Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц, О предельных теоремах типа “почти наверное”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 328–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:37:27

© 1999 г.

ИБРАГИМОВ И. А. *, ЛИФШИЦ М. А. **

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ
ТИПА «ПОЧТИ НАВЕРНОЕ»¹⁾

По последовательности случайных векторов $\{\zeta_k\}$ можно построить эмпирические распределения вида $Q_n = (\ln n)^{-1} \sum_{k=1}^n \delta_{\zeta_k}/k$. Утверждения о сходимости этих или подобных им распределений с вероятностью единица к некоторому предельному распределению называются предельными теоремами типа «почти наверное». Мы предлагаем несколько методов, позволяющих легко выводить предельные теоремы типа «почти наверное» из классических предельных теорем, доказываем принцип инвариантности типа «почти наверное», исследуем сходимость обобщенных моментов. В отличие от большинства предшествующих работ, где рассматривается только сходимость к нормальному закону, многие наши результаты применимы и в случае предельных распределений общего вида.

Ключевые слова и фразы: предельные теоремы, сходимость почти наверное, суммы независимых величин, слабая зависимость, принцип инвариантности.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots\} \quad (1.1)$$

— последовательность случайных векторов в $\mathbb{R}^d$. Допустим, что для сумм этих векторов справедливо предельное соотношение следующего типа: найдутся такие нормирующие постоянные A_n и B_n , что распределения нормированных сумм

$$\zeta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n \quad (B_n > 0, A_n \in \mathbb{R}^d) \quad (1.2)$$

*С.-Петербургское отделение Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; e-mail: ibr.32@pdmi.ras.ru

**С.-Петербургский государственный университет, Старый Петергоф, Библиотечная пл. 2, 198904 С.-Петербург, Россия; e-mail: lifts@mail.rcsom.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, DFG и INTAS, гранты 96-01-00096, 96-15-96199, 95-0099.

сходятся к распределению G в $\mathbf{R}^d$, т.е.

$$P_n(\mathcal{A}) = P\{\zeta_n \in \mathcal{A}\} \longrightarrow G(\mathcal{A}) \quad (1.3)$$

для всех борелевских множеств $\mathcal{A}$ таких, что $G(\partial\mathcal{A}) = 0$. Говоря о сходимости распределений, мы всегда будем иметь в виду сходимость (1.3) и обозначать ее $P_n \Rightarrow G$.

Обозначим $1_{\mathcal{A}}(\cdot)$ индикатор множества $\mathcal{A}$ и определим случайные распределения Q_n в $\mathbf{R}^d$ равенствами

$$Q_n(\mathcal{A}) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} 1_{\mathcal{A}}(\zeta_k), \quad \gamma(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (1.4)$$

Часто в этом определении заменяют $\gamma(n)$ на эквивалентную величину $\ln n$. Мы скажем, что для нормированных сумм выполняется вариант предельной теоремы (1.3) типа «почти наверное», если

$$P\{Q_n \Rightarrow G\} = 1. \quad (1.5)$$

Это утверждение очень напоминает классическую теорему Гливенко-Кантелли о сходимости эмпирических распределений.

Первые варианты центральной предельной теоремы почти наверное доказали около десяти лет тому назад* Г. Брозамлер [17] и П. Шатте [24]. Именно, эти авторы установили для независимых одинаково распределенных случайных величин в $\mathbf{R}^1$ с $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$, $E|\xi_k|^{2+\delta} < \infty$, что с вероятностью 1 для всех x верно

$$\lim_n \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} 1_{(-\infty, x)} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k \xi_j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (1.6)$$

К настоящему времени появилось довольно много работ, посвященных предельным теоремам почти наверное, связанным со сходимостью к гауссовскому распределению, см., например, [12]–[14], [16], [19], [22], [23] и дальнейшую литературу, цитированную в этих работах, а также обзорную статью [15]. В сообщении первого автора [5] было отмечено, что соотношения типа (1.5), (1.6) могут быть доказаны классическими методами теории предельных теорем, развитыми в 30-е годы в духе монографий [3], [11], [18]. Близкий подход был использован ранее в работе Шатте [24, с. 252].

Ниже представлен еще более элементарный метод доказательства предельных теорем типа почти наверное. Его основные элементы изложены далее в этом параграфе; в § 2 доказываются разного рода теоремы для конкретных G из (1.3); в § 3–4 предлагаются некоторые обобщения основной задачи.

* Интересно отметить, что соотношение типа (1.5), причем даже в применении к мартингал-разностям, упомянуто (правда, без доказательства) в знаменитой книге П. Леви [18] (гл. VIII, п. 71).

1.2. Метод характеристических функций. Мы начнем с результатов, в которых не будет использоваться конкретный вид (1.2) последовательности векторов ζ_n .

Обозначим $g(t)$ характеристическую функцию распределения G из (1.3). Будем сравнивать ее с характеристической функцией распределения Q_n , имеющей вид

$$q_n(t) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e^{i(t, \zeta_k)}.$$

Положим

$$\Delta_n(t) = q_n(t) - g(t). \quad (1.7)$$

Теорема 1.1. Пусть ζ_n — последовательность случайных векторов в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условию (1.3). Тогда для справедливости (1.5) необходимо, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}^d$ выполнялось условие $E|\Delta_n(t)| \rightarrow 0$, и достаточно, чтобы для любого $r > 0$ выполнялось

$$\sup_{|t| \leq r} \sum_n \frac{E|\Delta_n(t)|^2}{n \ln n} < \infty. \quad (1.8)$$

З а м е ч а н и е. Условие (1.8) выполняется, если при некотором $a > 1$ $E|\Delta_n(t)|^2 = O((\ln \ln n)^{-a})$ равномерно по t на ограниченных множествах.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1. Необходимость условия $E|\Delta_n(t)| \rightarrow 0$ для выполнения (1.5), согласно теореме о мажорированной сходимости, вытекает из поточечной сходимости $\Delta_n(t) \rightarrow 0$ и равномерной ограниченности функций $\Delta_n(\cdot)$. Вторая часть теоремы 1.1 получается из следующего достаточного условия сходимости распределений в терминах характеристических функций.

Лемма 1.1. Пусть $\{F_n\}$, F — вероятностные распределения в $\mathbb{R}^d$ с характеристическими функциями $\{f_n(t)\}$, $f(t)$ соответственно. Если

(i) для всех t из некоторого плотного в $\mathbb{R}^d$ множества T

$$\lim_n f_n(t) = f(t), \quad (1.9)$$

(ii) для всех r из некоторого счетного множества $R = \{r_j\}$, $r_j > 0$, $r_j \rightarrow 0$,

$$\lim_n \int_{|t| \leq r} f_n(t) dt = \int_{|t| \leq r} f(t) dt, \quad (1.10)$$

то распределения F_n сходятся к F .

Доказательство. Воспользуемся следующим неравенством: если G — распределение в $\mathbf{R}^d$ с характеристической функцией g , то

$$G\{x: |x| \leq r^{-2}\} \geq \frac{1}{m(r)} \int_{|t| \leq r} g(t) dt - c_d r^{d+1/2}, \quad (1.11)$$

где $m(r)$ обозначает объем шара $\{t: |t| \leq r\}$, а постоянная c_d зависит* лишь от размерности d . Доказательство неравенства (1.11) для размерности $d = 1$ можно найти, например, в [3, с. 59]. Общий случай доказывается вполне аналогично. Из неравенства (1.11) и условия (ii) леммы 1.1 следует, что семейство мер $\{F_n\}$ плотно, так что оно относительно компактно в топологии слабой сходимости. С другой стороны, единственным возможным предельным элементом для $\{F_n\}$ по условию (i) является F . Лемма доказана.

Теперь, чтобы доказать теорему 1.1, нам достаточно убедиться в справедливости двух следующих утверждений.

Лемма 1.2. Если выполнено (1.8), то для всех $t \in \mathbf{R}^d$ верно

$$\mathbf{P}\left\{\lim_n q_n(t) = g(t)\right\} = 1. \quad (1.12)$$

Лемма 1.3. Если выполнено (1.8), то для всех положительных r верно

$$\mathbf{P}\left\{\lim_n \int_{|t| \leq r} q_n(t) dt = \int_{|t| \leq r} g(t) dt\right\} = 1. \quad (1.13)$$

Доказательство леммы 1.2. Зафиксируем $t \in \mathbf{R}^d$, $h > 1$, построим последовательность $n(j) = [e^{hj}]$ и блоки натуральных чисел $I_j = (n(j), n(j+1)]$. Заметим, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n \in I_j} (n \ln n)^{-1} = \ln h > 0. \quad (1.14)$$

Для каждого непустого блока I_j найдется такой индекс $\nu(j) \in I_j$, что

$$\mathbf{E} |\Delta_{\nu(j)}(t)|^2 = \min_{n \in I_j} \mathbf{E} |\Delta_n(t)|^2 \leq \left(\sum_{n \in I_j} \frac{1}{n \ln n} \right)^{-1} \sum_{n \in I_j} \frac{\mathbf{E} |\Delta_n(t)|^2}{n \ln n}.$$

Тогда из (1.8) и (1.14) следует, что $\sum_j \mathbf{E} |\Delta_{\nu(j)}(t)|^2 < \infty$, и по лемме Бореля–Кантелли

$$\mathbf{P}\left\{\lim_j \Delta_{\nu(j)}(t) = 0\right\} = 1. \quad (1.15)$$

* Начиная с этого момента условимся посредством c, C с индексами или без них обозначать числовые множители (константы), не обязательно одни и те же даже в пределах одной формулы, значения которых безразличны для наших выкладок.

Далее, для $n \in I_j$ имеем

$$\begin{aligned} |q_n(t) - q_{n(j)}(t)| &\leq \left| \frac{\gamma(n(j))}{\gamma(n)} - 1 \right| |q_{n(j)}(t)| + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{n(j)+1}^n \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{2[\gamma(n(j+1)) - \gamma(n(j))]}{\gamma(n(j))} \leq (h-1)c, \end{aligned}$$

так что

$$\sup_j \sup_{n \in I_j} |\Delta_n(t) - \Delta_{\nu(j)}(t)| \leq (h-1)c. \quad (1.16)$$

Соединяя (1.15) с (1.16) и учитывая, что h можно выбрать сколь угодно близким к единице, получаем утверждение леммы 1.2.

Доказательство леммы 1.3 аналогично: определяя $n(j)$, I_j как и выше, выберем $\nu(j) \in I_j$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_{|t| \leq r} |\Delta_{\nu(j)}(t)|^2 dt &= \min_{n \in I_j} \mathbf{E} \int_{|t| \leq r} |\Delta_n(t)|^2 dt \\ &\leq \left(\sum_{n \in I_j} \frac{1}{n \ln n} \right)^{-1} \sum_{n \in I_j} \frac{\mathbf{E} \int_{|t| \leq r} |\Delta_n(t)|^2 dt}{n \ln n}. \end{aligned}$$

Тогда из (1.8) и (1.14) следует, что $\sum_j \mathbf{E} \int_{|t| \leq r} |\Delta_{\nu(j)}(t)|^2 dt < \infty$. В силу неравенства Гёльдера

$$\mathbf{E} \left| \int_{|t| \leq r} \Delta_{\nu(j)}(t) dt \right|^2 \leq m(r) \mathbf{E} \int_{|t| \leq r} |\Delta_{\nu(j)}(t)|^2 dt,$$

и по лемме Бореля–Кантелли

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_j \int_{|t| \leq r} \Delta_{\nu(j)}(t) dt = 0 \right\} = 1. \quad (1.17)$$

Соединяя (1.17) с (1.16) и учитывая, что h можно выбрать сколь угодно близким к единице, получаем утверждение леммы 1.3.

З а м е ч а н и е. Пусть $\{g_k(t)\}$ — какая-нибудь последовательность характеристических функций такая, что $g_k(t) \rightarrow g(t)$ при всех t (такая сходимость всегда равномерна на ограниченных подмножествах $\mathbf{R}^d$). Заключение теоремы 1.1 останется в силе, если мы заменим в ее формулировке $\Delta_n(t)$ на $\Delta_n^0(t) = |(\gamma(n))^{-1} \sum_{k=1}^n (e^{i(t, \zeta_k)} - g_k(t)) / k|$. Действительно, для всех t

$$\lim_n \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} g_k(t) = g(t),$$

так что $\Delta_n^0(t) - \Delta_n(t) \rightarrow 0$.

§ 2. Суммы независимых и слабо зависимых векторов

В этом параграфе мы приведем несколько конкретных примеров использования теоремы 1.1 для доказательства аналогов типа «почти наверное» ряда известных предельных теорем для сумм независимых или слабо зависимых случайных векторов.

2.1. Суммы независимых векторов.

Теорема 2.1. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что

(i) *распределения нормированных сумм*

$$\zeta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n, \quad (2.1)$$

где B_n — скалярные нормирующие множители, сходятся при $n \rightarrow \infty$ к распределению G в $\mathbb{R}^d$;

(ii) *существует число $a \in (0, 1]$ такое, что*

$$\sup_n \mathbb{E} |\zeta_n|^a < \infty; \quad (2.2)$$

(iii) *сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2 B_k^a} \sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{l}. \quad (2.3)$$

Тогда распределения

$$Q_n(\mathcal{A}) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(\zeta_k) \quad (2.4)$$

сходятся с вероятностью 1 к распределению G .

З а м е ч а н и е 2.1. Условие (iii) будет выполнено, если при некотором $p > 1$

$$\sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{l} = O\left(\frac{B_k^a \ln k}{(\ln \ln k)^p}\right).$$

З а м е ч а н и е 2.2. Похожий результат имеется в [16], где вместо (2.2) присутствует даже несколько более слабое условие типа $\sup_n \mathbb{E} (\log \log |\zeta_n|)^{1+\delta} < \infty$, но условие, заменяющее там (2.3), более ограничительно.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Обозначим через $g_k(t)$ характеристическую функцию суммы ζ_k : $g_k(t) = \mathbb{E} e^{i(t, \zeta_k)}$, и составим выражение

$$\Delta_n^0(t) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left[e^{i(t, \zeta_k)} - g_k(t) \right].$$

Тогда

$$\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2 = \frac{1}{\gamma(n)^2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{1}{kl} \left[\mathbf{E} e^{i(t, \zeta_k - \zeta_l)} - g_k(t) g_l(-t) \right].$$

Очевидно, для $k > l$

$$\zeta_k = \frac{B_l}{B_k} \zeta_l + \frac{1}{B_k} \sum_{l+1}^k \xi_j + \frac{B_l}{B_k} A_l - A_k = \frac{B_l}{B_k} \zeta_l + \eta_{k,l},$$

причем величины ζ_l и $\eta_{k,l}$ независимы. Для любого $t \in \mathbf{R}^d$ отсюда следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{i(t, \zeta_k - \zeta_l)} &= \mathbf{E} e^{i(t, \eta_{k,l})} \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(t, \frac{B_l - B_k}{B_k} \zeta_l \right) \right\} \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(t, \zeta_k - \frac{B_l}{B_k} \zeta_l \right) \right\} \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(-t, \zeta_l - \frac{B_l}{B_k} \zeta_l \right) \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая первый сомножитель с $g_k(t)$, а второй — с $g_l(-t)$, находим

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} \exp \{ i(t, \zeta_k - \zeta_l) \} - g_k(t) g_l(-t)| &\leq 2\mathbf{E} \left| \exp \left\{ i \left(t, \frac{B_l}{B_k} \zeta_l \right) \right\} - 1 \right| \\ &\leq c |t|^a \frac{B_l^a}{B_k^a} \mathbf{E} |\zeta_l|^a \leq c |t|^a \frac{B_l^a}{B_k^a}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поэтому

$$\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2 \leq \frac{c |t|^a}{\gamma(n)^2} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k B_k^a} \sum_{1 \leq l \leq k} \frac{B_l^a}{l}.$$

Соответственно, с учетом (iii),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2}{n \ln n} \leq c |t|^a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{k (\ln k)^2 B_k^a l} < \infty.$$

Ссылка на теорему 1.1 завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 2.3. Теорема 2.1 останется справедливой также, если разрешить матричные нормировки, заменив ряд (2.3) на

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|B_k^{-1}\|^a}{k (\ln k)^2} \sum_{l=1}^k \frac{\|B_l\|^a}{l},$$

где $\|\cdot\|$ — какая-нибудь матричная норма.

З а м е ч а н и е 2.4. В формулировке теоремы не предполагается, что слагаемые ξ_k/B_n предельно постоянны, так что ее можно применять и к предельным теоремам в неклассической постановке в терминологии В. М. Золотарева (см. [4]).

Теорема 2.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы в $\mathbf{R}^d$ с нулевым средним и корреляционной матрицей $\mathcal{R}$. Положим $\zeta_n = n^{-1/2} \sum_1^n \xi_k$. Тогда эмпирические распределения Q_n , определенные в (2.4), сходятся с вероятностью 1 к нормальному распределению G в $\mathbf{R}^d$ с нулевым средним и корреляционной матрицей $\mathcal{R}$.

Доказательство. Действительно, здесь выполняются все условия теоремы 2.1. Во-первых, распределения векторов ζ_n сходятся к G ; во-вторых, $\mathbf{E}|\zeta_n| \leq (\mathbf{E}|\zeta_n|^2)^{1/2} = c < \infty$; наконец, $\sum_{l=1}^k B_l/l = \sum_{l=1}^k 1/\sqrt{l} \leq c\sqrt{k} = cB_k$.

Одномерная версия этой теоремы имеется в работе [19]. Многомерные же результаты такого рода нам не встречались (впрочем, в [19] указано на возможность векторных обобщений).

Теорема 2.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины из области притяжения устойчивого закона G_α с показателем α , так что распределения нормированных сумм $\zeta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n$ сходятся к G_α . Тогда

$$\mathbf{P}\{Q_n \Rightarrow G_\alpha\} = 1.$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 2.1. Отметим, во-первых, что для любого $a < \alpha$ верно $\sup_n \mathbf{E}|\zeta_n|^a < \infty$ (см., например, [6, гл. V, § 2]). Далее, нормирующие множители имеют вид $B_n = n^{1/\alpha} L(n)$, где $L(\cdot)$ — функция, медленно меняющаяся в смысле Карамата (см. [6, гл. II, § 6]). Всякая такая функция может быть представлена при $n \rightarrow \infty$ в виде

$$L(n) = c(1 + o(1)) \exp \left\{ \int_1^n \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\},$$

где $c > 0$ и $\lim_{u \rightarrow \infty} \varepsilon(u) = 0$ (см. [6, приложение 1]). Из этого представления следует, что для любого $\beta > 0$

$$\frac{L(l)}{L(k)} \leq \frac{C_\beta k^\beta}{l^\beta}, \quad k \geq l. \quad (2.6)$$

Поэтому, выбирая β достаточно малым, найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{l} &= L(k)^a \sum_{l=1}^k l^{a/\alpha-1} \left(\frac{L(l)}{L(k)} \right)^a \leq C L(k)^a k^{\beta a} \sum_{l=1}^k l^{a/\alpha-1-\beta a} \\ &\leq C L(k)^a k^{\frac{a}{\alpha}} = C B_k^a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условие (iii) проверено, и теорема 2.3 доказана.

Результаты для схем с предельным устойчивым законом, подобные доказанному, имеются в [16], [19], [21].

Пример 2.1. Допустим, что $B_n \asymp e^{a(\ln n)^\nu}$, $a > 0$, $\nu \in (0, 1)$, и покажем, что в этом случае выполняется условие (iii) теоремы 2.1. Действительно, здесь

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k \frac{B_l}{l} &\leq c \int_1^k e^{a(\ln x)^\nu} x^{-1} dx = c \int_0^{(\ln k)^\nu} e^{ay} y^{\frac{1}{\nu}-1} dy \\ &\leq c e^{c_0(\ln k)^\nu} (\ln k)^{1-\nu} \leq c B_k (\ln k)^{1-\nu}. \end{aligned}$$

Пример 2.2. Пусть теперь $B_n \sim (\ln n)^p$, $p > 0$. Условие (iii), очевидно, не выполняется. При этом может оказаться, что и меры Q_n не сходятся к G . Пусть, например, $W(t)$ — винеровский процесс, $U(\tau) = e^{-\tau/2} W(e^\tau)$ — соответствующий процесс Орнштейна–Уленбека и $t_k = (\ln k)^{2p}$. Определим $\xi_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ и $B_n = \sqrt{t_{n+1}}$. Тогда распределения величин $\zeta_n = U(\ln t_{n+1})$ совпадают с $G = \mathcal{N}(0, 1)$. Несмотря на это, последовательность мер Q_n сходитьсь не будет. Действительно, пусть $\tau_n = \ln t_{n+1} = 2p \ln \ln(n+1)$, и $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^1$ — произвольный интервал. Рассмотрим события $\Omega_n = \{\omega: U([\tau_n - 1, \tau_n]) \subset \mathcal{A}\}$. Для любого $\omega \in \Omega_n$ имеем

$$Q_n(\mathcal{A}) \geq \frac{1}{\gamma_n} \sum_k \frac{1}{k} \mathbf{1}_{\{k \leq n, \tau_k \geq \tau_n - 1\}} \geq \frac{1}{\gamma_n} \sum_k \frac{1}{k} \mathbf{1}_{\{n^c \leq k \leq n\}} \geq c > 0.$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\limsup_n \Omega_n\} = 1$, получаем, что $\limsup_n Q_n(\mathcal{A}) \geq c$ п.н. Ввиду произвольности $\mathcal{A}$ отсюда видно, что предел $\lim_n Q_n$ не существует.

2.2. Эмпирические меры с модифицированными весами.

Пример 2.2 подсказывает, что иногда определение меры Q_n следует изменять с учетом поведения последовательности B_n . Например, можно рассмотреть

$$Q_n^*(\mathcal{A}) = \frac{1}{\gamma^*(n)} \sum_{k=2}^n b_k \mathbf{1}_{\{\zeta_k \in \mathcal{A}\}}, \quad \gamma^*(n) = \sum_{k=2}^n b_k,$$

где $b_k = (B_k - B_{k-1})/B_k$. В этом случае сходимость почти наверное верна при еще более слабых предположениях:

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия (i), (ii) теоремы 2.1 и $B_n \nearrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{Q_n^* \Rightarrow G\} = 1.$$

Доказательство. Пусть q_n^* — характеристическая функция распределения Q_n^* . Положим

$$\Delta_n^*(t) = q_n^*(t) - \frac{1}{\gamma^*(n)} \sum_{k=2}^n b_k g_k(t), \quad \delta_n(t) = \frac{1}{\gamma^*(n)} \sum_{k=2}^n b_k g_k(t) - g(t).$$

В силу (i) детерминированная последовательность δ_n сходится к нулю равномерно на компактах. Оценивая величину $\Delta_n^*(t)$ с помощью (2.5), получим

$$\mathbf{E} |\Delta_n^*(t)|^2 \leq \frac{c|t|^a}{\gamma^*(n)^2} \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{b_k}{B_k^a} \sum_{2 \leq l \leq k} b_l B_l^a.$$

Заметим, что

$$\sum_{2 \leq l \leq k} b_l B_l^a = \sum_{2 \leq l \leq k} (B_l - B_{l-1}) B_l^{a-1} \leq c \sum_{2 \leq l \leq k} (B_l^a - B_{l-1}^a) \leq c B_k^a,$$

откуда следует $\mathbf{E} |\Delta_n^*(t)|^2 \leq c|t|^a/\gamma^*(n)$. Определим последовательность $n(j)$ соотношением

$$n(j) = \inf \{n: \gamma^*(n) \geq j^2\}. \quad (2.8)$$

Тогда $\gamma^*(n(j)) \in [j^2, j^2 + 1]$, и мы имеем $\mathbf{E} |\Delta_{n(j)}^*(t)|^2 \leq c|t|^a/j^2$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{P}\{\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_{n(j)}^*(t) = 0\} = 1$. Далее, для каждого $n \in [n(j) + 1, n(j+1)]$ верно

$$\begin{aligned} |q_n^*(t) - q_{n(j)}^*(t)| &\leq \left| \frac{\gamma^*(n(j))}{\gamma^*(n)} - 1 \right| |q_{n(j)}^*(t)| + \frac{1}{\gamma^*(n)} \sum_{k=n(j)+1}^n b_k \\ &\leq \frac{2[\gamma^*(n(j+1)) - \gamma^*(n(j))]}{\gamma^*(n(j))} \leq \frac{c}{j}. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого фиксированного t $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^*(t) = g(t)\} = 1$. Аналогично, для каждого $r > 0$ будем иметь

$$\mathbf{E} \left(\int_{|t| \leq r} |\Delta_{n(j)}^*(t)| dt \right)^2 \leq \frac{cm(r)r^a}{j^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|t| \leq r} |\Delta_{n(j)}^*(t)| dt = 0 \right\} &= 1, \\ \mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \leq r} |q_n^*(t) - g(t)| dt = 0 \right\} &= 1. \end{aligned}$$

Остается сослаться на лемму 1.1, и это завершает доказательство теоремы 2.4.

З а м е ч а н и е 2.5. При суммировании одинаково распределенных величин, как в теоремах 2.2 или 2.3, будем иметь $b_k \sim ck^{-1}$. Поэтому в этих и других подобных случаях между мерами Q_n и Q_n^* нет особой разницы (расстояние по вариации между ними стремится к нулю). Однако пример 2.2, где $b_k \sim p(k \ln k)^{-1}$, обнаруживает преимущества меры Q_n^* .

З а м е ч а н и е 2.6. Иногда структуру весов можно упростить, произведя прореживание последовательности $\{\zeta_k\}$. Например, при суммировании одинаково распределенных величин обычно рассматривают эмпирические меры с равномерными нагрузками и экспоненциальным прореживанием $n^{-1} \sum_{k=1}^n 1_{\{\zeta_{c_k} \in A\}}$, см. [13], [24]. Результаты всегда получаются такие же, как при логарифмическом взвешивании исходной последовательности.

2.3. Суммы слабо зависимых величин. Ясно, что метод, использованный для доказательства теоремы 2.1, можно применять и к слабо зависимым величинам. Для определенности мы рассмотрим предельные теоремы для стационарных последовательностей из [6, гл. XVIII]. Пусть теперь $\{\xi_k\}$ — стационарная последовательность с $E \xi_k = 0$ и $E \xi_k^2 < \infty$. Положим $B_n^2 = E |\sum_{k=1}^n \xi_k|^2$ и будем рассматривать нормированные суммы $\zeta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$. Обозначим $\alpha(\cdot)$ коэффициент сильного перемешивания последовательности ξ , см. [6, гл. XVII]. Из теории перемешивания нам потребуется только одно неравенство [6, с. 388]: если $X = X(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $Y = Y(\xi_{n+l}, \dots)$ — две ограниченные случайные величины, то

$$|E XY - E X E Y| \leq 4\alpha(l) \sup |X| \sup |Y|. \quad (2.9)$$

Теорема 2.5. Допустим, что дисперсии $B_n^2 \rightarrow \infty$, а нормированные суммы ζ_n асимптотически нормальны с параметрами $(0, 1)$. Если при этом

$$\sum_l \frac{\alpha(l)}{l \ln l} < \infty, \quad (2.10)$$

то последовательность эмпирических мер Q_n , определенных в (2.4), сходится к стандартному нормальному распределению в R^1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова определим $\Delta_n^0(t)$ равенством

$$\Delta_n^0(t) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [e^{it\zeta_k} - g_k(t)].$$

Тогда опять

$$E |\Delta_n^0(t)|^2 = \frac{1}{\gamma(n)^2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{1}{kl} [E e^{it(\zeta_k - \zeta_l)} - g_k(t)g_l(-t)].$$

Те слагаемые, для которых $l \leq k \leq 2l$, грубо оценим величиной

$$\frac{c}{(\ln n)^2} \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{k/2 \leq l \leq k} \frac{1}{kl} \leq \frac{c}{\ln n}.$$

Для остальных слагаемых воспользуемся представлением

$$\zeta_k - \zeta_l = \frac{B_l - B_k}{B_k} \zeta_l + \varepsilon_{k,l} + \eta_{k,l},$$

где $\varepsilon_{k,l} = B_k^{-1} \sum_{j=l+1}^{2l} \xi_j$ — «межблочное» мешающее слагаемое и $\eta_{k,l} = B_k^{-1} \sum_{j=2l+1}^k \xi_j = \zeta_k - B_{2l} B_k^{-1} \zeta_{2l}$. Воспользуемся стандартным неравенством

$$\mathbf{E} |e^{itX} - 1| \leq |t| \mathbf{E} |X|, \quad (2.11)$$

и получим $|\mathbf{E} e^{it(\zeta_k - \zeta_l - \varepsilon_{k,l})} - \mathbf{E} e^{it(\zeta_k - \zeta_l)}| \leq |t| \mathbf{E} |\varepsilon_{k,l}| \leq |t| B_l / B_k$. Из (2.9) следует

$$|\mathbf{E} \exp \{it(\zeta_k - \zeta_l - \varepsilon_{k,l})\} - \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{it(B_l - B_k)}{B_k} \zeta_l \right\} \mathbf{E} e^{it\eta_{k,l}}| \leq c \alpha(l).$$

Для последнего произведения ожиданий неравенство (2.11) даст

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{it(B_l - B_k)}{B_k} \zeta_l \right\} \mathbf{E} \exp \{it\eta_{k,l}\} - g_l(-t) g_k(t) \right| \\ & \leq |t| \frac{B_l}{B_k} \mathbf{E} |\zeta_l| + \frac{B_{2l}}{B_k} \mathbf{E} |\zeta_{2l}| \leq \frac{|t|(B_l + B_{2l})}{B_k}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Суммируя все оценки, найдем

$$\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2 \leq \frac{c}{\ln n} + \frac{c}{(\ln n)^2} \sum_{1 \leq l < k \leq n} \left(\frac{|t|(B_l + B_{2l})}{kl B_k} + \frac{\alpha(l)}{kl} \right).$$

Как известно [6, с. 424], в условиях теоремы $B_n = L(n)n^{1/2}$, где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция. Поэтому можно воспользоваться оценками (2.6) и, действуя как в (2.7), получить

$$\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2 \leq \frac{c(1+|t|)}{\ln n} + \sum_{1 \leq l < k \leq n} \frac{c \alpha(l)}{kl (\ln n)^2}.$$

Для проверки условия (iii) теоремы 1.1 оценим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} |\Delta_n^0(t)|^2}{n \ln n} & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(1+|t|)}{n (\ln n)^2} + \sum_{1 \leq l < k \leq n < \infty} \frac{c \alpha(l)}{kn (\ln n)^3 l} \\ & \leq c(1+|t|) + c \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha(l)}{l \ln l} < \infty. \end{aligned}$$

Ссылка на теорему 1.1 заканчивает доказательство теоремы 2.5.

§ 3. Сходимость в метрических и линейных пространствах

3.1. Общие теоремы о сходимости. В этом параграфе мы рассмотрим предельные теоремы типа «почти наверное» для случайных элементов в пространствах более общего вида, чем $\mathbf{R}^d$. При этом имеются в виду прежде всего обобщения принципа инвариантности Донскера–Прохорова (в качестве пространств здесь могут выступать, например, $C[0, 1]$ и $D[0, 1]$). Однако большая часть нашей аргументации имеет достаточно общий характер, а начнем мы с изучения ситуации, где не используется даже линейная структура пространства.

Рассмотрим последовательность случайных элементов ζ_n , принимающих значения в некотором метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$. Соответствующие эмпирические меры определим соотношением

$$Q_n(\mathcal{A}) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} 1_{\mathcal{A}}(\zeta_k), \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{X}. \quad (3.1)$$

Напомним, что комплексный или вещественный функционал f , определенный на $\mathcal{X}$, называется ρ -липшицевым, если $|f(x) - f(y)| \leq c\rho(x, y)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$.

Теорема 3.1. Пусть ζ_n — последовательность случайных элементов сепарабельного метрического пространства $(\mathcal{X}, \rho)$, распределения которых сходятся к некоторому распределению G . Если для любого ограниченного ρ -липшицевого функционала f верно

$$\sum_n D\left(\int f dQ_n\right) (n \ln n)^{-1} < \infty, \quad (3.2)$$

то $P\{Q_n \Rightarrow G\} = 1$.

Доказательство. Сначала покажем, что для всякого ограниченного ρ -липшицевого функционала f верно

$$P\left\{\int f dQ_n \rightarrow \int f dG\right\} = 1. \quad (3.3)$$

Положим $D_n = D(\int f dQ_n)$. Зафиксируем $h > 1$, построим последовательность $n(j) = [e^{hj}]$, рассмотрим блоки $I_j = (n(j), n(j+1)]$ и в каждом непустом блоке I_j выберем индекс $\nu(j)$, реализующий $\min_{n \in I_j} D_n$. Тогда (ср. доказательство теоремы 1.1)

$$D_{\nu(j)} \leq \left(\sum_{n \in I_j} \frac{1}{n \ln n}\right)^{-1} \sum_{n \in I_j} \frac{D_n}{n \ln n} \leq c_h \sum_{n \in I_j} \frac{D_n}{n \ln n}.$$

Из (3.2) следует, что $\sum_j D_{\nu(j)} < \infty$. Поэтому

$$P\left\{\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int f dQ_{\nu_j} - E \int f dQ_{\nu_j}\right) = 0\right\} = 1.$$

Заметим, что в силу сходимости распределений ζ_n верно

$$\mathbb{E} \int f dQ_n = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbb{E} f(\zeta_k) \longrightarrow \int f dG.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \int f dQ_{\nu(j)} = \int f dG \right\} = 1. \quad (3.4)$$

Далее, для всех j и всех $n_1, n_2 \in I_j$ расстояния по вариации между мерами Q_{n_1} и Q_{n_2} ограничены величиной $(h-1)c$. Поскольку h можно выбрать сколь угодно близким к единице, то из (3.4) следует (3.3).

Пусть теперь V — произвольное открытое множество. Определим $\rho_V(x) = \inf_{y \notin V} \rho(x, y)$ и семейство ρ -липшицевых функционалов

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho_V(x) \geq \frac{1}{m}; \\ m \rho_V(x), & \text{если } \rho_V(x) \in \left[0, \frac{1}{m}\right]. \end{cases}$$

Тогда $G(V) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m dG$ и в то же время в силу (3.3) п.н.

$$\int f_m dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_m dQ_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(V).$$

Отсюда следует, что п.н.

$$G(V) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(V). \quad (3.5)$$

Это соотношение эквивалентно сходимости $Q_n \Rightarrow G$ (см. [1], теорема 2.1), если оно выполняется для *всех* открытых множеств. Мы же пока доказали его только для одного множества (или, что равносильно, для счетного набора множеств). К счастью, в сепарабельном метрическом пространстве всегда имеется* такой счетный набор открытых множеств $\mathcal{V}$, что для любого открытого $V \subset \mathcal{X}$ и любой вероятностной меры G верно $G(V) = \sup\{G(V'), V' \in \mathcal{V}, V' \subset V\}$. Соответственно, имеем $G(V) \leq \sup_{V'} \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(V') \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(V)$, п.н. и сходимость $Q_n \Rightarrow G$ обоснована полностью.

Теперь перейдем к рассмотрению сумм случайных векторов. Здесь нам, конечно, потребуется линейная структура в пространстве значений. Пусть $\mathcal{X}$ — линейное пространство, а $\mathcal{X}$ -значные случайные векторы ζ_n заданы соотношением

$$\zeta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n, \quad (3.6)$$

* В качестве такого набора можно взять конечные объединения шаров рационального радиуса с центрами в точках счетного плотного множества.

где ξ_k — последовательность независимых $\mathcal{X}$ -значных векторов, $A_n \in \mathcal{X}$ и $B_n \in \mathbf{R}_+^1$ — нормирующие последовательности.

Дополнительно предположим, что на $\mathcal{X}$ задана некоторая полунорма $\|\cdot\|$, и будем говорить, что функционал f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $a \in (0, 1]$, если

$$|f(x+y) - f(x)| \leq c\|y\|^a, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}. \quad (3.7)$$

Следующее утверждение, по существу, является абстрактной версией вычислений из теоремы 2.1.

Лемма 3.1. Пусть ζ_n — последовательность случайных элементов $\mathcal{X}$, определенная в (3.6), а функционал f удовлетворяет условию Гёльдера (3.7). Тогда для любого $n > 0$

$$\mathbf{D} \left(\int f dQ_n \right) \leq \frac{c}{(\ln n)^2} \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} \frac{B_l^a}{kl B_k^a} \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a \sup_{\mathcal{X}} |f|. \quad (3.8)$$

Доказательство. По определению,

$$\int f dQ_n = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f(\zeta_k).$$

Поэтому

$$\mathbf{D} \left(\int f dQ_n \right) = \frac{1}{\gamma(n)^2} \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} \frac{1}{kl} (\mathbf{E} f(\zeta_k) \bar{f}(\zeta_l) - \mathbf{E} f(\zeta_k) \mathbf{E} \bar{f}(\zeta_l)).$$

Воспользуемся представлением

$$\zeta_k = \frac{B_l}{B_k} \zeta_l + \left(\frac{A_l B_l}{B_k} - A_k + \frac{1}{B_k} \sum_{j=l+1}^k \xi_j \right) = \frac{B_l}{B_k} \zeta_l + \eta_{k,l}, \quad (3.9)$$

где $\eta_{k,l}$ не зависит от ζ_l . Тогда

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E} f(\zeta_k) \bar{f}(\zeta_l) - \mathbf{E} f(\zeta_k) \mathbf{E} \bar{f}(\zeta_l)| \\ & \leq |\mathbf{E} f(\zeta_k) \bar{f}(\zeta_l) - \mathbf{E} f(\eta_{k,l}) \bar{f}(\zeta_l)| + |\mathbf{E} f(\eta_{k,l}) \bar{f}(\zeta_l) - \mathbf{E} f(\zeta_k) \mathbf{E} \bar{f}(\zeta_l)| \\ & \leq \mathbf{E} |f(\zeta_k) - f(\eta_{k,l})| \sup_{\mathcal{X}} |f| + |\mathbf{E} f(\eta_{k,l}) - \mathbf{E} f(\zeta_k)| \sup_{\mathcal{X}} |f| \\ & \leq c \mathbf{E} \|\zeta_k - \eta_{k,l}\|^a \sup_{\mathcal{X}} |f| = c \frac{B_l^a}{B_k^a} \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a \sup_{\mathcal{X}} |f|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь мы можем доказать следующий полный аналог теоремы 2.1.

Теорема 3.2. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями в метрическом линейном пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$. Предположим, что

(i) *распределения нормированных сумм ζ_n , определенных в (3.6), сходятся при $n \rightarrow \infty$ к распределению G в $\mathcal{X}$;*

(ii) *существуют полунорма $\|\cdot\|$ и число $a \in (0, 1]$ такие, что $\sup_l \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a < \infty$,*

$$\rho(x, y) \leq c \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}. \quad (3.11)$$

(iii) *сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2 B_k^a} \sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{l}.$$

Тогда $\mathbf{P}\{Q_n \Rightarrow G\} = 1$.

Доказательство. Пусть f — ограниченный ρ -липшицев функционал. Тогда из неравенства (3.11) следует гёльдеровская оценка (3.7). Применяя лемму 3.1 и гипотезу (iii), найдем

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\mathbf{D}(\int f dQ_n)}{n \ln n} &\leq c \sum_{1 \leq l \leq k \leq n < \infty} \frac{B_l^a \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a}{kl B_k^a n (\ln n)^3} \sup_{\mathcal{X}} |f| \\ &\leq c \sum_{1 \leq l \leq k < \infty} \frac{B_l^a}{kl B_k^a (\ln k)^2} \sup_{\mathcal{X}} |f| < \infty. \end{aligned}$$

Теперь искомая сходимость распределений следует из теоремы 3.1.

Аналогичным образом можно обобщить теорему 2.4 об эмпирических мерах с модифицированными весами. Полагая

$$Q_n^*(\mathcal{A}) = \frac{1}{\gamma^*(n)} \sum_{k=2}^n b_k \mathbf{1}_{\{\zeta_k \in \mathcal{A}\}}, \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{X}, \quad (3.12)$$

где $b_k = B_k - B_{k-1}/B_k$, $\gamma^*(n) = \sum_{k=2}^n b_k$, получим следующий результат.

Теорема 3.3. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями в метрическом линейном пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$. Предположим, что выполнены условия (i) и (ii) теоремы 3.2 и $B_n \nearrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{Q_n^* \Rightarrow G\} = 1.$$

Доказательство вполне аналогично предыдущему: для любого ограниченного ρ -липшицева функционала из оценки (3.10) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \left(\int f dQ_n^* \right) &\leq \frac{c}{\gamma^*(n)^2} \sum_{2 \leq l \leq k \leq n} \frac{b_k B_l^{a-1} (B_l - B_{l-1})}{B_k^a} \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a \sup_{\mathcal{X}} |f| \\ &\leq \frac{c}{\gamma^*(n)^2} \sum_{2 \leq k \leq n} b_k \sup_l \mathbf{E} \|\zeta_l\|^a \sup_{\mathcal{X}} |f| \leq \frac{c}{\gamma^*(n)}. \end{aligned}$$

Разбивая натуральный ряд на блоки с помощью условия (2.8) и дословно повторяя доказательство теоремы 3.1, получим искомое утверждение.

З а м е ч а н и е 3.1. Единственное место, где мы воспользовались конкретным видом векторов $\{\zeta_n\}$, формулой (3.6), — это представление (3.9). Однако для вывода оценки (3.10) вполне достаточно иметь более общее представление вида $\zeta_k = (B_l/B_k)\pi_{k,l}(\zeta_l) + \eta_{k,l}$, где ζ_l и $\eta_{k,l}$ независимы, а оператор $\pi_{k,l}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ограничен относительно полунормы $\|\cdot\|$. При изучении принципа инвариантности встретится именно такая ситуация.

3.2. Принцип инвариантности. Пусть задана последовательность независимых случайных величин $\{\chi_j\}_{j \geq 1}$, последовательность $\{B_n\}$, числовой массив $\{a_{n,m}\}_{1 \leq m \leq n}$ и моменты времени $\{t_{n,m}\}_{1 \leq m \leq n}$, причем $0 = t_{n,0} \leq \dots \leq t_{n,m} = 1$. Положим $S_0 = 0$, $S_m = \sum_{j=1}^m \chi_j$, $1 \leq m \leq n$. В пространстве $\mathcal{X} = D = D[0,1]$ определим случайные ступенчатые функции ζ_n формулой

$$\zeta_n(t) = \frac{S_m}{B_n} - a_{n,m}, \quad t_{n,m-1} \leq t < t_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (3.13)$$

При разумном определении массива $\{t_{n,m}\}$ и нормирующих постоянных $\{B_n\}$, $\{a_{n,m}\}$ распределения ζ_n сходятся к распределению некоторого предельного процесса с независимыми приращениями. Эта сходимость называется принципом инвариантности. Напомним две типичные схемы такого рода.

П р и м е р 3.1. χ_j — центрированные величины с конечными моментами второго порядка, $E\chi_j^2 = \sigma_j^2 < \infty$. Тогда следует положить $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$; $t_{n,m} = B_m^2/B_n^2$. В качестве предельного здесь будет выступать винеровский процесс. Это — классический принцип инвариантности Донскера–Прохорова (см. [1, гл. 2–3]).

П р и м е р 3.2. χ_j — независимые одинаково распределенные величины, общее распределение которых принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона $\mathcal{G}$. Пусть $P\{S_n/B_n - A_n \in \mathcal{A}\} \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A})$, $A_n \in \mathbf{R}^1$. Тогда следует положить $t_{n,m} = m/n$, $a_{n,m} = (m/n)A_n$. Предельным процессом в этой схеме будет однородный устойчивый процесс, ассоциированный с распределением $\mathcal{G}$ (см. [10], а также [8, § 3.2]).

Принцип инвариантности типа «почти наверное» выглядит следующим образом.

Теорема 3.4. Пусть ζ_n — элементы пространства D , заданные соотношением (3.13), а эмпирические меры Q_n^* определены в (3.12). Пусть $B_n \nearrow \infty$, распределения ζ_n сходятся к некоторому предельному распределению G и для некоторого $a > 0$ выполнено условие $\sup_{n,t} E|\zeta_n(t)|^a < \infty$. Тогда

$$P\{Q_n^* \Rightarrow G\} = 1.$$

Доказательство. Будем пользоваться теоремой 3.3 и замечанием 3.1. Действительно, при $l \leq k$ между ζ_l и ζ_k есть соотношение

$$\zeta_k = \frac{B_l}{B_k} \pi_{k,l}(\zeta_l) + \eta_{k,l}, \quad (3.14)$$

где $\eta_{k,l}$ не зависит от ζ_l , а оператор $\pi_{k,l}: D \rightarrow D$ определен формулой $\pi_{k,l}(\zeta)(t) = \zeta(\tau(t))$, $\forall \zeta \in D$, при помощи кусочно-линейной функции $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, переводящей $t_{k,m}$ в $t_{l,m}$ при $m \leq l$ и в 1 при $m \geq l$. Рассматривая на D равномерную норму $\|\zeta\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\zeta(t)|$, отметим, что оператор $\pi_{k,l}$ является сжимающим относительно нее. Кроме того, для любого процесса с независимыми приращениями справедлива следующая оценка равномерной нормы.

Лемма 3.2. Пусть $\zeta_t, t \in [0, 1]$, — сепарабельный процесс с независимыми приращениями. Тогда для каждого $a > 0$ верно $E \|\zeta\|^a \leq c_a \sup_t E |\zeta(t)|^a$.

Доказательство. Положим $E = \sup_t E |\zeta(t)|^a$, $r = 2(4E)^{1/a}$. Очевидно,

$$\sup_t P \{ |\zeta(t) - \zeta(1)| > r \} \leq 2 \sup_t P \left\{ |\zeta_t| > \frac{r}{2} \right\} \leq 2E \left(\frac{r}{2} \right)^{-a} \leq \frac{1}{2}.$$

Обобщенное неравенство Колмогорова (см. [9, § 1.1, оценка (1.9)]) позволяет заключить, что при любом $R > 0$

$$P \left\{ \|\zeta\| = \sup_t |\zeta(t)| > R \right\} \leq 2P \{ |\zeta(1)| + r > R \},$$

откуда

$$E \|\zeta\|^a \leq 2E \left(|\zeta(1)| + r \right)^a \leq 2^{1+a} \left(E |\zeta(1)|^a + r^a \right) \leq c_a E.$$

Таким образом, все условия теоремы 3.3 выполнены и теорема 3.4 доказана полностью.

Все гипотезы теоремы 3.4 выполняются в примерах 3.1 и 3.2.

В примере 3.1 можно перенести рассмотрение из пространства D в пространство $C[0, 1]$. Достаточно заменить кусочно-постоянные функции ζ_n из (3.13) на соответствующие ломаные, линейные на отрезках $[t_{n,m-1}, t_{n,m}]$. Поскольку соотношение (3.14) по-прежнему имеет место, а оператор $\pi_{k,l}$ снова будет сжимающим в равномерной норме, все приведенные аргументы остаются в силе.

В примере 3.2, благодаря регулярности последовательности B_n , расстояние по вариации между мерами Q_n^* и стандартными эмпирическими мерами Q_n из (3.1) стремится к нулю. Поэтому меры Q_n тоже п.н. сходятся к G .

Принцип инвариантности почти наверное, связанный с примером 3.1, имеется в работе [12]. Результат, получающийся в схеме примера 3.2, и другие принципы инвариантности почти наверное см. в [16, § 2].

§ 4. Сходимость обобщенных функций и моментов

4.1. Обобщенные функции. Сходимость эмпирических мер Q_n из (1.4) к предельному распределению G в $\mathbf{R}^d$ можно интерпретировать как сходимость последовательности обобщенных функций

$$\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta(\cdot - \zeta_k), \quad \gamma(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

к обобщенной функции $\delta * Q$, заданной соотношением $(\delta * Q, \phi) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi dG$. Такое представление приводит к следующей задаче. Пусть h — обобщенная функция, и пусть

$$Q_n^h = h * Q_n = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} h(\cdot - \zeta_k).$$

При каких условиях можно утверждать, что с вероятностью единица обобщенные функции Q_n^h сходятся к обобщенной функции $h * G$? Ниже, говоря об обобщенных функциях, мы имеем в виду обобщенные функции медленного роста и пользуемся терминологией из [2].

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (1.8), а h — обобщенная функция, преобразование Фурье которой имеет нулевой порядок роста. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^h = h * G \right\} = 1.$$

Доказательство. В условиях теоремы 1.1 характеристические функции q_n мер Q_n с вероятностью 1 сходятся к характеристической функции g распределения G равномерно на ограниченных подмножествах $\mathbf{R}^d$. Преобразование Фурье обобщенной функции Q_n^h имеет вид

$$\mathcal{F}(Q_n^h) = \mathcal{F}(h * Q_n) = \mathcal{F}(h) q_n. \quad (4.1)$$

Благодаря нулевому порядку роста функции $\mathcal{F}(h)$ будем также иметь $\mathcal{F}(h * G) = \mathcal{F}(h)g$, $\mathcal{F}(Q_n^h) \rightarrow \mathcal{F}(h * G)$, и теорема 4.1 доказана.

Аналогичный результат можно доказать и для функций h , у которых порядок преобразования Фурье отличен от нуля.

4.2. Обобщенные моменты. Если h непрерывная, но не ограниченная функция, то из слабой сходимости эмпирических мер, вообще говоря, уже не следует сходимость обобщенных моментов

$$\int h dQ_n = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} h(\zeta_k) \longrightarrow \int h dG. \quad (4.2)$$

Здесь можно получить следующий результат, уточняющий теорему 2.1.

Теорема 4.2. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что распределения нормированных сумм ζ_n из (2.1) сходятся к распределению G . Пусть для некоторых a и $\varepsilon > 0$ $\sup_n \mathbb{E} |\zeta_n|^{a+\varepsilon} < \infty$ и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{2-\varepsilon} B_k^a} \sum_{l=1}^k \frac{B_l^a}{l}.$$

Тогда для любой непрерывной функции h , удовлетворяющей условию $|h(x)| \leq C|x|^\alpha$, с вероятностью 1 верно соотношение (4.2).

Теоремы 4.1 и 4.2 можно применять к схемам суммирования из § 2. Например, если в условиях теоремы 2.3 показатель предельного устойчивого закона $\alpha < 2$ и если $|h(x)| \leq C|x|^{\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, \alpha]$, то сходимость (4.2) имеет место. Если же $\alpha = 2$, то подобные ограничения на рост h являются слишком сильными. Так, в [25] П. Шатте показал, что соотношение (4.2) имеет место, уже если

$$|h(x)| \leq \exp \left\{ \frac{\lambda x^2}{2} \right\}, \quad \lambda < \frac{1}{2}.$$

Следующая теорема усиливает этот результат Шатте*.

Теорема 4.3. Пусть $\{\xi_j\}$ независимые одинаково распределенные величины, $\mathbb{E} \xi_j = 0$, $\mathbb{E} \xi_j^2 = 1$. Пусть Q_n — эмпирические меры из (2.4), а G — стандартное нормальное распределение. Тогда для любой непрерывной функции h , удовлетворяющей условию

$$|h(x)| \leq C \exp \left\{ \frac{x^2}{2} - c|x| \right\}, \quad (4.3)$$

верно

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \int h dQ_n = \int h dG \right\} = 1. \quad (4.4)$$

Доказательство. Воспользуемся сильным принципом инвариантности Майора [20]. Он гарантирует существование таких чисел $\sigma_j^2 \rightarrow 1$, $B_k^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2$, что возможно построить на одном вероятностном пространстве последовательность $\{\xi_j\}$ и винеровский процесс W , удовлетворяющие соотношению

$$\Delta_k = k^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j - W(B_k^2) \right) \rightarrow 0 \quad \text{п.н. при } k \rightarrow \infty.$$

* См. также более поздние работы [26] и [27].

Запишем интересующие нас нормированные суммы в виде

$$\zeta_k = k^{-1/2} \sum_{j=1}^k \xi_j = \Delta_k + k^{-1/2} W(B_k^2) = \Delta_k + B_k k^{-1/2} U(\tau_k),$$

где $U(\tau) = e^{-\tau/2} W(e^\tau)$ — процесс Орнштейна-Уленбека и $\tau_k = \ln B_k^2 \sim \ln k \sim \gamma(k)$. Изучим предельное поведение величины

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\gamma(n)}{\tau_n} \int h dQ_n = \frac{1}{\tau_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} h(\Delta_k + B_k k^{-1/2} U(\tau_k)) \\ &= \frac{1}{\tau_n} \sum_{k=1}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e_k h(\Delta_k + \lambda_k U(\tau_k)) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$e_k = \frac{1}{k(\tau_k - \tau_{k-1})} = \frac{1}{k \ln(1 + \sigma_k^2/B_{k-1}^2)} \rightarrow 1, \quad \lambda_k = B_k k^{-1/2} \rightarrow 1.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим стационарный процесс

$$H_\varepsilon(\tau) = \sup_{0 \leq |\theta_0|, |\theta_1|, \theta_2, \theta_3 \leq \varepsilon} (1 + \theta_0) h(\theta_1 + (1 - \theta_2) U(\tau + \theta_3)).$$

Для достаточно больших k и всех $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ имеем $e_k h(\Delta_k + \lambda_k U(\tau_k)) \leq H_\varepsilon(\tau)$. Поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} H_\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Если

$$\mathbf{E} |H_\varepsilon(0)| \leq \mathbf{E} \sup_{0 \leq v \leq \varepsilon} |H_v(0)| < \infty, \quad (4.6)$$

то правая часть (4.5) в силу эргодической теоремы Биркгофа равна $\mathbf{E} H_\varepsilon(0)$. Учитывая, что в силу непрерывности функции h и процесса U верно $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(0) = h(U(0))$, находим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_n \leq \inf_{\varepsilon} \mathbf{E} H_\varepsilon(0) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} H_\varepsilon(0) = \mathbf{E} h(U(0)) = \int h dG.$$

Аналогично получаем $\liminf_{n \rightarrow \infty} I_n \geq \int h dG$. Осталось показать, что из (4.3) следует (4.6). Выберем число A настолько большим, что при $A' = (1 - \varepsilon)A - \varepsilon$ функция $\beta(x) = x^2/2 - c|x|$ монотонна на лучах $(-\infty, -A']$ и $[A', \infty)$. Пусть $0 \leq |\theta_1|, \theta_2, \theta_3 \leq \varepsilon$. Если $|U(\theta_3)| \leq A$, то

$$|h(\theta_1 + (1 - \theta_2) U(\theta_3))| \leq \sup \{ |h(x)|, |x| \leq A + \varepsilon \} < \infty.$$

Если $|U(\theta_3)| \geq A$, то в силу (4.3)

$$|h(\theta_1 + (1 - \theta_2)U(\theta_3))| \leq C \exp \{ \beta(|U(\theta_3)| + \varepsilon) \} \leq C \exp \{ \beta(S_\varepsilon + \varepsilon) \},$$

где $S_\varepsilon = \sup_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} |U(\theta)|$. Остается проверить, что конечна величина

$$\mathbf{E} \exp \{ \beta(S_\varepsilon + \varepsilon) \} = \int_0^\infty \beta'(x) \exp \{ \beta(x) \} \mathbf{P} \{ S_\varepsilon \geq x - \varepsilon \} dx. \quad (4.7)$$

Очевидно, $\beta'(x) \exp \{ \beta(x) \} \sim x \exp \{ x^2/2 - cx \}$. Как хорошо известно из теории гауссовских процессов (см. [7, § 14, пример 2]),

$$\mathbf{P} \{ S_\varepsilon \geq u \} \leq C_\varepsilon u^2 \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\}.$$

Поэтому при $\varepsilon < c$ интеграл (4.7) сходится и теорема 4.3 доказана.

З а м е ч а н и е 4.1. Доказанную теорему можно сопоставить с таким результатом С.Н. Бернштейна: если ξ_j независимы, $\mathbf{E} \xi_j^\alpha < \infty$, $\alpha > 2$, и дробь Ляпунова порядка α стремится к нулю, то моменты нормированных сумм всех порядков, не превосходящих α , сходятся к моментам нормального закона.

З а м е ч а н и е 4.2. Потребовав, чтобы $\mathbf{E} \xi_j^2 |\ln_2 |\xi_j|| < \infty$, можно доказать аналог теоремы 4.3 для функций h , удовлетворяющих некоторым условиям регулярности и условию

$$\int h dG < \infty. \quad (4.8)$$

Уже после того, как статья была представлена в журнал, авторам удалось доказать, что и минимальная пара моментных условий $\mathbf{E} \xi_j^2 = 1$ и (4.8) достаточна для справедливости (4.4), конечно, при небольших дополнительных требованиях типа регулярности. Однако доказательство этого факта заметно сложнее изложенного здесь и опубликовано отдельно [28].

Авторы признательны М. Веберу и Д. Вольны, которые познакомили их с предельными теоремами типа «почти наверное», а также И. Беркешу, П. Шатте и рецензенту за их комментарии к предварительным версиям данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

3. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 264 с.
4. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986. 416 с.
5. Ибрагимов И. А. О почти всюду версиях предельных теорем. — Докл. РАН, 1996, т. 350, с. 301–303.
6. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
7. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995. 256 с.
8. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2, с. 177–237.
9. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986. 320 с.
10. Скороход А. В. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями. — Докл. АН СССР, 1955, т. 104, с. 364–367.
11. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 116 с.
12. *Atlagh M.* Théorème central limite presque sûr et la loi du logarithme itéré pour des sommes de variables aléatoires indépendantes. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 1993, t. 316, p. 929–932.
13. *Atlagh M., Weber M.* Une nouvelle loi forte des grands nombres. — Convergence in Ergodic Theory and Probability. Ed. by V. Bergelson et al. Berlin: de Gruyter, 1996, p. 41–62.
14. *Berkes I.* On the almost sure central limit theorem and domains of attraction. — Probab. Theory Relat. Fields, 1995, v. 102, p. 1–18.
15. *Berkes I.* Results and problems related to the pointwise central limit theorem. — Asymptotic Methods in Probability and Statistics. Amsterdam: Elsevier, 1998.
16. *Berkes I., Dehling H.* Some limit theorems in log density. — Ann. Probab., 1993, v. 21, p. 1640–1670.
17. *Brosamler G. A.* An almost everywhere central limit theorem. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1988, v. 104, p. 561–574.
18. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris: Gauthier-Villars, 1937. 328 p.
19. *Lacey M., Philipp W.* A note on the almost sure central limit theorem. — Statist. Probab. Lett., 1990, v. 9, p. 201–205.
20. *Major P.* An improvement of Strassen's invariance principle. — Ann. Probab., 1979, v. 7, p. 55–61.
21. *Peligrad M., Révész P.* On the almost sure central limit theorem. — Almost Everywhere Convergence II. London: Academic Press, 1991, p. 209–225.
22. *Peligrad M., Shao Q.-M.* A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables. — Statist. Probab. Lett., 1995, v. 22, p. 131–136.
23. *Rodzik B., Rychlik Z.* On the central limit theorem for independent random variables with almost sure convergence. — Probab. Math. Statist., 1996, v. 16, № 2, p. 299–309.
24. *Schatte P.* On strong versions of the almost sure central limit theorem. — Math. Nachr., 1988, B. 137, S. 249–256.
25. *Schatte P.* On the central limit theorem with almost sure convergence. — Probab. Math. Statist., 1991, v. 11, № 2, p. 237–246.
26. *Hurelbaatar G.* A strong approximation for logarithmic averages of partial sums of random variables. — Period. Math. Hungar., 1995, v. 31, p. 189–200.
27. *Berkes I., Csáki E., Horváth L.* Almost sure central limit theorem under minimal conditions. — Statist. Probab. Lett., 1998, v. 37, p. 67–76.
28. *Ibragimov I. A., Lifshits M. A.* Convergence of generalized moments in almost sure limit theorems. — Statist. Probab. Lett., 1998, v. 40, p. 343–351.