Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кукуш, Ю. С. Мишура, Асимптотические свойства оценки интенсивности неоднородного пуассоновского процесса в комбинированной модели, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 351–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:03:58

© 1999 г.

КУКУША А. Г.*, МИШУРА Ю. С.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА В КОМБИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается случайный процесс, имеющий снос, диффузию и пуассоновскую компоненту, причем последняя является неоднородным процессом с неизвестной интенсивностью $\lambda = \lambda(t)$, принадлежащей компакту из некоторого соболевского пространства. По наблюдениям процесса на отрезке $[0, T]$ строится оценка максимального правдоподобия (ОМП) функции λ . Изучаются условия ее состоятельности и асимптотической нормальности функционалов от оценки. Приведено сравнение ОМП, построенных по наблюдениям за процессом в целом и за отдельными его компонентами.

Ключевые слова и фразы: неоднородный пуассоновский процесс, интенсивность, снос, диффузия, оценка максимального правдоподобия, состоятельность, асимптотическая нормальность, соболевское пространство.

1. Введение. Рассматриваемая схема состоит в следующем. На неотрицательной полуоси наблюдается случайный процесс с независимыми приращениями, состоящий из трех компонент: сноса, диффузии и неоднородного пуассоновского процесса с неизвестной интенсивностью $\lambda = \lambda(t)$, $t \geq 0$. По наблюдениям за траекториями процесса строится оценка максимального правдоподобия для $\lambda(t)$. В связи с рассматриваемой схемой упомянем следующие работы.

Непараметрические оценки коэффициента сноса диффузионного процесса исследовались в монографиях А. Я. Дороговцева [1], а также И. Ш. Ибрагимхалилова и А. В. Скорохода [2]. В статье А. Я. Дороговцева и А. Г. Кукуша [3] изучалась непараметрическая оценка интенсивности неоднородного процесса Пуассона. Особенность настоящей работы состоит в том, что оцениваемая функция интенсивности нелинейно входит в коэффициент сноса наблюдаемого процесса.

*Киевский университет им. Т. Шевченко, механико-математический факультет, ул. Владимирская, 64, 252601 Киев, Украина; e-mail: myus@mechmat.univ.kiev.ua.

Обозначим $\mathbf{R}^+ := [0, \infty)$. Пусть на стохастическом базисе $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, t \geq 0, \mathbf{P}\}$ с полной вероятностной мерой $\mathbf{P}$ на отрезке $[0, T]$ наблюдается траектория случайного процесса $\{\xi_t, t \geq 0\}$. Процесс имеет представление

$$\xi_t = \xi_t(\lambda_0) := \xi_0 + \int_0^t a(s, \lambda_0(s)) ds + \int_0^t b(s) dw_s + N_t(\lambda_0), \quad (1)$$

где $a = a(s, x): \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $b = b(s): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ — известные неслучайные измеримые функции, $\{w_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, $\{N_t(\lambda_0), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — неоднородный пуассоновский процесс с неизвестной интенсивностью $\lambda_0 = \lambda_0(t)$, причем процессы $\{w_t\}$, $\{N_t(\lambda_0)\}$ и случайная величина ξ_0 независимы в совокупности. Предполагается, что неслучайная функция $\lambda_0: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\lambda_0 \in L_{\text{loc}}^1$. Траектории процесса $\{N_t\}$ с вероятностью 1 принадлежат пространству X ступенчатых функций x , непрерывных справа и таких, что $x_0 = 0$, $\Delta x_t = 0$ или 1. Сужение X на отрезок $[0, T]$ обозначим через X_T . В дальнейшем выражения типа $a(s, \lambda(s))$, стоящие под знаком интеграла, будем записывать: кратко $a(s, \lambda)$.

С вероятностной точки зрения, схема наблюдений (1) эквивалентна одновременному наблюдению двух независимых случайных процессов $\{N_t(\lambda_0), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и $\{\eta_t(\lambda_0), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Здесь

$$\eta_t(\lambda_0) := \xi_0 + \int_0^t a(s, \lambda_0) ds + \int_0^t b(s) dw_s;$$

пусть $Y_T := C[0, T]$ — пространство, в котором лежат траектории этого процесса на отрезке $[0, T]$. Пары процессов $\{N_t(\lambda_0), \eta_t(\lambda_0), t \in [0, T]\}$ соответствует некоторая мера $\mu_T(\lambda_0)$ в пространстве $X_T \times Y_T$. Пусть $\lambda_1 \in L_{\text{loc}}^1$ — другая интенсивность пуассоновской компоненты. Согласно [4, § 47, с. 264], [5, § 8, с. 343, теорема 14] при выполнении условий:

$$(a) \quad \int_0^T \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_0(s)} ds < \infty;$$

$$(b) \quad \int_0^T b^{-2}(s) |a(s, \lambda_1) - a(s, \lambda_0)|^2 ds < \infty$$

мера $\mu_T(\lambda_1) \ll \mu_T(\lambda_0)$, и отношение правдоподобия имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mu_T(\lambda_1)}{d\mu_T(\lambda_0)}(N_T(\lambda_0), \eta_t(\lambda_0)) \\ &= \exp \left\{ \int_0^T b^{-1}(s) (a(s, \lambda_1) - a(s, \lambda_0)) dw_s \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T b^{-2}(s) |a(s, \lambda_1) - a(s, \lambda_0)|^2 ds \\ & \quad \left. - \int_0^T (\lambda_1(s) - \lambda_0(s)) ds + \int_0^T \ln \frac{\lambda_1(s)}{\lambda_0(s)} dN_s(\lambda_0) \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

2. Построение оценки. Теперь оценка максимального правдоподобия (ОМП) функции λ_0 будет строиться путем максимизации правой части (2). Введем необходимые пространства. При $\tau > 1$ обозначим через $\bar{W}_\tau^1[0, \tau]$ соболевское пространство функций λ , заданных на $[0, \tau]$, имеющих обобщенную производную $\lambda' \in L_r[0, \tau]$ (определение обобщенной производной см. в [6, с. 441]) и таких, что $\lambda(0) = \lambda(\tau)$;

$$\|\lambda\|_{\bar{W}_\tau^1} := \left(\int_0^\tau |\lambda(t)|^r dt + \int_0^\tau |\lambda'(t)|^r dt \right)^{1/r}.$$

З а м е ч а н и е 1. Справедливы следующие теоремы вложения Соболева [6, с. 439, 444].

а) При $\tau > 1$ пространство $\bar{W}_\tau^1[0, \tau]$ компактно вложено в пространство $C[0, \tau]$.

б) При $1 < \tau < s$ пространство $\bar{W}_s^1[0, \tau]$ компактно вложено в пространство $\bar{W}_\tau^1[0, \tau]$.

Рассмотрим следующие предположения о функции интенсивности.

(с) Функция λ_0 периодична с известным периодом $\tau > 0$.

(d) Сужение λ_0 на $[0, \tau]$ принадлежит K , где K — компакт в пространстве $\bar{W}_2^1[0, \tau]$, причем все функции из K неотрицательны.

Введем несколько обозначений, связанных с компактом K :

$$\bar{K} := \sup_{\lambda \in K} \|\lambda\|_{\bar{W}_2^1}, \quad \lambda_*(s) := \min_{\lambda \in K} \lambda(s), \quad \lambda^*(s) := \max_{\lambda \in K} \lambda(s).$$

Пусть также λ_* и λ^* суть, соответственно, минимум функции $\lambda_*(s)$ и максимум функции $\lambda^*(s)$ на $[0, \tau]$. Далее не будем делать различия между функциями из K и их τ -периодическими продолжениями на $\mathbf{R}^+$. Функции $\lambda_*(s)$ и $\lambda^*(s)$ будем считать продолженными с периодом τ на $\mathbf{R}^+$.

$$(e) \quad \int_0^\tau \frac{ds}{\lambda_*(s)} < \infty.$$

Отметим, что при выполнении условий (с)–(е)

$$\mathbf{E} \int_0^\tau |\ln \lambda_*(t)| dN_t(\lambda_0) = \int_0^\tau |\ln \lambda_*(t)| \lambda_0(t) dt < \infty,$$

а поэтому для любой функции $\lambda_1 \in K$

$$\int_0^\tau |\ln \lambda_1(t)| dN_t(\lambda_0) < \infty \quad \text{п.н.,}$$

и отношение правдоподобия (2) корректно определено.

Обозначим $\alpha = \alpha(s, x) := a(s, x)/b(s)$, $s \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{R}^+$.

(f) Для любой функции $\lambda \in K$ $\alpha(\cdot, \lambda(\cdot)) \in L_{\text{loc}}^2$.

Построим ОМП функции λ_0 по наблюдениям (1) на отрезке $[0, T]$, $T \geq \tau$. Из равенства (2) следует, что для этого достаточно рассмотреть функционал, содержащий интегралы от наблюдаемых компонент $\{N_t(\lambda_0), \eta_t(\lambda_0)\}$:

$$Q_T(\lambda) = Q_T(\lambda, \omega) := \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(s, \lambda) dw_s - \frac{1}{2T} \int_0^T [\alpha^2(s, \lambda) - 2\alpha(s, \lambda_0) \alpha(s, \lambda)] ds + \tilde{Q}_T(\lambda). \quad (3)$$

Здесь

$$\tilde{Q}_T(\lambda) := -\frac{1}{T} \int_0^T \lambda(s) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \ln \lambda(s) dN_s(\lambda_0), \quad \lambda \in K.$$

При выполнении условий (с)–(f) существует множество $\Omega_0 \subset \Omega$ такое, что $P(\Omega_0) = 1$ и $Q_T(\lambda, \omega)$ принимает действительные значения для любого $T \geq \tau$, $\omega \in \Omega_0$, $\lambda \in K$. Непрерывность функционала Q_T по λ при $\omega \in \Omega_0$ обеспечивает следующее предположение.

(г) Функция $\alpha \in C^1(\mathbf{R}^+ \times [\lambda_*, \lambda^*])$, причем для любого $T > 0$ существует $C_T > 0$ такое, что при $s \leq T$

$$\left| \frac{\partial \alpha(s, x)}{\partial s} - \frac{\partial \alpha(s, y)}{\partial s} \right| \leq C_T |x - y|, \\ \left| \frac{\partial \alpha(s, x)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha(s, y)}{\partial x} \right| \leq C_T |x - y|.$$

Далее любую постоянную, зависящую лишь от T , обозначим через C_T либо D_T ; абсолютную постоянную обозначим через C либо C_1, C_2 . Одна и та же буква может быть использована для обозначения разных констант.

Лемма 1. При выполнении условий (с)–(е), (г) функционал Q_T непрерывен по $\lambda \in K$ при $\omega \in \Omega_0$.

Доказательство. Непрерывность функционала $\tilde{Q}_T(\lambda)$ очевидна. Далее, из условия (г) следует ограниченность функций α и $\partial \alpha / \partial s$ на компакте $\tilde{K} := [0, T] \times [\lambda_*, \lambda^*]$. Поэтому при $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

$$\left| \int_0^T [\alpha^2(s, \lambda_1) - \alpha^2(s, \lambda_2)] ds - 2 \int_0^T \alpha(s, \lambda_0) [\alpha(s, \lambda_1) - \alpha(s, \lambda_2)] ds \right| \\ \leq C_T \int_0^T |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)| ds \leq C_T \left(\left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil + 1 \right) \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\overline{W}_2^1}. \quad (4)$$

Здесь и далее $[T/\tau]$ есть целая часть отношения T/τ . Приращение стохастического интеграла в (3) представимо в виде:

$$\int_0^T [\alpha(s, \lambda_2) - \alpha(s, \lambda_1)] dw_s = w_T [\alpha(T, \lambda_2(T)) - \alpha(T, \lambda_1(T))]$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T w_s \left[\frac{\partial \alpha(s, \lambda_2)}{\partial s} - \frac{\partial \alpha(s, \lambda_1)}{\partial s} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \alpha(s, \lambda_2)}{\partial x} \lambda_2'(s) - \frac{\partial \alpha(s, \lambda_1)}{\partial x} \lambda_1'(s) \right] ds.
\end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда с использованием замечания 1, а) имеем:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T [\alpha(s, \lambda_2) - \alpha(s, \lambda_1)] dw_s \right| \leq |w_T| C_T |\lambda_2(T) - \lambda_1(T)| \\
& + C_T \int_0^T |w_s| |\lambda_2(s) - \lambda_1(s)| ds \\
& + \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial \alpha(s, \lambda_2)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha(s, \lambda_1)}{\partial x} \right| |\lambda_2'(s)| ds \\
& + C_T \int_0^T |w_s| |\lambda_2'(s) - \lambda_1'(s)| ds \leq \tilde{C}_T \left(|w_T| + \bar{K} \sup_{s \leq T} |w_s| \right) \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\bar{W}_2^1},
\end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{C}_T$ — константа, отличная, вообще говоря, от C_T . Напомним, что величина $\bar{K}$ определялась сразу после условия (d). Из оценок (4)–(6) следует искомое утверждение.

Доказательство следующего результата состоит в применении теоремы об измеримом выборе [7] и аналогично доказательству существования оценки из работы [8].

Лемма 2. Пусть выполнены условия (с)–(е), (g). Тогда для каждого $T \geq \tau$ существует K -значный случайный элемент $\lambda_T = \lambda_T(\omega, s)$, $\omega \in \Omega$, $s \in [0, T]$, удовлетворяющий при каждом $\omega \in \Omega_0$ соотношению

$$Q_T(\lambda_T) = \max_{\lambda \in K} Q_T(\lambda).$$

О п р е д е л е н и е. Случайную функцию λ_T из леммы 2 (продолженную с периодом τ на $\mathbf{R}^+$) назовем оценкой максимального правдоподобия интенсивности процесса $\{N_t(\lambda_0)\}$, построенной по наблюдениям $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$.

З а м е ч а н и е 2. Вообще говоря, функция λ_T определяется не единственным образом. Далее в качестве ОМП рассматривается одна из таких функций.

З а м е ч а н и е 3. Алгоритм приближенного вычисления непараметрической ОМП, построенной по наблюдениям над пуассоновской компонентой, предложен в статье [3]. Аналогичная процедура применима к введенным оценкам λ_T в комбинированной модели наблюдения.

З а м е ч а н и е 4. В силу упреждаемости $\lambda_T(s)$ слагаемое

$$\int_0^T \alpha(s, \lambda_T(s)) dw_s,$$

входящее в значение $Q_T(\lambda_T)$, не является стохастическим интегралом Ито. Однако при выполнении ограничения (g) на гладкость функции α

и при надлежащей гладкости $\lambda_T(s)$ этот интеграл можно трактовать с помощью формулы интегрирования по частям аналогично (5).

3. Состоятельность оценки. Предположим, что функция α удовлетворяет следующим условиям.

$$(h) \quad \alpha(s, x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s, x), \quad \text{где } \alpha_i \in C(\mathbf{R}^+ \times [\lambda_*, \lambda^*]),$$

причем:

1) при каждом $x \in [\lambda_*, \lambda^*]$ α_1 — периодическая по s функция с периодом τ ;

$$2) \quad \max_{\lambda_*(s) \leq x \leq \lambda^*(s)} |\alpha_2(s, x)| \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty;$$

$$3) \quad \int_1^\infty \frac{(\alpha_3^*(s))^2}{s} ds < \infty, \quad \text{где } \alpha_3^*(s) := \max_{\lambda_*(s) \leq x \leq \lambda^*(s)} |\alpha_3(s, x)|.$$

Таким образом, функция α разложена на 3 компоненты: периодическую по s , равномерно стремящуюся к нулю при $s \rightarrow \infty$ и малую «в среднем» при $s \rightarrow \infty$. Введем предельный функционал

$$Q_\infty(\lambda) := -\frac{1}{2\tau} \int_0^\tau |\alpha_1(s, \lambda)|^2 ds + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha_1(s, \lambda) \alpha_1(s, \lambda_0) ds + \tilde{Q}_\infty(\lambda),$$

где

$$\tilde{Q}_\infty(\lambda) := -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \lambda(s) ds + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \ln \lambda(s) \lambda_0(s) ds; \quad \lambda \in K.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (с)–(е), (г), (h). Тогда при каждом $\lambda \in K$

$$Q_T(\lambda) \rightarrow Q_\infty(\lambda) \quad (\text{п.н.}), \quad T \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В статье [3] доказано, что при выполнении условий (с)–(е) $\tilde{Q}_T(\lambda) \rightarrow \tilde{Q}_\infty(\lambda)$ п.н. при $T \rightarrow \infty$. Рассмотрим сходимость остальных слагаемых функционала (3). Положим

$$Q_T^i(\lambda) := \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_i(s, \lambda) dw_s, \quad \lambda \in K, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

При $T = n\tau$, $i = 1$

$$Q_{n\tau}^1(\lambda) = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} \alpha_1(s, \lambda) dw_s \rightarrow 0 \quad (\text{п.н.}), \quad n \rightarrow \infty,$$

в силу усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) [9, с. 332, теорема 12] и неравенства $E \left| \int_0^\tau \alpha_1(s, \lambda) dw_s \right| \leq \left(\int_0^\tau \alpha_1^2(s, \lambda) ds \right)^{1/2} < \infty$.

Для оценки «остатка» $|Q_T^1(\lambda) - Q_{n\tau}^1(\lambda)|$ достаточно оценить выражение $n^{-1} \sup_{0 \leq h \leq \tau} |\int_{n\tau}^{n\tau+h} \alpha_1(s, \lambda) dw_s|$. В силу неравенства Дуба для мартингалов [10, с. 67] и периодичности α_1 имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbf{E} \sup_{0 \leq h \leq \tau} \left| \int_{n\tau}^{n\tau+h} \alpha_1(s, \lambda) dw_s \right|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\tau} \alpha_1^2(s, \lambda) ds < \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sup_{0 \leq h \leq \tau} \left| \int_{n\tau}^{n\tau+h} \alpha_1(s, \lambda) dw_s \right|^2 < \infty \quad (\text{п.н.}),$$

откуда

$$\frac{1}{n} \sup_{0 \leq h \leq \tau} \left| \int_{n\tau}^{n\tau+h} \alpha_1(s, \lambda) dw_s \right| \rightarrow 0 \quad (\text{п.н.}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Итак, $Q_T^1(\lambda) \rightarrow 0$ (п.н.), $T \rightarrow \infty$.

Далее, по условию (h), 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbf{E} \left| \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \alpha_2(s, \lambda) dw_s \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} |\alpha_2(s, \lambda)|^2 ds < \infty.$$

Вновь применяя УЗБЧ [9, с. 332, теорема 12], получаем, что $Q_{n\tau}^2(\lambda) \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$. «Остаток» $|Q_T^2(\lambda) - Q_{n\tau}^2(\lambda)|$ оценивается аналогично (7); тогда $Q_T^2(\lambda) \rightarrow 0$ п.н. при $T \rightarrow \infty$.

Далее, в силу условия (h), 3) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \alpha_3^2(s, \lambda) ds \leq \tau^2 \int_{\tau}^{\infty} \frac{\alpha_3^2(s, \lambda)}{s^2} ds + \int_0^{\tau} \alpha_3^2(s, \lambda) ds < \infty,$$

и согласно УЗБЧ [9, с. 332, теорема 12], $Q_{n\tau}^3(\lambda) \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$. «Остаток» $|Q_T^3(\lambda) - Q_{n\tau}^3(\lambda)|$ оценивается аналогично (7), и $Q_T^3(\lambda) \rightarrow 0$ п.н., $T \rightarrow \infty$.

Наконец, рассмотрим

$$R_T(\lambda) := \frac{1}{T} \int_0^T [\alpha^2(s, \lambda) - 2\alpha(s, \lambda)\alpha(s, \lambda_0)] ds. \quad (8)$$

При выполнении условия (h) имеем при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_1^2(s, \lambda) ds &\rightarrow \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \alpha_1^2(s, \lambda) ds; & \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_2^2(s, \lambda) ds &\rightarrow 0; \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \alpha_3^2(s, \lambda) ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_1^T \frac{\alpha_3^2(s, \lambda)}{s} ds - \frac{1}{T} \int_1^T \left(\int_1^z \frac{\alpha_3^2(s, \lambda)}{s} ds \right) dz \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha_3^2(s, \lambda)}{s} ds - \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z \frac{\alpha_3^2(s, \lambda)}{s} ds = 0. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в (8) оцениваются аналогично, тогда при $T \rightarrow \infty$

$$R_T(\lambda) \rightarrow \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\alpha_1(s, \lambda)|^2 ds - \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \alpha_1(s, \lambda) \alpha_1(s, \lambda_0) ds.$$

Сходимость $Q_T(\lambda)$ к $Q_\infty(\lambda)$ следует теперь из полученных предельных соотношений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (с)–(е), (g), (h), а также следующее условие (i):

- 1) $\alpha_1 \in C^1([0, \tau] \times [\lambda_*, \lambda^*])$;
- 2) $\alpha_i \in C^1(\mathbf{R}^+ \times [\lambda_*, \lambda^*])$ и для некоторой ограниченной функции C_s

$$\left| \frac{\partial \alpha_i(s, x)}{\partial x} \right| \leq C_s,$$

$$\left| \frac{\partial \alpha_i(s, x)}{\partial p} - \frac{\partial \alpha_i(s, y)}{\partial p} \right| \leq C_s |x - y|,$$

где $p = s, x$; $i = 2, 3$, $s \in \mathbf{R}^+$; $x, y \in [\lambda_*, \lambda^*]$, причем

$$3) \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_e^T s (\ln \ln s) C_s^2 ds < \infty \quad \text{и}$$

$$4) \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ln \ln t}{t}} \alpha_3^*(t) = 0.$$

Тогда оценка λ_T состоятельна в следующем смысле:

$$\|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_2^1} \rightarrow 0 \quad \text{п.н., } T \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Доказательство. Согласно общим условиям состоятельности [1, с. 76], для выполнения (9) достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) $Q_T(\lambda) \rightarrow Q_\infty(\lambda)$, $T \rightarrow \infty$ п.н.

$$\text{б) } Q_\infty(\lambda_0) > Q_\infty(\lambda), \quad \lambda \in K, \lambda \neq \lambda_0; \quad (10)$$

с) существует такая функция $\omega(\gamma)$, $\gamma > 0$, что $\omega(\gamma) \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$ и

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in K, \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\overline{W}_2^1} \leq \gamma} |Q_T(\lambda_2) - Q_T(\lambda_1)| \leq \omega(\gamma) \right\} = 1. \quad (11)$$

Сходимость а) имеет место по теореме 1; неравенство (10) следует из представления

$$Q_\infty(\lambda) = -\frac{1}{2\tau} \int_0^\tau |\alpha_1(s, \lambda) - \alpha_1(s, \lambda_0)|^2 ds + \tilde{Q}_\infty(\lambda) + \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \alpha_1^2(s, \lambda_0) ds$$

и строгого неравенства $\tilde{Q}_\infty(\lambda) < \tilde{Q}_\infty(\lambda_0)$, $\lambda \neq \lambda_0$.

Соотношение (11) доказано в [3] для функционала $\tilde{Q}_T(\lambda)$. Поэтому достаточно установить (11) для функционала

$$\dot{Q}_T(\lambda) := T^{-1} \int_0^T |\alpha(s, \lambda) - \alpha(s, \lambda_0)|^2 ds$$

и функционалов Q_T^i , введенных при доказательстве теоремы 1.

1) Оценим $Q_{n\tau}^1(\lambda_1) - Q_{n\tau}^1(\lambda_2)$ при $T = n\tau$:

$$\begin{aligned} |Q_{n\tau}^1(\lambda_1) - Q_{n\tau}^1(\lambda_2)| &\leq \frac{1}{n\tau} |B_n(\tau)| |\alpha_1(\tau, \lambda_1(\tau)) - \alpha_1(\tau, \lambda_2(\tau))| \\ &+ \frac{1}{n\tau} \int_0^\tau |B_n(s)| \left| \frac{d}{ds} (\alpha_1(s, \lambda_1(s)) - \alpha_1(s, \lambda_2(s))) \right| ds, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$B_n(s) := \sum_{i=0}^{n-1} (w(s + i\tau) - w(i\tau)), \quad s \in [0, \tau]. \quad (13)$$

По УЗБЧ [9, с. 332, теорема 12] $n^{-1}|B_n(\tau)| \rightarrow 0$ п.н., $n \rightarrow \infty$, и первое слагаемое правой части (12) равномерно по $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ стремится к нулю п.н. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\tau} \int_0^\tau |B_n(s)| \left| \frac{d}{ds} (\alpha_1(s, \lambda_1(s)) - \alpha_1(s, \lambda_2(s))) \right| ds &\leq \frac{1}{n\tau} \left(\int_0^\tau B_n^2(s) ds \right)^{1/2} \\ &\times \left(\int_0^\tau \left| \frac{d}{ds} (\alpha_1(s, \lambda_1(s)) - \alpha_1(s, \lambda_2(s))) \right|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим $Y_i(s) := w(s + i\tau) - w(i\tau)$, $s \in [0, \tau]$, — независимые центрированные одинаково распределенные гауссовские элементы в пространстве $L_2[0, \tau]$. В силу УЗБЧ в гильбертовом пространстве, доказанного в работе [11, с. 145], имеем:

$$\frac{1}{n} \left(\int_0^\tau B_n^2(s) ds \right)^{1/2} = \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \rightarrow 0 \quad \text{п.н., } n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в силу условия (i), 1)

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left| \frac{d}{ds} \alpha_1(s, \lambda_1(s)) \right|^2 ds &\leq 2 \int_0^\tau \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_1)}{\partial s} \right|^2 ds + 2 \int_0^\tau \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_1)}{\partial x} \right|^2 |\lambda_1'(s)|^2 ds \\ &\leq C_1 + C_2 \|\lambda_1\|_{\bar{W}_2}^2 \leq C. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла

$$\int_0^\tau \left| \frac{d}{ds} \alpha_1(s, \lambda_2(s)) \right|^2 ds.$$

Итак, из оценок (12)–(15) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in K} |Q_{n\tau}^1(\lambda_1) - Q_{n\tau}^1(\lambda_2)| = 0 \quad \text{п.н.}$$

С учетом (15) «остаток» оценим так:

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in K} \sup_{0 \leq h \leq \tau} \frac{1}{n} \left| \int_{n\tau}^{n\tau+h} \alpha_1(s, \lambda) dw_s \right| \\ & \leq C \sup_{0 \leq h \leq \tau} \frac{1}{n} (|w(n\tau + h)| + |w(n\tau)|) + C \frac{1}{n} \left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} w_s^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно закону повторного логарифма,

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|w(t)|}{\sqrt{t \ln \ln t}} < \infty \right\} = 1.$$

Оценивая $|w(t)|$ сверху через $\sqrt{t \ln \ln t}$, нетрудно показать, что правая часть (16) стремится к нулю п.н. при $n \rightarrow \infty$. Значит, доказано соотношение $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in K} |Q_T^1(\lambda_1) - Q_T^1(\lambda_2)| = 0$ п.н.

2) Оценим $|Q_T^2(\lambda_1) - Q_T^2(\lambda_2)|$:

$$\begin{aligned} |Q_T^2(\lambda_1) - Q_T^2(\lambda_2)| & \leq \frac{1}{T} |w_T| |\alpha_2(T, \lambda_1(T)) - \alpha_2(T, \lambda_2(T))| \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{d}{ds} (\alpha_2(s, \lambda_1) - \alpha_2(s, \lambda_2)) \right| ds. \end{aligned} \quad (17)$$

По условию (h), 2) первое слагаемое правой части (17) равномерно по $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ стремится к нулю п.н. при $T \rightarrow \infty$. Второе слагаемое не превосходит суммы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial}{\partial s} \alpha_2(s, \lambda_1) - \frac{\partial}{\partial s} \alpha_2(s, \lambda_2) \right| ds \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha_2(s, \lambda_1) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_2(s, \lambda_2) \right| |\lambda_1'(s)| ds \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha_2(s, \lambda_2) \right| |\lambda_2'(s) - \lambda_1'(s)| ds. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу условия (i), 2) при $T \in [n\tau, (n+1)\tau]$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial}{\partial s} \alpha_2(s, \lambda_1) - \frac{\partial}{\partial s} \alpha_2(s, \lambda_2) \right| ds \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{T}} \left(\int_0^T w_s^2 C_s^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\overline{W}_2^1}. \end{aligned}$$

Отметим, что при каждом $A > 0$ $T^{-1} \int_0^A w_s^2 ds \rightarrow 0$ п.н., $T \rightarrow \infty$, и в силу условий (i), 2), 3) и закона повторного логарифма с вероятностью 1

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_s^2 C_s^2 ds \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_e^T s (\ln \ln s) C_s^2 ds < \infty. \quad (19)$$

Далее, согласно замечанию 1, а),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial \alpha_2(s, \lambda_1)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_2(s, \lambda_2)}{\partial x} \right| |\lambda'_1(s)| ds \\ & \leq \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| C_s |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)| |\lambda'_1(s)| ds \\ & \leq C \bar{K} \left(\frac{1}{T} \int_0^T w_s^2 C_s^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\bar{W}_2^1}, \end{aligned}$$

что дает нужные оценки в силу (19). Здесь $\bar{K}$ — константа, введенная в п. 2.

Наконец,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |w_s| \left| \frac{\partial \alpha_2(s, \lambda_2)}{\partial x} \right| |\lambda'_2(s) - \lambda'_1(s)| ds \\ & \leq C \left(\frac{1}{T} \int_0^T w_s^2 \left| \frac{\partial \alpha_2(s, \lambda_2)}{\partial x} \right|^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\bar{W}_2^1} \\ & \leq C \left(\frac{1}{T} \int_0^T w_s^2 C_s^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\bar{W}_2^1}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок вытекает соотношение (11) для $Q_T^2(\lambda)$ с линейной функцией $\omega(\gamma)$.

Аналогично, с использованием условия i), 2), 4) оцениваются приращения компоненты $Q_T^3(\lambda)$.

3) Оценим

$$\begin{aligned} & |\check{Q}_T(\lambda_1) - \check{Q}_T(\lambda_2)| \\ & \leq 4 \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\alpha(s, \lambda_1) - \alpha(s, \lambda_2)|^2 ds \right)^{1/2} \sup_{\lambda \in K} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\alpha(s, \lambda)|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При выполнении условий теоремы для некоторого $C > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |\alpha_i(s, \lambda)|^2 ds \leq C, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ & \frac{1}{T} \int_0^T |\alpha(s, \lambda_1) - \alpha(s, \lambda_2)|^2 ds \leq C \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\bar{W}_2^1}^2, \end{aligned}$$

откуда получаем (11) для $\check{Q}_T(\lambda)$, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Пусть K — компакт в пространстве $\bar{W}_{2p}^1$ при некотором $p > 1$ и выполнены все условия теоремы 2. Тогда оценка λ_T состоятельна в $\bar{W}_{2p}^1$, т.е. $\|\lambda_T - \lambda_0\|_{\bar{W}_{2p}^1} \rightarrow 0$ п.н., $T \rightarrow \infty$. В самом деле, в силу замечания 1, а)

$$\|f\|_{\bar{W}_2^1} \leq C_p \|f\|_{\bar{W}_{2p}^1}, \quad f \in \bar{W}_2^1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in K, \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\overline{W}_{2p}^1} \leq \gamma} |Q_T(\lambda_2) - Q_T(\lambda_1)| \leq \omega(\gamma) \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in K, \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\overline{W}_2^1} \leq C_p \gamma} |Q_T(\lambda_2) - Q_T(\lambda_1)| \leq \omega(\gamma) \right\} = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, функционал Q_T непрерывен по $\lambda \in \overline{W}_{2p}^1$; состоятельность в $\overline{W}_{2p}^1$ следует из [1, с. 76].

4. Скорость среднеквадратичной сходимости оценки. Введем дополнительные ограничения на параметрическое множество K и функцию интенсивности λ_0 .

(j) Множество K компактно в пространстве $\overline{W}_{2p}^1[0, \tau]$ при некотором $p \in (1, 2)$ и ограничено в пространстве $\overline{W}_{2q}^1[0, \tau]$, где p, q — сопряженные индексы, причем все функции из K неотрицательны.

(k) Функция λ_0 принадлежит K и положительна при каждом $t \in [0, \tau]$.

Далее случайный процесс $\{x_T, T \geq 0\}$ будем обозначать через $O_p(1)$, если $\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{T \geq T_0} \mathbf{P}\{|x_T| \geq C\} = 0$ при некотором $T_0 > 0$, и — через $o_p(1)$, если $x_T \xrightarrow{P} 0, T \rightarrow \infty$. При написании введенных символов указание, что $T \rightarrow \infty$, будет опускаться.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (с), (е), (g)–(i), (j), (k), а также следующее условие (1).

1) Для некоторой постоянной C

$$\left| \frac{\partial \alpha_1(s, x)}{\partial p} - \frac{\partial \alpha_1(s, y)}{\partial p} \right| \leq C |x - y|,$$

где $p = s, x; s \in [0, \tau], x, y \in [\lambda_*, \lambda^*]$;

2) для величины C_s из условия (i) $\int_0^\infty s C_s^2 ds < \infty$, причем для этой величины выполнены также неравенства

$$\left| \frac{\partial \alpha_i(s, x)}{\partial s} \right| \leq C_s, \quad i = 2, 3, s \in \mathbf{R}^+, x \in [\lambda_*, \lambda^*].$$

Тогда

$$T^{1/2} \int_0^T |\lambda_T(t) - \lambda_0(t)|^2 dt = o_p(1).$$

Доказательство. Согласно теореме 2 и замечанию 5, при выполнении условия (j) $\|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_{2p}^1} \rightarrow 0$ п.н. при $T \rightarrow \infty$. Из теоремы вложения соболевских пространств (см. замечание 1, б)) и условия (k) имеем:

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} \frac{|\lambda_T(t) - \lambda_0(t)|}{\lambda_0(t)} \rightarrow 0 \quad (\text{п.н.}), T \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Обозначим

$$\Delta_T(t) := \lambda_T(t) - \lambda_0(t); \quad a_0(t) := \int_0^t \lambda_0(u) du;$$

$$N_i(t) := N(t + \tau(i-1)) - N(\tau(i-1)), \quad i \geq 1,$$

где $N(t) = N_t(\lambda_0)$; $A_n(t) := n^{-1} \sum_{i=1}^n N_i(t) - a_0(t)$; $t \in [0, \tau]$. Перепишем функционал Q_T в виде

$$Q_T(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^{n\tau} \alpha(s, \lambda) dw_s - \frac{1}{2T} \int_0^T |\alpha(s, \lambda) - \alpha(s, \lambda_0)|^2 ds$$

$$+ \frac{1}{2T} \int_0^T \alpha^2(s, \lambda_0) ds$$

$$+ \frac{n}{T} \left[- \int_0^\tau \lambda(s) ds + \int_0^\tau \lambda_0(t) \ln \lambda(t) dt + \int_0^\tau \ln \lambda(t) dA_n(t) \right]$$

$$+ R_T^1(\lambda) + R_T^2(\lambda),$$

где

$$R_T^1(\lambda) := -\frac{1}{T} \int_0^{T-n\tau} \lambda(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T-n\tau} \ln \lambda(t) dN_{n+1}(t),$$

$$R_T^2(\lambda) := \frac{1}{T} \int_{n\tau}^T \alpha(s, \lambda) dw_s, \quad n\tau \leq T < (n+1)\tau.$$

По определению оценки $Q_T(\lambda_T) \geq Q_T(\lambda_0)$, откуда

$$\int_0^\tau \Delta_T(t) dt - \int_0^\tau \lambda_0(t) \ln \left(1 + \frac{\Delta_T(t)}{\lambda_0(t)} \right) dt$$

$$\leq \int_0^\tau \ln \left(1 + \frac{\Delta_T(t)}{\lambda_0(t)} \right) dA_n(t) + \frac{1}{n} \int_0^{n\tau} [\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)] dw_s$$

$$- \frac{1}{2n} \int_0^{n\tau} |\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)|^2 ds + \frac{T}{n} \sum_{i=1,2} (|R_T^i(\lambda_T)| + |R_T^i(\lambda_0)|).$$

В статье [3] доказано, что при выполнении условий теоремы $R_T^1(\lambda_T)$ и $R_T^1(\lambda_0)$ есть $O_p(1)/T$. Кроме того, из (20) следует существование такого $\delta > 0$, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \int_0^\tau \left[\Delta_T(t) - \lambda_0(t) \ln \left(1 + \frac{\Delta_T(t)}{\lambda_0(t)} \right) \right] dt \geq \delta \int_0^\tau |\Delta_T(t)|^2 dt \right\} = 1. \quad (21)$$

В работе [3] доказано также, что

$$\int_0^\tau \ln \left(1 + \frac{\Delta_T(t)}{\lambda_0(t)} \right) dA_n(t) = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}. \quad (22)$$

Оценим

$$Q_{n\tau}^i(\lambda_T) - Q_{n\tau}^i(\lambda_0) = \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} [\alpha_i(s, \lambda_T) - \alpha_i(s, \lambda_0)] dw_s,$$

используя (12)–(15), (17), (18) и условие (1):

$$\begin{aligned}
 |Q_{n\tau}^1(\lambda_T) - Q_{n\tau}^1(\lambda_0)| &\leq \frac{1}{n\tau} |B_n(\tau)| C |\lambda_T(\tau) - \lambda_0(\tau)| \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{n}\tau} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0,\tau]} \left(\int_0^\tau \left| \frac{\partial}{\partial s} \alpha_1(s, \lambda_T) - \frac{\partial}{\partial s} \alpha_1(s, \lambda_0) \right| \right. \\
 &+ \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1(s, \lambda_T) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1(s, \lambda_0) \right| |\lambda'_0(s)| \\
 &\left. + \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1(s, \lambda_T) \right| |\lambda'_T(s) - \lambda'_0(s)| \right)^2 ds \Big)^{1/2}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} |B_n(\tau)| = O_p(1), \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0,\tau]} = O_p(1). \quad (24)$$

По условию (1), 1)

$$\left(\int_0^\tau \left| \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_1(s, \lambda_T) - \alpha_1(s, \lambda_0)) \right|^2 ds \right)^{1/2} = o_p(1). \quad (25)$$

По условиям (j) и (1), 1)

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_0^\tau \left| \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1(s, \lambda_T) - \alpha_1(s, \lambda_0)) \right|^2 |\lambda'_0(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\
 &\leq C \left(\int_0^\tau |\lambda_T - \lambda_0|^{2p} ds \right)^{1/(2p)} \left(\int_0^\tau |\lambda'_0(s)|^{2q} ds \right)^{1/(2q)} \\
 &\leq C \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_{2p}^1} = o_p(1). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\left(\int_0^\tau \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1(s, \lambda_T) \right|^2 |\lambda'_T(s) - \lambda'_0(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq C \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_{2p}^1} = o_p(1). \quad (27)$$

Согласно (24)–(27), левая часть (23) есть $o_p(1)/\sqrt{T}$. Из соотношений (17), (18) и условия (1), 2) имеем для $i = 2, 3$

$$\begin{aligned}
 |Q_{n\tau}^i(\lambda_T) - Q_{n\tau}^i(\lambda_0)| &\leq \frac{1}{\sqrt{n\tau}} \frac{|w_{n\tau}|}{\sqrt{n\tau}} \left| \alpha_i(n\tau, \lambda_T(n\tau)) - \alpha_i(n\tau, \lambda_0(n\tau)) \right| \\
 &+ \frac{C}{\sqrt{n}} \left(\int_0^{n\tau} w_s^2 C_s^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_2^1} \\
 &+ \frac{C}{n} \left(\int_0^{n\tau} w_s^2 C_s^2 ds \right)^{1/2} \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_2^1} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Мы воспользовались оценкой:

$$\mathbb{E} \int_0^{n\tau} w_s^2 C_s^2 ds = \int_0^{n\tau} s C_s^2 ds \leq \int_0^\infty s C_s^2 ds < \infty, \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим остаток $R_T^2(\lambda_T)$ (остаток $R_T^2(\lambda_0)$ оценивается аналогично):

$$\begin{aligned} |R_T^2(\lambda_T)| &\leq \frac{1}{T} |w(T) - w(n\tau)| \\ &\quad \times \left(\sup_{0 \leq s \leq \tau, x \in [\lambda_*, \lambda^*]} |\alpha_1(s, x)| + \sup_{i=2,3, n\tau \leq s \leq T, x \in [\lambda_*, \lambda^*]} |\alpha_i(s, x)| \right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_{n\tau}^T |w_s| \left| \frac{d}{ds} \alpha(s, \lambda_T(s)) \right| ds. \end{aligned}$$

По условию (l)

$$|R_T^2(\lambda_T)| = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}. \quad (29)$$

Из оценок (21)–(29) следует теперь утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 6. Если функция $\alpha_1(s, x)$ линейна по x , то вместо условия (j) достаточно потребовать (d). В самом деле, тогда левая часть (26) равна нулю, а остальные слагаемые в правой части (23) оцениваются через

$$\frac{O_p(1)}{\sqrt{T}} \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\bar{W}_2^1}.$$

5. Сходимость гладких функционалов от оценки. Пусть $p \in (1, 2)$, q — сопряженный индекс; K_0 — открытое ограниченное выпуклое множество в $\bar{W}_{2q}^1$, состоящее из положительных функций; K — замыкание K_0 в пространстве $\bar{W}_{2p}^1$. Поскольку $p < q$, то $\bar{W}_{2p}^1$ компактно вложено в $\bar{W}_{2q}^1$ (замечание 1, б)), и K — компакт в $\bar{W}_{2p}^1$. Кроме того, K — ограниченное множество в $\bar{W}_{2q}^1$. В самом деле, пусть $\sup_{f \in K_0} \int_0^\tau |f'|^{2q} ds \leq R$. Если $\{f_n\} \subset K_0$ и $f_n \rightarrow g$ в $\bar{W}_{2p}^1$, то f_n сходится к g равномерно на $[0, \tau]$; тогда в силу леммы [10, с. 86], верной при показателе $2q > 1$, из неравенства $\int_0^\tau |f_n'|^{2q} ds \leq R$ следует, что $\int_0^\tau |g'|^{2q} ds \leq R$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

(m) Функция $\lambda_0 \in K_0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (с), (е), (g)–(i), (l), (m), а также следующее условие:

(п) 1) $\alpha_1 \in C^2([0, \tau] \times [\lambda_*, \lambda^*]);$

2) $\alpha_{2,3} \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [\lambda_*, \lambda^*]);$

3) при $i = 2, 3$ $|\partial^2 \alpha_i(s, x)/\partial s \partial x| \leq D_s$, причем D_s ограничена и $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} (\sqrt{T})^{-1} \int_0^T s D_s^2 ds < \infty$;

$$4) \left| \frac{\partial^2 \alpha_1(s, x)}{\partial s \partial x} - \frac{\partial^2 \alpha_1(s, y)}{\partial s \partial x} \right| + \left| \frac{\partial^2 \alpha_1(s, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \alpha_1(s, y)}{\partial x^2} \right| \leq C |x - y|,$$

$$5) \left| \frac{\partial^2 \alpha_i(s, x)}{\partial s \partial x} - \frac{\partial^2 \alpha_i(s, y)}{\partial s \partial x} \right| \leq D_s |x - y|, \quad i = 2, 3,$$

где D_s — величины из условия 3);

6) при $i = 2, 3$

$$\sup_{0 \leq s \leq \tau, \lambda_* \leq x \leq \lambda^*} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial \alpha_i(s + k\tau, x)}{\partial x} \right|^2 = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

7) при $i = 2, 3$ $|\partial^2 \alpha_1(s, x)/\partial x^2| \leq F_s$, причем F_s ограничена и $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T (s F_s^2)^P ds < \infty$;

8)

$$\left| \frac{\partial^2 \alpha_i(s, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \alpha_i(s, y)}{\partial x^2} \right| \leq G_s |x - y|, \quad i = 2, 3,$$

где G_s ограничена и $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} T^{-1/(q+1)} \int_0^T (s G_s^2)^{q/(q+1)} ds < \infty$.

Тогда для любой функции $\varphi \in \overline{W}_{2q}^1$ при $T \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\sqrt{\frac{T}{\tau}} \int_0^\tau \varphi(t) (\lambda_T(t) - \lambda_0(t)) dt$$

слабо сходится к нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией, равной

$$\int_0^\tau \varphi^2(t) \left(\frac{1}{\lambda_0(t)} + \left| \frac{\partial \alpha_1(t, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right)^{-1} dt.$$

Доказательство. По условию (m) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda_0(t) \geq \varepsilon$, $t \in [0, \tau]$. В силу теоремы 2 и теоремы вложения соболевских пространств $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\lambda_T(t) \geq \varepsilon/2, t \in [0, \tau]\} = 1$. Далее рассматриваются только те T и ω , для которых последнее неравенство выполнено. Возьмем производную по Гато $\langle Q'_T(\lambda_T), h \rangle$ от функционала Q_T в точке λ_T по направлению $h \in \overline{W}_2^1[0, \tau]$, причем h продолжена периодически с периодом τ :

$$\begin{aligned} \langle Q'_T(\lambda_T), h \rangle &= \frac{n\tau}{T} \frac{1}{\tau} \left[- \int_0^\tau h ds + \int_0^\tau \frac{\lambda_0}{\lambda_T} h ds + \int_0^\tau \frac{h}{\lambda_T} dA_n \right] \\ &\quad - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \alpha(s, \lambda_T)}{\partial x} [\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)] h(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \alpha(s, \lambda_T)}{\partial x} h(s) dw_s + \langle R'_T(\lambda_T), h \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\langle R'_T(\lambda_T), h \rangle = \frac{1}{T} \left(- \int_0^{T-n\tau} h ds + \int_0^{T-n\tau} \frac{h}{\lambda_T} dN_{n+1} \right).$$

Напомним, что A_n и N_n введены в п. 4.

Зафиксируем функцию $\psi \in \overline{W}_{2q}^1$. По условию (m) для некоторого $\delta > 0$ функции $\lambda_0 \pm \delta\psi$ принадлежат K_0 . В силу выпуклости K корректно определены две функции $q_{\pm}(t) := Q_T(\lambda_T + t(\lambda_0 - \lambda_T \pm \delta\psi))$, $t \in [0, 1]$. Они достигают максимума при $t = 0$, откуда

$$q'_{\pm}(0) := \langle Q'_T(\lambda_T), \lambda_0 - \lambda_T \pm \delta\psi \rangle \leq 0,$$

или

$$\left| \langle Q'_T(\lambda_T), \psi \rangle \right| \leq \frac{1}{\delta} \langle Q'_T(\lambda_T), \Delta_T \rangle, \quad (31)$$

где Δ_T введено в п. 4.

Оценим правую часть (31). В статье [3] доказано, что при выполнении условий настоящей теоремы

$$\begin{aligned} \frac{n\tau}{T} \frac{1}{\tau} \left[- \int_0^{\tau} \Delta_T ds + \int_0^{\tau} \frac{\lambda_0 \Delta_T}{\lambda_T} ds + \int_0^{\tau} \frac{\Delta_T}{\lambda_T} dA_n \right] &= \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}; \\ \langle R'_T(\lambda_T), \Delta_T \rangle &= \frac{o_p(1)}{T}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл $I_1 := T^{-1} \int_0^T |\alpha'_x(s, \lambda_T)| |\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)| |\Delta_T| ds$. Воспользуемся условием (i) и теоремой 3:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{T} \int_0^T |\alpha'_x(s, \lambda_T)| |\Delta_T|^2 ds \leq \frac{C(n+1)}{T} \int_0^{\tau} \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_T) \right| |\Delta_T|^2 ds \\ &+ \frac{C}{T} \int_0^T \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_T) \right| |\Delta_T|^2 ds \leq C_1 \int_0^{\tau} |\Delta_T|^2 ds = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Обозначим производную $\Delta'_T := \lambda'_T - \lambda'_0$. Используя условия (n), 1), 2), и обозначение B_n из п. 3, оценим интеграл

$$\begin{aligned} I_2 &:= \frac{1}{T} \left| \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_T) \Delta_T(s) dw_s \right| \leq \frac{1}{T} \left| \int_0^{n\tau} \alpha'_x(s, \lambda_T) \Delta_T dw_s \right| \\ &+ \frac{1}{T} \left| \int_{n\tau}^T \alpha'_x(s, \lambda_T) \Delta_T dw_s \right| \leq \frac{C}{n\tau} \left| \int_0^{\tau} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_T) \Delta_T dB_n \right| \\ &+ \frac{1}{T} \left| \int_0^{n\tau} \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_T) \Delta_T dw_s \right| + \frac{1}{T} \left| \int_{n\tau}^T \alpha'_x(s, \lambda_T) dw_s \right| \\ &\leq \frac{C |B_n(\tau)|}{n\tau} \left| \frac{\partial \alpha_1(\tau, \lambda_T(\tau))}{\partial x} \Delta_T(\tau) \right| \\ &+ \frac{C}{n\tau} \int_0^{\tau} |B_n(s)| \left| \frac{d}{ds} \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_T(s))}{\partial x} \right| ds \\ &+ \frac{C}{n\tau} \int_0^{\tau} |B_n| \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_T)}{\partial x} \Delta'_T \right| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{T} \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x} (n\tau, \lambda_T(\tau)) \Delta_T(\tau) \right| |w(n\tau)| \\
& + \frac{1}{T} \int_0^{n\tau} \left| \frac{d}{ds} \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x} (s, \lambda_T) \right| |w_s| ds \\
& + \frac{1}{T} \int_0^{n\tau} \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x} (s, \lambda_T) \Delta'_T \right| |w_s| ds \\
& + \frac{1}{T} \left| \int_{n\tau}^T \frac{\partial \alpha}{\partial x} (s, \lambda_T) dw_s \right|. \tag{32}
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \frac{\partial \alpha_i(s, \lambda_T)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \alpha_i(s, \lambda_T)}{\partial s \partial x} + \frac{\partial^2 \alpha_i(s, \lambda_T)}{\partial x^2}; \\
\frac{|B_n(\tau)|}{n\tau} \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} (\tau, \lambda_T(\tau)) \Delta_T(\tau) \right| &= \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}; \\
\frac{1}{n\tau} \int_0^\tau |B_n| \left| \frac{\partial^2 \alpha_1(s, \lambda_T)}{\partial s \partial x} \Delta_T \right| ds \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \left(\int_0^\tau |\Delta_T|^2 ds \right)^{1/2} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}; \\
\frac{1}{n\tau} \int_0^\tau |B_n| \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_T)}{\partial x} \Delta'_T \right| ds \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \left(\int_0^\tau |\Delta'_T|^2 ds \right)^{1/2} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}; \\
\frac{1}{T} |w(n\tau)| \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x} (n\tau, \lambda_T(\tau)) \Delta_t(\tau) \right| &= \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

По условию (п), 3) и по теореме 3

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^{n\tau} \left| \frac{\partial^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial s \partial x} (s, \lambda_T) \Delta_T \right| |w_s| ds \\
& \leq \frac{1}{T} \left(\int_0^{n\tau} D_s^2 w_s^2 ds \right)^{1/2} \sqrt{n} \left(\int_0^\tau |\Delta_T|^2 ds \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T D_s^2 w_s^2 ds \right)^{1/2} \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}, \tag{33}
\end{aligned}$$

поскольку $\lim_{T \rightarrow \infty} (\sqrt{T})^{-1} E \int_0^T D_s^2 w_s^2 ds = \lim_{T \rightarrow \infty} (\sqrt{T})^{-1} \int_0^T D_s^2 s ds < \infty$. По условию (1), 2) имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^{n\tau} \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x} \Delta'_T \right| |w_s| ds \\
& \leq \sqrt{\frac{n}{T}} \left(\int_0^\tau |\Delta'_T|^2 ds \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\int_0^{n\tau} C_s^2 w_s^2 ds \right)^{1/2} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

«Остаток» в правой части (32) оценивается аналогично (33), следовательно, $I_2 = o_p(1)/\sqrt{T}$. Итак, $|\langle Q'_T(\lambda_T), \psi \rangle| = o_p(1)/\sqrt{T}$.

Подставим в (30) функцию ψ вместо h . В силу теоремы 3 из работы [3]

$$\begin{aligned} \langle Q'_T(\lambda_T), \psi \rangle &= -\frac{1}{T} \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_T) [\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)] \psi ds \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_T) \psi dw_s + \frac{1 + o(1)}{\tau} \\ &\quad \times \left(-\int_0^\tau \frac{\Delta_T \psi}{\lambda_0} ds + \int_0^\tau \frac{\psi}{\lambda_0} dA_n \right) + \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_T) \psi dw_s &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_0) \psi dw_s \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T [\alpha'_x(s, \lambda_T) - \alpha'_x(s, \lambda_0)] \psi dw_s := J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Далее полагаем $T = n\tau$; при $n\tau \leq T < (n+1)\tau$ проводятся соответствующие оценки «остатков». Тогда

$$J_1 = \frac{1}{n\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \psi dB_n + \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_0) \psi dw_s.$$

По центральной предельной теореме при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\tau\sqrt{n}} \int_0^\tau \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \psi dB_n \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(s, \lambda_0) \right|^2 \psi^2 ds\right)$$

по распределению. Далее, по условию (п), (6)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\tau\sqrt{n}} \int_0^{n\tau} \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_0) \psi dw_s \right|^2 \\ \leq \frac{C_1}{n} \int_0^\tau \psi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)(s + k\tau, \lambda_0(s))}{\partial x} \right|^2 ds = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак,

$$J_1 \sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(s, \lambda_0) \right|^2 \psi^2 ds\right)$$

по распределению. Оценим J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{1}{n\tau} \left| \int_0^\tau \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \right) \psi dB_n \right| \\ &\quad + \frac{1}{n\tau} \left| \int_0^{n\tau} \left(\frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_0) \right) \psi dw_s \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C|\lambda_T(\tau) - \lambda_0(\tau)|}{n\tau} |\psi(\tau)| |B_n(\tau)| \\
&+ \frac{1}{n\tau} \left(\int_0^\tau \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \right) \right|^2 \psi^2 ds \right)^{1/2} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \\
&+ \left\| \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \frac{1}{n\tau} \left(\int_0^\tau |\psi'|^2 \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \right|^2 ds \right)^{1/2} \\
&+ \frac{C|w(n\tau)|}{n\tau} |\psi(T)| \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(T, \lambda_T(T)) - \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(T, \lambda_0(T)) \right| \\
&+ \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} \left| \frac{\partial^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial s \partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial s \partial x}(s, \lambda_0) \right| |\psi| |w_s| ds \\
&+ \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} \left| \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_T) - \frac{\partial(\alpha_2 + \alpha_3)}{\partial x}(s, \lambda_0) \right| |\psi'| |w_s| ds \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right\|_{L_2[0, \tau]} \left(\int_0^\tau |\psi'|^{2q} ds \right)^{1/(2q)} \|\lambda_T - \lambda_0\|_{\overline{W}_{2p}^1} \\
&+ \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} D_s |\Delta_T| |\psi| |w_s| ds \\
&+ \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} C_s |\Delta_T| |\psi'| |w_s| ds + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$J_3 := T^{-1} \int_0^T \alpha'_x(s, \lambda_T) [\alpha(s, \lambda_T) - \alpha(s, \lambda_0)] \psi ds.$$

Имеем:

$$J_3 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha'_x(s + i\tau, \lambda_0)|^2 \Delta_T \psi ds + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}}.$$

Из условия (п), 6) и теоремы 3 получаем:

$$J_3 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(s, \lambda_0) \right|^2 \Delta_T \psi ds + r_n + \frac{o_p(1)}{\sqrt{n}},$$

где

$$\begin{aligned}
|r_n| &\leq \frac{C}{T^{1/4}} \int_0^\tau |\Delta_T| |\psi| ds \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{T}} \left(\int_0^\tau \psi^2 ds \cdot T^{1/2} \cdot \int_0^\tau |\Delta_T|^2 ds \right)^{1/2} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

Из (34), (31) следует представление:

$$\sqrt{n} \tau J_3 + \sqrt{n} \int_0^\tau \frac{\Delta_T \psi}{\lambda_0} ds = \tau J_1 \sqrt{n} + \sqrt{n} \int_0^\tau \frac{\psi}{\lambda_0} dA_n + o_p(1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \int_0^\tau \left(\frac{1}{\lambda_0} + \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right) \Delta_T \psi ds \\ & \Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \int_0^\tau \left(\frac{1}{\lambda_0} + \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right) \psi^2 ds \right) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ по распределению. Полагая здесь

$$\varphi := \left(\frac{1}{\lambda_0} + \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right) \psi,$$

получаем искомое соотношение:

$$\sqrt{\frac{T}{\tau}} \int_0^\tau \varphi \Delta_T ds \Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \int_0^\tau \varphi^2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right)^{-1} ds \right).$$

Теорема 4 доказана.

6. Сравнение оценок. Показателем эффективности рассмотренной оценки является асимптотическая дисперсия гладкого функционала от нее:

$$\sigma^2(\varphi) := \int_0^\tau \varphi^2 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^2 \right)^{-1} ds.$$

Если строить ОМП $\tilde{\lambda}_T$ по пуассоновской компоненте $\{N_t(\lambda_0), 0 \leq t \leq T\}$, то, согласно [3],

$$\sqrt{\frac{T}{\tau}} \int_0^\tau \varphi (\tilde{\lambda}_T - \lambda_0) ds \Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \int_0^\tau \varphi^2 \lambda_0 ds \right),$$

и асимптотическая дисперсия равна: $\tilde{\sigma}^2(\varphi) := \int_0^\tau \varphi^2 \lambda_0 ds$. Если же рассматривать ОМП $\hat{\lambda}_T$ по наблюдениям $\{\eta_t(\lambda_0), 0 \leq t \leq T\}$, то при условии

$$\frac{\partial \alpha_1(s, x)}{\partial s} \neq 0, \quad s \in [0, \tau], \quad x \in [\lambda_*, \lambda^*], \quad (35)$$

будем иметь:

$$\sqrt{\frac{T}{\tau}} \int_0^\tau \varphi (\hat{\lambda}_T - \lambda_0) ds \Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \int_0^\tau \varphi^2 \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^{-2} ds \right),$$

и асимптотическая дисперсия равна:

$$\hat{\sigma}^2(\varphi) := \int_0^\tau \varphi^2 \left| \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0)}{\partial x} \right|^{-2} ds.$$

В условиях теоремы 4 при $\varphi \in \bar{W}_{2q}^1$, $\varphi \neq 0$ справедливо неравенство:

$$\sigma^2(\varphi) \leq \hat{\sigma}^2(\varphi), \quad (36)$$

а при дополнительном условии (35) $\sigma^2(\varphi) < \tilde{\sigma}^2(\varphi)$. В соотношении (36) будет строгое неравенство, если

$$\text{mes} \left\{ s \in \text{supp } \varphi: \frac{\partial \alpha_1(s, \lambda_0(s))}{\partial x} \neq 0 \right\} > 0.$$

Итак, совместная обработка наблюдаемых компонент $\{N_t(\lambda_0), \eta_t(\lambda_0)\}$ более эффективна, чем их раздельная обработка.

Авторы благодарят рецензента за устранение некоторых недостатков в изложении материала статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороговцев А. Я. Теория оценок параметров случайных процессов. Киев: Вища школа, 1982. 192 с.
2. Ибрагимов И. Ш., Скороход А. В. Состоятельные оценки параметров случайных процессов. Киев: Наукова думка, 1980. 189 с.
3. Дороговцев А. Я., Кукуш А. Г. Асимптотические свойства непараметрической оценки интенсивности неоднородного процесса Пуассона. — Кибернетика и системный анализ, 1996, № 1, с. 91–104.
4. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964. 278 с.
5. Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Мартингалы в теории точечных процессов. — Тр. школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), т. II, Вильнюс: ИФМ АН ЛитССР, 1975, с. 269–354.
6. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
7. Аркин В. И., Евстигнеев И. В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. М.: Наука, 1979. 202 с.
8. Dorogoutsev A. Ya., Zerek N., Kukush A. G. Weak convergence of an infinite-dimensional parameter estimator to a normal distribution. — Theory Probab. and Math. Statist., 1988, № 37, p. 45–51.
9. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с.
10. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
11. Révész P. Die Gesetze der grossen Zahlen. Budapest: Acad. Kiado, 1968. 173 p.
12. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Поступила в редакцию
14.VI.1996