3.18).

4. Усредненные процедуры

4.1. Свойства сходимости усредненных процедур. 1. Изучим сначала свойства сходимости усредненных процедур.

Рассмотрим сначала процедуру (1.2) при условиях **R.0**, **R.1**, **R.2.T** и **M**. Определим *усредненную оценку*

$$\bar{\theta}_t = \frac{1}{1 + a_t} \int_0^t \theta_s da_s$$

с $\bar{\theta}_t = \theta_0$ на $\{(\omega, s): a_s = 0\}$. По теореме 2.1 имеем, что $\theta_t \rightarrow x^*$ п.н. Утверждение, что и $\bar{\theta}_t \rightarrow x^*$ п.н., когда $a_t \rightarrow \infty$ п.н. при $t \rightarrow \infty$, следует из простой леммы:

Лемма 4.1. Пусть функции a, b таковы, что a — возрастающая, $a_0 = 0$, $a_\infty = \infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\bar{b}_t := \frac{1}{1 + a_t} \int_0^t b_s da_s \rightarrow 0.$$

2. Рассмотрим теперь *стандартную* процедуру, где $\gamma = \alpha(1 + a_-)^{-1}$. Используя теорему 2.2, получаем следующую теорему о скорости сходимости стандартной процедуры.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (2.6), (2.7), (2.9), (2.8) после некоторого t_0 и **R.3**. Стандартная усредненная процедура сходится (п.н.) и

$$|\bar{\theta}_t - x^*| \leq C(\omega)(1 + a_t)^{-\alpha\beta/2}.$$

Доказательство. Утверждение следует из оценки

$$|\bar{\theta}_t - x^*| \leq \frac{C(\omega)}{(1 + a_t)} \int_0^t (1 + a_s)^{-\alpha\beta/2} da_s.$$

Замечание 4.1. Для усредненной процедуры с «медленно меняющимися весами» мы получим ту же скорость сходимости, используя теорему 2.3.

4.2. Асимптотическая нормальность усредненной стандартной процедуры. 1. Ранее мы видели, что верхняя граница скорости сходимости усредненной процедуры не лучше, чем первоначальной оценки.

Один вариант сравнения качества различных процедур оценки x^* заключается в доказательстве центральной предельной теоремы и сравнении дисперсий предельного нормального распределения. С этой точки зрения процедуры стохастической аппроксимации не ведут себя оптимально. Тем не менее, иногда усредненные процедуры оптимальны в

том смысле, что их предел достигает асимптотически оптимальной дисперсии. (См. [16], [19], [17], [2], [22], [8] и [9].)

Мы доказали асимптотическую нормальность стандартной процедуры при предположениях (3.1), **R.0**, (2.6), (2.7), (2.9), (2.8) после некоторого t_0 , **R.3** и **L**. Покажем, что если вышеуказанные предположения верны, то усредненная стандартная процедура также асимптотически нормальна.

2. Сначала рассмотрим схему, используемую нами в доказательстве. Как и ранее, она существенно зависит от предположения, что процесс a *детерминирован*. Пусть θ_t удовлетворяет (1.2).

Положим для простоты $\theta_0 = x^* = 0$. По лемме 3.1

$$\theta_t = \mathcal{E}_t(-\alpha\beta)(-\mathcal{U}_t - \mathcal{M}_t),$$

где

$$\mathcal{U}_t = \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta))^{-1} U(\theta_{s-}) \gamma_s da_s$$

(напомним, что $R(x) = \beta(x - x^*) + U(x)$) и $\mathcal{M}_t = \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta))^{-1} \gamma_s d\mathcal{M}_s$. Теперь рассмотрим интеграл $\int_0^t \theta_s da_s$. Используя указанное выше представление и интегрируя по частям, получим следующую формулу для усредненной процедуры:

$$(1 + a_t)^{1/2} \bar{\theta}_t = (1 + a_t)^{-1/2} \int_0^t (\mathcal{J}_t(-\alpha\beta) - \mathcal{J}_{s-}(-\alpha\beta)) d(\mathcal{M}_s - \mathcal{U}_s), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{J}_t(-\alpha\beta) = \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\gamma \cdot a) da_s$. Заметим, что если a непрерывна, то

$$\mathcal{J}_t(-\alpha\beta) = \frac{1}{1 - \alpha\beta} ((1 + a_t)^{1-\alpha\beta} - 1).$$

Фиксируем t и определяем процесс $Y(t, u)$ формулой

$$Y(t, u) = (1 + a_t)^{-1/2} \int_0^u (\mathcal{J}_t(-\alpha\beta) - \mathcal{J}_{s-}(-\alpha\beta)) d(\mathcal{M}_s^t - \mathcal{U}_s^t).$$

Возьмем t_n и снова определим последовательность семимартингалов Y^n на интервале $[0, 1]$ по формуле $Y_u^n = Y(t_n, ut_n)$. Так как a детерминирован, процесс

$$u \mapsto \mathcal{N}_u^n := (1 + a_{t_n})^{-1/2} \int_0^u (\mathcal{J}_{t_n}(-\alpha\beta) - \mathcal{J}_{s-}(-\alpha\beta)) d\mathcal{M}_s^{t_n}$$

— локально квадратично интегрируемый мартингал. Следовательно, необходимо показать, что

$$Y_1^n = A_1^n + M_1^n \quad (4.2)$$

имеет нормальный предел, где $M_u^n = \mathcal{N}_{ut_n}^n$ — локально квадратично интегрируемый мартингал и

$$A_u^n = -(1 + a_{t_n})^{-1/2} \int_0^{ut_n} (\mathcal{J}_{t_n}(-\alpha\beta) - \mathcal{J}_s(-\alpha\beta)) d\mathcal{U}_s^n$$

— предсказуемый процесс на интервале $[0, 1]$.

3. Вернемся к доказательству асимптотической нормальности усредненной процедуры.

Используя лемму 3.2, выберем фиксированное $T > 0$ такое, что $|U(\theta_{s-})| \leq C(\omega)\mathcal{E}_s(-\alpha\beta)$, и это неравенство выполнено для всех $\omega \in B$, где $P(B) > 1 - \varepsilon$.

Для $\omega \in B$ имеем

$$A_1^n \leq C(\pi_\infty(-\alpha\beta))(1 + a_{t_n})^{-1/2} \times (C(\omega, T) + (1 + a_{t_n})^{1-\alpha\beta} \ln(1 + a_{t_n}) + (1 + a_{t_n})^{-\alpha\beta})$$

(см. приложение для конкретизации вычислений), и, следовательно,

$$A_1^n \xrightarrow{P} 0. \quad (4.3)$$

Используя лемму A.2 из приложения, получаем, что

$$\langle M^n, M^n \rangle_1 \xrightarrow{P} \frac{\alpha^2 \sigma^2}{1 - \alpha\beta} \left(\frac{1}{2\alpha\beta - 1} - \frac{2}{\alpha\beta} + 1 \right) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\beta(2\alpha\beta - 1)}. \quad (4.4)$$

Теперь необходимо проверить условие Линдберга для мартингала M_1^n . Заметим, что $|\Delta M_u^n| \leq 2C|\Delta V_{ut_n}|$, где V определено в (3.6). Следовательно, из условия Линдберга L вытекает соответствующее условие для мартингальной последовательности M^n в момент $= 1$.

В результате получена

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (3.1), R.0, (2.6), (2.7), (2.9), (2.8) после некоторого t_0 , R.3 и L. Тогда

$$(1 + a_t)^{1/2} \bar{\theta}_t \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2\alpha\sigma^2}{\beta(2\alpha\beta - 1)}\right). \quad (4.5)$$

З а м е ч а н и е 4.2. Ввиду того, что

$$\frac{2\alpha\sigma^2}{\beta(2\alpha\beta - 1)} > \frac{\alpha^2\sigma^2}{2\alpha\beta - 1},$$

предельная асимптотическая дисперсия усредненной стандартной процедуры больше, чем для стандартной процедуры.

4.3. Асимптотическая нормальность усредненной процедуры с «медленно меняющимися весами». 1. Пусть θ_t — единственное сильное решение уравнения (1.2) с $\gamma = \gamma(r)$. Кроме того, выполнены предположения (2.7), (2.10) после некоторого t_0 , (2.11), (2.9), **R.3**, (3.1), (3.16) и условие **L** с $h^t(\alpha\beta, r; a)$ вместо $g^t(\alpha\beta; a)$.

Напомним, что здесь $\gamma(r) = \alpha(1 + a_-)^{-r}$ и

$$\mathcal{E}_t(-\alpha\beta; r) = \exp \left\{ -\frac{\alpha\beta}{1-r} ((1 + a_t)^{1-r} - 1) \right\} \rho_t(\alpha\beta; r),$$

где

$$\rho_t(-\alpha\beta; r) = \prod_{s \leq t} \left(1 - \frac{\alpha\beta \Delta a_s}{(1 + a_{s-})^r} \right) \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} \Delta(1 + a_s)^{1-r} \right\}.$$

В итоге мы снова можем проводить вычисления, как если бы функция a была непрерывной.

2. Чтобы упростить выражения, полагаем $\theta_0 = x^* = 0$. По лемме 3.1

$$\theta_t = -\mathcal{E}_t(-\alpha\beta; r) (\mathcal{U}_t(r) + \mathcal{M}_t(r)),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t(r) &= \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} U(\theta_{s-}) \gamma_s(r) da_s, \\ \mathcal{M}_t(r) &= \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} \gamma_s(r) dm_s. \end{aligned}$$

С учетом обозначения $\mathcal{H}_t(-\alpha\beta; r) = \int_0^t \mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r) da_s$ мы получаем следующее представление усредненной процедуры:

$$\begin{aligned} (1 + a_t)^{1/2} \bar{\theta}_t &= (1 + a_t)^{-1/2} \\ &\times \int_0^t (\mathcal{H}_t(-\alpha\beta; r) - \mathcal{H}_{s-}(-\alpha\beta; r)) d(\mathcal{M}_s(r) + \mathcal{U}_s(r)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Возьмем снова последовательность $t_n \uparrow \infty$ и определим последовательность семимартингалов Y^n , определенных на интервале $[0, 1]$, с разложением

$$Y_u^n = A_u^n + M_u^n,$$

где

$$\begin{aligned} A_u^n &= (1 + a_{t_n})^{-1/2} \int_0^{ut_n} (\mathcal{H}_{t_n}(-\alpha\beta; r) - \mathcal{H}_{s-}(-\alpha\beta; r)) d\mathcal{U}_s^{t_n}(r), \\ M_u^n &= (1 + a_{t_n})^{-1/2} \int_0^{ut_n} (\mathcal{H}_{t_n}(-\alpha\beta; r) - \mathcal{H}_{s-}(-\alpha\beta; r)) d\mathcal{M}_s^{t_n}(r). \end{aligned}$$

3. Покажем, что если

$$\frac{3}{2} - \alpha\beta < r < 1, \quad (4.7)$$

то

$$A_1^n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (4.8)$$

Поскольку $(1 + a_t)^{-1/2} \rightarrow 0$, достаточно рассматривать поведение хвоста интеграла, и мы можем считать для $s \geq T$, что $\mathbf{P}\{\omega: |U(\theta_{s-})| \leq C(\omega)(1 + a_s)^{-\alpha\beta}\} > 1 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$|\mathcal{H}_{t_n}(-\alpha\beta; r) - \mathcal{H}_{s-}(-\alpha\beta; r)|(\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} \leq C(\omega; \alpha, \beta) a_t.$$

Следовательно,

$$A_1^n(\omega) \leq (1 + a_{t_n})^{-1/2} C(\omega, T) + C(\omega; \alpha, \beta) (1 + a_{t_n})^{2-1/2-\alpha\beta-r}.$$

С учетом (4.7) получаем (4.8).

З а м е ч а н и е 4.3. Условие (4.7) вместе с условием $1 - r/2 < \alpha\beta < 2r - 1$ означают, что $r \in (5/6, 1)$. Итак, мы имеем β из **Р.3**, после этого мы можем взять $r \in (\frac{5}{6}, 1)$ и затем фиксировать свободный параметр α .

Рассмотрим мартингалы M^n . Интегрирование по частям дает

$$\mathcal{H}_t(-\alpha\beta; r) = \frac{1}{\alpha\beta} \left(1 - \mathcal{E}_t(-\alpha\beta; r) (1 + a_t)^r + \int_0^t \mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r) d(1 + a_s)^r \right).$$

Ниже используем обозначение

$$\mathcal{H}_t(-\alpha\beta; r) = \int_0^t \mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r) d(1 + a_s)^r.$$

Следовательно, можно переписать мартингал M^n в виде

$$M^n = M^{n,1} + M^{n,2} + M^{n,3}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} M_u^{n,1} &= (1 + a_{t_n})^{-1/2} \frac{1}{\beta} \int_0^{ut_n} \left(\frac{1 + a_s}{1 + a_{s-}} \right)^r dm_s, \\ M_u^{n,2} &= -\frac{1}{\beta} \mathcal{E}_{t_n}(-\alpha\beta r) (1 + a_{t_n})^{r-1/2} \\ &\quad \times \int_0^{ut_n} (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-1} (1 + a_{s-})^{-r} dm_s, \\ M_u^{n,3} &= \frac{1}{\beta} (1 + a_{t_n})^{-1/2} \int_0^{ut_n} \frac{\mathcal{H}_t(-\alpha\beta; r) - \mathcal{H}_{s-}(-\alpha\beta; r)}{(1 + a_{s-})^r \mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r)} dm_s. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$M_1^{n,1} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\beta^2}\right), \quad (4.10)$$

$$M_1^{n,2} + M_1^{n,3} \xrightarrow{P} 0. \quad (4.11)$$

Для доказательства (4.11) нам нужна следующая лемма, которая вытекает из неравенства Ленгляра (см. [10]).

Лемма 4.2. Если $(m^n, F^n)_{n \geq 1}$ — последовательность локально квадратично интегрируемых мартингалов с

$$\langle m^n, m^n \rangle_1 \xrightarrow{P} 0, \quad (4.12)$$

то

$$(m^n)_1^* \xrightarrow{P} 0. \quad (4.13)$$

Напомним, что $d\langle m, m \rangle_t / da_t \leq C < \infty$. Используя этот факт, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \langle M^{n,2}, M^{n,2} \rangle_1 &\leq C \mathcal{E}_{t_n}^2(-\alpha\beta; r) (1 + a_{t_n})^{2r-1} \\ &\times \int_0^{t_n} (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-2} (1 + a_s)^{-2r} da_s. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\int_0^{t_n} (\mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r))^{-2} (1 + a_s)^{-2r} da_s}{(\mathcal{E}_{t_n}(-\alpha\beta; r))^{-2} (1 + a_{t_n})^{-r}} \xrightarrow{P} C.$$

Следовательно, $\langle M^{n,2}, M^{n,2} \rangle_1 \xrightarrow{P} 0$ и по лемме 4.2 $(M^{n,2})_1^* \xrightarrow{P} 0$.

Далее, рассмотрим мартингал $M^{n,3}$. Интегрируя по частям, получаем оценку

$$\mathcal{X}_t(-\alpha\beta; r) - \mathcal{X}_{s-}(-\alpha\beta; r) \leq \frac{1}{\alpha\beta(2-2r)} \mathcal{E}_s(-\alpha\beta; r) (1 + a_s)^{2r-1}.$$

Следовательно, $\langle M^{n,3}, M^{n,3} \rangle_1 \leq C(1 + a_{t_n})^{2r-2}$. Используя лемму 4.2, имеем, что $(M^{n,3})_1^* \xrightarrow{P} 0$. Таким образом мы доказали (4.11).

Очевидно,

$$\langle M^{n,1}, M^{n,1} \rangle_1 \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{\beta^2}.$$

Сравнивая скачки мартингала $M^{n,1}$ со скачками соответствующего мартингала, полученного из (3.20), легко видеть, что выполнено условие Линдеберга для мартингала $M^{n,1}$ из условия Линдеберга для неусредненной процедуры.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия (2.7), (2.10) после некоторого t_0 , (2.11), (2.9), **R.3**, (3.1), (3.16), условие **L** с $h^t(\alpha\beta, r; a)$ вместо $g^t(\alpha\beta; a)$ и (4.7). Тогда

$$(1 + a_t)^{1/2} \bar{\theta}_t \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\beta^2}\right).$$

З а м е ч а н и е 4.4. Дисперсия σ^2/β^2 равна оптимальной дисперсии оценки методом наименьших квадратов (см. [8]).

5. О точном асимптотическом поведении процедуры (1.2)

1. В данном разделе изучается точное асимптотическое поведение траекторий θ_t при $t \rightarrow \infty$. Метод исследования базируется на законе повторного логарифма для мартингалов в предположении, что γ_t равно либо $\alpha/(1 + a_t)$ (стандартная процедура), либо $\alpha/(1 + a_t)^r$, $r \in (0, 1)$ (процедура с медленно меняющимися весами).

Пусть M — локально квадратично интегрируемый мартингал и

$$L_t = \left(2\langle M, M \rangle_t \ln \ln \left(\max(\langle M, M \rangle_t, e^2)\right)\right)^{1/2}.$$

Обозначим через ν^X компенсатор меры скачков семимартингала X .

Следующее предложение является следствием из работ [25], [26].

Предложение 5.1. Пусть локально квадратично интегрируемый мартингал M удовлетворяет следующим условиям: (почти наверное) относительно меры P

e.0 $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$;

e.1 $\int_0^\infty \int_{|x| > L_s} \nu^M(ds, dx) < \infty$;

e.2 $L_t^{-2} \int_0^t \int_{|x| > L_s} x^2 \nu^M(ds, dx) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

e.3 $\int_0^\infty \int_{|x| \leq L_s} x^4 L_s^{-4} \nu^M(ds, dx) < \infty$.

Тогда (п.н.) $\limsup_{t \rightarrow \infty} L_t^{-1} |M_t| \leq 1$.

Основной результат о точном поведении процедуры (1.2) состоит в следующем. Пусть M — локально квадратично интегрируемый мартингал

$$M_t := \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1 + a_{s-}} dm_s \quad (5.1)$$

с квадратической характеристикой

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \mathcal{E}_s^{-2}(-\beta\alpha) \frac{\alpha^2}{(1 - a_{s-})^2} d\langle m, m \rangle_s.$$

Теорема 5.1. Пусть для стандартной процедуры выполнены **Р.0**, **Р.3**, (2.7), (2.8), (2.9), (3.1), $1 < 2\beta\alpha < 2$, а мартингал M , определяемый из (5.1), удовлетворяет **е.1–е.3**. Тогда имеем (почти наверное относительно меры $\mathbf{P}$)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha) L_t^{-1} |\theta_t - x^*| \leq 1. \quad (5.2)$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\theta_0 = x^* = 0$. Применим формулу Колмогорова–Ито к $\mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha)\theta_t$ и получим, что

$$\mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha)\theta_t = - \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} U(\theta_{s-}) da_s - M_t. \quad (5.3)$$

Умножая левую и правую часть уравнения (5.3) на L_t^{-1} , получаем

$$L_t^{-1} \mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha) \theta_t = -I(t) - L_t^{-1} M_t, \quad (5.4)$$

где

$$I(t) := L_t^{-1} \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} U(\theta_{s-}) da_s.$$

При $2\alpha\beta > 1$ имеем, что $\langle M, M \rangle_\infty = C(\omega) \int_0^\infty (1+a_{s-})^{2(\beta\alpha-1)} da_s = \infty$. Из предложения 5.1 для мартингала M , определенного в (5.1), имеем, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} L_t^{-1} |M_t| \leq 1. \quad (5.5)$$

Следовательно, для доказательства (5.2) необходимо показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \rightarrow 0$. Фиксируем $T > 0$ и запишем $I(t)$ как

$$\begin{aligned} I(t) &= L_t^{-1} \int_0^T \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} U(\theta_{s-}) da_s \\ &\quad + L_t^{-1} \int_T^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} U(\theta_{s-}) da_s. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Первое слагаемое в правой части (5.6) стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$, так как $L_t \rightarrow \infty$ и интеграл $\int_0^T \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \alpha / (1+a_{s-}) U(\theta_{s-}) da_s$ — конечное число, которое может зависеть от ω (так же как и от T). Для второго слагаемого в правой части (5.6) используем **Р.3**, верхнюю оценку (2.3) и приложение, для получения следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} &\int_T^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} U(\theta_{s-}) da_s \\ &\leq C(\omega) L_t^{-1} \int_T^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha) \frac{\alpha}{1+a_{s-}} \mathcal{E}_s(-\beta\alpha) da_s \\ &\leq C(\omega) L_t^{-1} \int_T^t \frac{\alpha}{1+a_{s-}} da_s \leq C(\omega) L_t^{-1} \ln(1+a_t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Но $L_t^{-1} \ln(1 + a_t) \rightarrow 0$, поскольку $L_t \geq C(\omega)(1 + a_t)^{\beta\alpha/2}$.

Следующая теорема дает точное асимптотическое поведение в терминах процесса a .

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия **R.0**, **R.3**, (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (3.1), $1 < 2\beta\alpha < 2$ и указанный выше мартингал M из (5.1) удовлетворяет **e.1–e.3**. Тогда (почти наверное относительно меры P) имеем

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_t)^{1/2}}{(2 \ln \ln(\max(1 + a_t, e^2)))^{1/2}} |\theta_t - x^*| \leq \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2\beta\alpha - 1}}. \quad (5.8)$$

Доказательство. Из результатов приложения вытекает, что $\mathcal{E}_t(-\beta\alpha) = (1 + a_t)^{-\beta\alpha} \pi_t(-\beta\alpha)$. Кроме того,

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \mathcal{E}_s^{-2}(-\beta\alpha) \frac{\alpha^2 \sigma_s^2}{(1 + a_{s-})^2} da_s.$$

Из этого, а также из (3.1) и леммы A.2 в приложении получаем

$$\frac{\langle M, M \rangle_t}{(1 + a_t)^{2\beta\alpha - 1}} \rightarrow \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\beta\alpha - 1} \pi_\infty^{-2}(-\beta\alpha).$$

Данное утверждение и доказывает (5.8).

2. Рассмотрим «процедуры с медленно меняющимися весами». В этом случае процедура (1.2) имеет следующую структуру:

$$\gamma_t := \frac{\alpha}{(1 + a_{t-})^r}, \quad \text{где } r \in (0, 1).$$

Пусть выполнено следующее условие устойчивости: для почти всех ω и всех t и x

$$\begin{aligned} & -2(x - x^*) R(x) \frac{\alpha}{(1 + a_{t-})^r} + \frac{\beta\alpha}{1 + a_{t-}} (x - x^*)^2 \\ & + \Delta a_t \frac{\alpha^2}{(1 + a_{t-})^{2r}} R^2(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рассмотрим также стохастическую экспоненту $\mathcal{E}(\delta; r)$, являющуюся решением линейного уравнения

$$\mathcal{E}_t(\delta; r) = 1 + \int_0^t \mathcal{E}_{s-}(\delta; r) \frac{\delta}{(1 + a_{s-})^r} da_s.$$

Полагая, что выполнены **R.1**, **R.3**, (2.7), (3.1), (5.9) и $\beta\alpha < 2r - 1$, с условием $\sum (\Delta a_s / (1 + a_{s-})^r)^2 < \infty$ вместо $(\Delta a_s / (1 + a_{s-}))^2 < \infty$, получим (2.3).

Обозначим через $M(r)$ мартингал

$$M_t(r) := \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha; r) \frac{\alpha}{(1+a_{s-})^r} da_s.$$

Как и ранее, определим $L = L(r)$ по $M(r)$.

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия **R.0**, **R.3**, (2.7), (3.1), мартингал $M(r)$ удовлетворяет **e.1–e.3** и $1 - r/2 < \beta\alpha < 2r - 1$. Тогда (почти наверное относительно меры $\mathbf{P}$)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha; r) L(r)_t^{-1} |\theta_t - x^*| \leq 1. \quad (5.10)$$

Доказательство. Пусть снова $\theta_0 = x^* = 0$. Применяя формулу Колмогорова–Ито, получим, что

$$\mathcal{E}_t^{-1}(-\beta\alpha; r) \theta_t = -I_t(r) - M_t(r), \quad (5.11)$$

где

$$I_t(r) := \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(-\beta\alpha; r) \frac{\alpha}{(1+a_{s-})^r} U(\theta_{s-}) da_s.$$

Если $\beta\alpha > 1 - r/2$, то $\langle M(r), M(r) \rangle_\infty = \infty$ и имеем **e.0** для $M(r)$. Остальная часть доказательства — аналогична доказательству теоремы 5.1 с очевидными изменениями.

Следующая теорема дает точную асимптотику в терминах процесса a .

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия **R.0**, **R.3**, (2.7), (2.10), (3.1), мартингал $M(r)$ удовлетворяет **e.1–e.3** и $1 - r/2 < \beta\alpha < 2r - 1$. Тогда (почти наверное относительно меры $\mathbf{P}$)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(1+a_t)^{r/2}}{\sqrt{2 \ln(1+a_t)}} \leq \sigma \sqrt{\frac{\alpha(1-r)}{2\beta}}. \quad (5.12)$$

6. Примеры

В данном разделе статьи показывается, как развитая общая техника и полученные результаты применяются к классическим процедурам стохастической аппроксимации с «дискретным временем».

1. (Стандартная процедура.) Рассмотрим следующий специальный случай процедуры (1.2):

$$\theta_n = \theta_0 - \sum_{i=1}^n R(\theta_{i-1}) \frac{\alpha}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{i} \xi_i. \quad (6.1)$$

Здесь $\gamma_n := \alpha/(n+1)$, m — мартингал такой, что $m_n = \sum_{i \leq n} \xi_i$, $E(\xi_i | \mathcal{F}_{i-1}) = 0$, $E(\xi_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma_i^2$, a — «считающая» мера (см. [10]).

Пусть выполнены **R.0**, **R.3**, (2.8). С вышеуказанной процедурой (6.1) условие устойчивости (2.8) имеет следующую форму:

$$\beta(x - x^*)^2 + \frac{\alpha}{n} R^2(x) \leq 2(x - x^*) R(x).$$

Условие (2.7) следует из вышеуказанного, так как $\sum_i (i+1)^{-1} = \infty$ и $\sum_i 1/i^2 < \infty$.

Предположим, что выполнено (3.1), т.е. $\sigma_i^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть, для простоты, $0 < c \leq \sigma_i^2 \leq 1/c$ с некоторой константой c .

Наконец, допустим, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие Ляпунова

$$\sup_i E|\xi_i|^{2+\delta} < \infty. \quad (6.2)$$

Предложение 6.1. *Допустим, что процедура (6.1) удовлетворяет **R.0**, **R.3**, (2.8), (3.1). Тогда (почти наверное относительно меры P)*

$$\limsup_n \frac{\sqrt{n}}{(2 \ln \ln n)^{1/2}} |\theta_n - x^*| \leq \frac{\alpha \sigma}{\sqrt{2\alpha\beta - 1}}. \quad (6.3)$$

Доказательство. Данное утверждение, впервые полученное при более слабых предположениях в [24], следует из общей теоремы 5.2. Для доказательства достаточно проверить, что мартингал (5.1) для процедуры (6.1), имеющий вид

$$M_n = \sum_{i \leq n} \alpha_i^{\alpha\beta-1} \pi_i^{-1} (-\beta\alpha) \xi_i, \quad (6.4)$$

удовлетворяет условиям предложения 5.1.

Из (6.4) получаем, что $\langle M, M \rangle_n = O(n^{2\alpha\beta-1})$ и, следовательно, выполнено **e.0**.

Определим процесс L по процессу (6.4), как и прежде. С достаточным большим n , которое может зависеть от ω , имеем следующую оценку:

$$\frac{n^{\alpha\beta-1}}{C} \leq L_n \leq C n^{\alpha\beta-1+\varepsilon} \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Опуская константу C в приведенных ниже утверждениях, имеем, что

$$\Delta M_n = (n)^{\alpha\beta-1} \pi_n^{-1} (-\alpha\beta) \xi_n \quad \text{и} \quad k(n)^{\alpha\beta-1} |\xi_n| \leq |\Delta M_n| \leq K(n)^{\alpha\beta-1} |\xi_n|$$

с некоторой константой k , которая не зависит от ω .

Используя неравенство Чебышева, (6.2) и сделанное выше замечание, которое позволяет нам оценивать меру скачков M в терминах меры скачков m , получаем неравенство

$$\mathbf{E} \sum_{i \leq n} \mathbf{P} \{ |\xi_i| > i^{1/2} | F_{i-1} \} \leq K \sum_{i \leq n} i^{-1-\delta/2},$$

что и доказывает выполнение условия **е.1**.

Следовательно, снова используя (6.2), получаем

$$\frac{1}{n^{2\alpha\beta-1}} \mathbf{E} \sum_{i \leq n} i^{2\alpha\beta-2} \mathbf{E} [\xi^2 1\{|\xi_i| > i^{1/2}\} | F_{i-1}] \leq C n^{-\delta/2}.$$

Ввиду того, что $n^{-\delta/2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, имеем **е.2**.

Наконец,

$$\mathbf{E} \sum_{i \leq n} i^{-2} \mathbf{E} [\xi^4 1\{|\xi| \leq i^{1/2+\epsilon}\} | F_{i-1}] \leq K \left(1 + n^{2\epsilon-\epsilon\delta-\delta/2} \right),$$

и правая часть указанного неравенства конечна для всех n , если $\epsilon < \delta/(4-2\delta)$. Следовательно, выполнено **е.3**. Предложение 6.1 доказано.

2. (Процедура с медленно меняющимися весами.) Рассмотрим дискретную процедуру с медленно меняющимися весами. Здесь $\gamma_n(r) := \alpha/n^r$, т.е.

$$\theta_n = \theta_0 - \sum_{i \leq n} R(\theta_{i-1}) \frac{\alpha}{i^r} - \sum_{i \leq n} \frac{\alpha}{i^r} \xi_i, \quad (6.5)$$

где ξ_k , $k \geq 1$, определены аналогично предшествующему подразделу и удовлетворяют (6.2). Имеем

$$\sum_i \frac{1}{i} = \infty \quad \text{и} \quad \sum_i \frac{1}{i^{2r}} < \infty,$$

где $\frac{1}{2} < r < 1$. Условие устойчивости имеет вид

$$\beta(x - x^*)^2 + \alpha n^{1-2r} R^2(x) \leq 2(x - x^*) n^{1-r}. \quad (6.6)$$

Предложение 6.2. Пусть процедура (6.5) удовлетворяет **Р.0**, **Р.3**, (3.1), (6.6) и (6.2). Тогда (почти наверное относительно меры $\mathbf{P}$)

$$\limsup_n \frac{n^{r/2}}{\sqrt{2 \ln n}} \leq \sigma \sqrt{\frac{\alpha(1-r)}{2\beta}}. \quad (6.7)$$

Доказательство. Необходимо проверить, что мартингал $M(r)$ удовлетворяет условиям предложения 5.1, где

$$M(r)_n = \sum_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} i^{1-r} \right\} i^{-r} \rho_i(-\alpha\beta; r) \xi_i,$$

$$\rho_k(\eta; r) = e^{-\eta/(1-r)} \prod_{i \leq k} (1 + \eta i^{-r}) \exp \left\{ -\frac{\eta}{1-r} (i^{1-r} - (i-1)^{1-r}) \right\}.$$

Здесь (см. приложение) $0 < c < \rho_k(-\alpha\beta; r) < 1/c$ для всех k и $c > 0$ — детерминированная константа. Используя это, получим следующую оценку для скачков мартингала $M(r)$:

$$c \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} i^{1-r} \right\} i^{-r} |\xi_i| \leq \Delta M(r)_i \leq \frac{1}{c} \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} i^{1-r} \right\} i^{-r} |\xi_i|.$$

Определим процесс $L(r)$ относительно $M(r)$ и получим оценки

$$\frac{1}{K} \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} i^{1-r} \right\} i^{-r/2} \leq L(r)_i \leq K \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} i^{1-r} \right\} i^{-r/2+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число. А далее используем указанные выше оценки для проверки **е.0–е.3** так же, как в предшествующем подразделе.

3. Рассмотрим для модели (1.2) случай $m = 0$. Предположим, что выполнены условия **R.0**, **R.1** и **R.2.0**. Тогда из теоремы 2.1 вытекает, что

$$(\theta_t - x^*)^2 \leq \mathcal{E}_t(-k \cdot a) (\theta_0 - x^*)^2. \quad (6.8)$$

Если в (6.8) $a_t = [t]$, $\gamma_k = \alpha/k$ и $k = \beta$ и выполнено **R.2.0**, то $|\theta_t - x^*| \leq C/n^{1/4}$. Конечно, если мы знаем функцию R и можем использовать метод Ньютона, чтобы найти корень в (1.1), то получим скорость сходимости $|\theta_t - x^*| \leq C/n^2$, по крайней мере, в окрестности x^* (см. [20, с. 210]).

Будем использовать далее n вместо $[t]$. Предположим, что выполнены условия **R.3**, **R.0**, (2.6), (3.1), и шум процедуры является мартингал-разностью $m_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\sigma_i^2 = \mathbf{E}^{F_{i-1}} \xi_i^2$ и $\sup_i \mathbf{E} |\xi_i|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 2$.

Легко проверить, что если $\sigma_i < C < \infty$ для всех i , то процедура сходится.

Покажем, как проверить условие **L**. Здесь $g_i^n := g_i^n(\alpha\beta) = (1+n)^{\alpha\beta-1/2} (1+i)^{1-\alpha\beta}$. Поэтому, мы можем записать условие **L** следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n (g_i^n)^{-2} \mathbf{E}^{F_{i-1}} \left(\xi_i^2 1\{|\xi_i| > g_i^n \varepsilon\} \right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Из неравенства Гёльдера имеем

$$\mathbf{E}^{F_{i-1}} \left(\xi_i^2 1\{|\xi_i| > g_i^n \varepsilon\} \right) \leq K^{2/2+\delta} \varepsilon^{-\delta} (g_i^n)^{-\delta}.$$

Воспользуемся этим неравенством в (6.9) для получения оценки

$$\sum_{i=1}^n (g_i^n)^{-2} \mathbf{E}^{F_{i-1}} \left(\xi_i^2 1\{|\xi_i| > (g_i^n) \varepsilon\} \right) \leq K^{2/(2+\delta)} \varepsilon^{-\delta} \sum_{i=1}^n (g_i^n)^{-(2+\delta)}.$$

Ввиду того, что сумма $\sum_{i=1}^n (g_i^n)^{-(2+\delta)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, выполнено условие L. Следовательно, по теореме 3.1

$$(1+n)^{1/2} (\theta_n - x^*) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2\alpha\beta - 1} \right).$$

Определим теперь процедуру с весами $(1+n)^{-r}$. Пусть у нас есть указанные выше условия с заменой $\gamma(r)$ на γ в **R.2.T** и h_i^n на g_i^n в **L**, где

$$h_i^n \sim \exp \left\{ \frac{\alpha\beta}{1-r} (1+n)^{1-r} \right\} (1+n)^{-r/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha\beta}{1-r} (1+i)^{1-r} \right\} (i+1)^{-r}.$$

Условие L проверяется аналогично. Следовательно,

$$(1+n)^{r/2} \theta_n \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta} \right).$$

Приложение А. Техника стохастических экспонент

А.1. Приведем систематический обзор вычислений, которые необходимы при оперировании со стохастическими экспонентами относительно возрастающих процессов. Эти вычисления являются продолжением работ [8], [12]–[14].

Основная идея проста: допустим, что неубывающая функция a непрерывна. Тогда имеем, что $(1+a)^{-1} \cdot a = \ln(1+a)$ и $(1+a)^r \cdot a = (1+r)^{-1} (1+a)^{r+1}$ для $r \neq -1$. Если функция a только непрерывна справа, то также хотелось бы проводить вычисления, как если бы a была непрерывной. Конечно, необходимы некоторые условия на скачки функции a , чтобы асимптотическое поведение качественно не изменилось по сравнению с непрерывным a .

Пусть a — возрастающая càdlàg функция, $a_0 = 0$ и

$$v_t(r) = \int_0^t \frac{1}{(1+a_{s-})^r} da_s, \quad (\text{A.1})$$

где $0 < r \leq 1$. Пусть $v := v(1)$. Ниже мы часто используем следующую формулу замены переменных:

$$f(A_t) = f(0) + \int_0^t f_x(A_{s-}) dA_s + \sum_{s \leq t} (\Delta f(A_s) - f_x(A_{s-}) \Delta A_s), \quad (\text{A.2})$$

где f является гладкой функцией с непрерывной производной f_x и A — возрастающая càdlàg функция с $A_0 = 0$ (см. [3, с. 155], [10]).

Для возрастающей càdlàg функции b положим $[b, b]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta b_s)^2$. Предположим, что функция v удовлетворяет двум условиям:

v.1 для любого $t \geq 0$ $v_t < \infty$ и $v_\infty := \lim_t v_t = \infty$;

v.2 $[v, v]_\infty < \infty$.

А.2. Изучим асимптотические свойства функций $v(r)$, $0 < r \leq 1$, при двух условиях **v.1** и **v.2**. Сначала заметим, что по (А.2)

$$v_t = \ln(1 + a_t) + \sum_{s \leq t} (\Delta v_s - \ln(1 + \Delta v_s)). \quad (\text{А.3})$$

Напомним, что $\mathcal{E}_t(b) = e^{b_t} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta b_s) e^{-\Delta b_s}$, и, следовательно, из (А.3) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(v) &= (1 + a_t), \\ \mathcal{E}_t(-v) &= (1 + a_t)^{-1} \prod_{s \leq t} (1 - (\Delta v_s)^2) \end{aligned} \quad (\text{А.4})$$

и, в более общей форме, при любом $\alpha \geq -1$

$$\mathcal{E}_t(\alpha) := \mathcal{E}_t(\alpha v) = (1 + a_t)^\alpha \prod_{s \leq t} \frac{(1 + \alpha \Delta v_s)}{(1 + \Delta v_s)^\alpha}. \quad (\text{А.5})$$

Положим

$$\pi_t(\alpha) := \prod_{s \leq t} \frac{(1 + \alpha \Delta v_s)}{(1 + \Delta v_s)^\alpha}.$$

Пусть $\Delta v_t < 1$ для всех $t \geq 0$.

Лемма А.1. Пусть функция v удовлетворяет условию **v.2**. Тогда для любого $\alpha \geq -1$

$$0 < \pi_\infty(\alpha) < \infty. \quad (\text{А.6})$$

Доказательство. Заметим, что

$$\pi_t(\alpha) = \exp \left(\sum_{s \leq t} \ln((1 + \alpha \Delta v_s) - \alpha \ln(1 + \Delta v_s)) \right)$$

и, значит, утверждение следует из неравенства $|\ln(1 + \alpha x) - \alpha \ln(1 + x)| \leq cx^2$, верного для всех $0 \leq x < 1$ с константой $c := c(\alpha) > 0$.

Используя формулу (А.2), получим следующую формулу для $v(r)$:

$$\begin{aligned} v_t(r) &= \frac{1}{1-r} \left\{ (1 + a_t)^{1-r} - 1 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s \leq t} \left(\Delta(1 + a_s)^{1-r} - (1-r) \frac{\Delta a_s}{(1 + a_{s-})^r} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{А.7})$$

Заметим, что

$$\left| \sum_{s \leq t} \left(\Delta(1+a_s)^{1-r} - (1-r) \frac{\Delta a_s}{(1+a_{s-})^r} \right) \right| \leq |r(1-r)| \sum_{s \leq t} \frac{(\Delta a_s)^2}{(1+a_{s-})^{r+1}}. \quad (\text{A.8})$$

Напомним, что $a_t \rightarrow \infty$ и $\pi_t(1) = 1$ для всех $t \geq 0$.

Лемма А.2. *Предположим, что условия v.1 и v.2 выполнены. Тогда*

$$\lim_t \frac{v_t}{\ln(1+a_t)} = 1, \quad (\text{A.9})$$

$$\lim_t \frac{\mathcal{E}_t(\alpha)}{(1+a_t)^\alpha} = \pi_\infty(\alpha) \quad (\text{A.10})$$

и для $0 < r < 1$

$$\lim_t \frac{v_t(r)}{(1+a_t)^{1-r}} = \frac{1}{1-r}. \quad (\text{A.11})$$

Доказательство. Справедливость соотношений (А.9) и (А.10) — прямое следствие указанных выше формул. Что касается результата (А.11), то необходимо доказать соотношение

$$(1+a_t)^{r-1} \sum_{s \leq t} \frac{(\Delta a_s)^2}{(1+a_{s-})^{r+1}} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Но это следует из леммы Кронекера, поскольку

$$(1+a_t)^{r-1} \sum_{s \leq t} \frac{(\Delta a_s)^2}{(1+a_{s-})^{r+1}} = (1+a_t)^{r-1} \sum_{s \leq t} \frac{(\Delta a_s)^2}{(1+a_{s-})^2 (1+a_{s-})^{r-1}},$$

и мы имеем, что $[v, v]_\infty = \sum_t (\Delta a_s)^2 / (1+a_{s-})^2 < \infty$ по условию v.2. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е А.1. Вместо условия v.2 Ле Бретон [8] рассматривал следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta v(r) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Воспользовавшись v.1 и (А.12), он доказал (А.9) и (А.11), а вместо (А.10) — соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{E}_t(\alpha v(r))}{F_r(v)} = \alpha,$$

где $F_r(v) = (1+v)^{1-r}/(1-r)$ для $0 < r < 1$ и $F_1(v) = \ln(1+v)$ (см. [8]). Заметим, что условие (А.12) не гарантирует, что $\pi_t(\alpha)$ сходится к положительному пределу.

А.3. Введем теперь параметр $\alpha > 0$ и положим

$$I_t(\alpha; v) := (\mathcal{E}_t(-\alpha))^{2(1-1/(2\alpha))} \int_0^t \gamma_s^2 (\mathcal{E}_s(-\alpha))^{-2} da_s.$$

Здесь $\gamma := \gamma(\alpha) = \alpha/(1+a_-)$ и $0 < \alpha < 1 < 2\alpha$.

Запись $f_t \sim g_t$ означает, что $\lim_t f_t/g_t = 1$ при $t \rightarrow \infty$, где $f_t > 0$, $g_t > 0$ — некоторые функциональные выражения.

Лемма А.3. Пусть выполнены условия v.1 и v.2. Тогда при $\alpha < 1 < 2\alpha$

$$\lim_t I_t(\alpha; v) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} (\pi_\infty(-\alpha; v))^{-1/\alpha}. \quad (\text{A.13})$$

Доказательство. Для любого $\delta \geq -1$ экспонента $\mathcal{E}_t(\delta v)$ имеет вид $\mathcal{E}_t(\delta v) = (1 + a_t)^\delta \pi_t(\delta)$. Следовательно, по лемме А.1, для достаточно больших t

$$|\mathcal{E}_t(\delta v) - (1 + a_t)^\delta \pi_\infty(\delta)| \leq (1 + a_t)^\delta (1 + \varepsilon). \quad (\text{A.14})$$

Итак, при рассмотрении асимптотического поведения $I_t(\alpha, \beta; v)$ можно использовать аппроксимацию $\mathcal{E}_t(\delta v) \sim (1 + a_t)^\delta \pi_\infty(\delta)$. Следовательно, для достаточно больших t

$$I_t(\alpha; v) \sim (1 + a_t)^{1-2\alpha} (\pi_\infty(-\alpha))^{-1/\alpha} \alpha^2 \int_0^t (1 + a_{s-})^{2\alpha-2} da_s. \quad (\text{A.15})$$

Заметим, что в (А.15) также использовано соотношение $(\mathcal{E}_s(-\alpha))^{-2} = (1 + a_{s-})^{2\alpha} (1 + \Delta v_s)^{2\alpha} (\pi_t(-\alpha))^{-2}$ и для достаточно большого t имеем $(\mathcal{E}_s(-\alpha))^{-2} \sim (1 + a_{s-})^{2\alpha} (\pi_\infty(-\alpha))^{-2}$, так как $\Delta v_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Из предположения $2\alpha > 1$ и того, что $(1 + a_t)^{1-2\alpha} \rightarrow 0$, следует, что интеграл $I_t(\alpha, \beta; v)$ имеет конечный предел, если выражение $(1 + a_t)^{1-2\alpha} \int_0^t (1 + a_{s-})^{2\alpha-2} da_s$ имеет конечный предел. Последнее верно в силу (А.11). Следовательно, справедливо соотношение

$$\lim_t I_t(\alpha, \beta; v) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} (\pi_\infty(-\alpha; v))^{-1/\alpha},$$

а вместе с ним и (А.13).

А.4. В этом заключительном разделе рассматривается выражение $\mathcal{E}(\alpha v(r))$, где $v(r)$ определяется в (А.1). Полагаем, что $0 < r < 1$ и $\alpha > -1$. Из (А.7) имеем

$$\mathcal{E}_t(\alpha v(r)) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{1-r} ((1 + a_t)^{1-r} - 1) \right\} \rho_t(\alpha; v(r)), \quad (\text{A.16})$$

где

$$\rho_t(\alpha; v(r)) := \prod_{s \leq t} \left(1 + \frac{\alpha \Delta a_s}{(1 + a_{s-})^r} \right) \exp \left\{ - \frac{\alpha}{1-r} \Delta(1 + a_s)^{1-r} \right\}.$$

Заметим, что из равенства $\ln y = \lim_{r \rightarrow 0} y^r - 1/r$, выполненного для $y > 0$, легко вывести, что $\lim_{r \rightarrow 1} \mathcal{E}_t(\alpha v(r)) = \mathcal{E}_t(\alpha v)$.

v.r Пусть для $0 < r < 1$ функция a удовлетворяет условию:

$$\int_0^\infty (1 + a_{s-})^{-2r} d[a, a]_s < \infty.$$

Лемма А.4. Допустим, что выполнены условия **v.1** и **v.r**. Тогда

$$\lim_t \left\{ \mathcal{E}_t(\alpha v(r)) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{1-r} ((1 + a_t)^{1-r} - 1) \right\}^{-1} \right\} = \rho_\infty(\alpha; v(r)). \quad (\text{A.17})$$

Доказательство. Надо показать, что $0 < \rho_\infty(\alpha; v(r)) < \infty$. Для достаточно больших t имеем, что

$$\left| \ln \left(1 + \frac{\alpha \Delta a_t}{(1 + a_{t-})^r} \right) - \frac{\alpha}{1-r} \Delta (1 + a_t)^{1-r} \right| \leq C(\alpha, r) ((1 + a_{t-})^{-2r} + (1 + a_{t-})^{-(1+r)}) (\Delta a_t)^2,$$

и это вместе с предположением **v.r** доказывает, что $0 < \rho_\infty(\alpha; v(r)) < \infty$. Лемма доказана.

Прежде чем мы продолжим, допустим, что функция a непрерывна, $a_0 = 0, a_\infty = \infty$. Далее, нетрудно проверить, что

$$(1 + a_t)^r \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{1-r} (1 + a_t)^{1-r} \right\} \times \int_0^t (1 + a_s)^{-2r} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{1-r} (1 + a_s)^{1-r} \right\} da_s \longrightarrow \frac{1}{2\alpha}$$

при $t \rightarrow \infty, \alpha > 0$ и $0 < r < 1$. Возьмем $\mathcal{E}(r\alpha) = \mathcal{E}(\alpha v(r))$ и

$$J_t(\alpha; v(r)) := (1 + a_t)^r \mathcal{E}_t^2(-r\alpha) \int_0^t (1 + a_{s-})^{-2r} \mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha) da_s.$$

Лемма А.5. Пусть выполнены условия **v.1** и **v.r**. Тогда при $\alpha > 0$ и $0 < r \leq 1$

$$J_t(\alpha; v(r)) \longrightarrow \frac{1}{2\alpha} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.18})$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем $db_t^2 = 2b_{t-}db_t + d[b, b]_t$ для любой $\text{c\grave{a}dl\grave{a}g}$ функции b ограниченной вариации. Вспомним также, что обратная функция $(\mathcal{E}(b))^{-1} := \mathcal{E}^{-1}(b)$ стохастической экспоненты удовлетворяет уравнению $d\mathcal{E}_t^{-1}(b) = -\mathcal{E}_t^{-1}db_t$. Применим эти две формулы, чтобы получить

$$d\mathcal{E}_t^{-2}(-r\alpha) = \frac{2\alpha}{(1 + a_{t-})^r} \mathcal{E}_t^{-2}(-r\alpha) da_t + \frac{3\alpha^2}{(1 + a_{t-})^{2r}} \mathcal{E}_t^{-2}(-r\alpha) \Delta a_t da_s. \quad (\text{A.19})$$

Из условия v.r и леммы Кронекера легко видеть, что

$$(1 + a_t)^r \mathcal{E}_t^2(-r\alpha) \sum_{s \leq t} \frac{\mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha)}{(1 + a_{s-})^{3r}} (\Delta a_s)^2 \rightarrow 0. \quad (\text{A.20})$$

Следовательно, ввиду (A.19) и (A.20), выражение $J_t(\alpha; v(r))$ имеет тот же предел, что и выражение

$$(1 + a_t)^r \mathcal{E}_t^2(-r\alpha) \frac{1}{2\alpha} \int_0^t (1 + a_{s-})^{-r} d\mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha). \quad (\text{A.21})$$

Кроме того, интегрированием по частям получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^t (1 + a_{s-})^{-r} d\mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha) &= (1 + a_t)^{-r} \mathcal{E}_t^{-2}(-r\alpha) - 1 \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha) d\left(\frac{1}{(1 + a_s)^r}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, для доказательства (A.18) надо показать, что

$$(1 + a_t)^r \mathcal{E}_t^2(-r\alpha) \int_0^t \mathcal{E}_s^{-2}(-r\alpha) d\left(\frac{1}{(1 + a_s)^r}\right) \rightarrow 0. \quad (\text{A.22})$$

Для проверки этого используем снова интегрирование по частям и аналогичные аргументы. Лемма доказана.

Положим

$$H_t(\alpha; v(r)) := (1 + a_t)^{r/2} \mathcal{E}_t(-\alpha; r) \int_0^t (\mathcal{E}_s(-\alpha; r))^{-1} \frac{1}{(1 + a_{s-})^{r+\alpha}} da_s.$$

Лемма А.6. Пусть выполнено условие v.r и $0 < r \leq 1$, $\alpha > 1 - r/2$. Тогда

$$H_t(\alpha; v(r)) \rightarrow 0. \quad (\text{A.23})$$

Доказательство следует из леммы А.1 и того факта, что $\mathcal{E}_t(-\alpha; r)(\mathcal{E}_s(-\alpha; r))^{-1} \leq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caines P. E. Linear Stochastic Systems. New York: Wiley, 1988.
2. Chen H. F. Asymptotically efficient stochastic approximation. — Stochastics Stochastics Rep., 1993, v. 45, p. 1-16.
3. Dellacherie C., Meyer P.-A. Probabilities and Potential B. Amsterdam: North-Holland, 1982.
4. Gyöngy I., Krylov N. V. On stochastic equations with respect to semimartingales. — Stochastics, 1980, v. 4, p. 1-21.

5. Hall P., Heyde C. *Martingale Limit Theory with Applications*. New York: Wiley, 1980.
6. Jacod J. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.
7. Jacod J., Shiryaev A. N. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
8. Le Breton A. About the averaging approach in Gaussian schemes for stochastic approximation. — *Math. Methods Statist.*, 1993, v. 2, № 3, p. 295–315.
9. Le Breton A., Novikov A. A. Averaging for estimating covariances in stochastic approximation. — *Math. Methods Statist.*, 1994, v. 3, № 3, p. 244–266.
10. Лунцер П. Ш., Ширяев А. Н. *Теория мартингалов*. М.: Наука, 1986.
11. Крылов Н. В., Розовский Б. Л. О стохастических эволюционных уравнениях. — *Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем.*, 1979, т. 14, с. 77–146.
12. Мельников А. В. Процедуры стохастической аппроксимации для семимартингалов. — В сб.: *Статистика и управление случайными процессами*. М.: Наука, 1989, с. 147–156.
13. Мельников А. В. Стохастические дифференциальные уравнения: негладкость коэффициентов, регрессионные модели и стохастическая аппроксимация. — *Успехи матем. наук*, 1996, т. 51, № 5, с. 43–136.
14. Melnikov A. V., Rodkina A. E., Valkeila E. On a general class of stochastic approximation algorithms. — In: *Proceedings of the Third Finnish-Soviet Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics*. Ed. by H. Niemi et al. Moscow: TVP, 1992, p. 183–196.
15. Nevel'son M. B., Hasminskii R. Z. *Stochastic Approximation and Recursive Estimation*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1973.
16. Поляк Б. Т. Новый метод стохастической аппроксимации. — *Автоматика и телемеханика*, 1990, т. 3, с. 937–946.
17. Polyak B., Juditsky A. Acceleration of stochastic approximation by averaging. — *SIAM J. Control Optim.*, 1992, v. 30, № 4, p. 838–855.
18. Robbins H., Siegmund D. A convergence theorem for nonnegative almost supermartingales and some applications. — In: *Optimization Methods in Statistics*. Ed. by J. S. Rustagi. New York: Academic Press, 1971, p. 233–257.
19. Ruppert D. *Efficient Estimators from a Slowly Convergent Robbins-Monro Process*. Technical report 781. Cornell University, 1988.
20. Schwartz H. R. *Numerical Analysis — A Comprehensive Introduction*. New York: Wiley, 1989.
21. Spreij P. Recursive approximate maximum likelihood estimation for a class of counting process models. — *J. Multivariate Anal.*, 1989, v. 39, p. 236–247.
22. Yin G., Gupta I. On a continuous time stochastic approximation problem. — *Acta Appl. Math.*, 1993, v. 33, p. 3–20.
23. Lazrieva N., Sharia T., Toronjadze T. The Robbins-Monro type stochastic differential equations. — *Stochastics*, 1997, v. 61, p. 67–87.
24. Гапошкин В. Г., Красулина Т. П. О законе повторного логарифма для процессов стохастической аппроксимации. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, т. XIX, в. 4, с. 879–886.
25. Екушов А. И. О сильном принципе инвариантности и некоторых его применениях. — *Успехи матем. наук*, 1984, т. 39, № 4, с. 157–158.
26. Екушов А. И. Сильный принцип инвариантности для семимартингалов: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.

Поступила в редакцию
17.VII.1997

Исправленный вариант
11.XI.1998