Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, Уравнение типа Колмогорова–Феллера в факторизованном вероятностном пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 373–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:32:54

© 1999 г.

МАСЛОВ В. П.* , ЧЕБОТАРЕВ А. М.*

УРАВНЕНИЕ ТИПА КОЛМОГорова–Феллера В ФАКТОРИЗОВАННОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

Рассматриваются вычисления вероятностей в произведениях сепарабельных вероятностных пространств, факторизованных относительно группы перестановок сомножителей, с помощью операции следа по симметричным и антисимметричным ортонормированным базисам. Выводится нелинейное уравнение типа Колмогорова–Феллера, которое является образом прямого линейного уравнения Колмогорова–Феллера при факторизации исходного вероятностного пространства относительно группы перестановок с правилами суперотбора.

Ключевые слова и фразы: нелинейные уравнения типа Колмогорова–Феллера, факторизованные вероятностные пространства, симметрические функции, антисимметрические функции, бозоны, фермионы, вакуумное состояние.

Конструкция вероятностной меры, возникающей в результате факторизации вероятностного пространства, наделенного измеримыми классами эквивалентности на множестве элементарных событий, в весьма общей ситуации, по-видимому, впервые обсуждалась в работе В. А. Рохлина [1]. В дальнейшем интерес исследователей в основном сместился в направлении преодоления технических трудностей, возникающих при построении условных вероятностных мер на подмножествах конечной коразмерности [2] в бесконечномерном случае. Наш интерес к проблеме факторизации вероятностных мер на произведениях вероятностных подпространств связан с приложениями в математической физике [3], [4], которые выявили ряд простых и красивых фактов, оставшихся незамеченными как в статистической физике, так и в теории вероятностей.

Наиболее интересными нам представляются следующие три наблюдения, о которых идет речь в статьях [3]–[7] и в настоящей работе.

*МГУ им. М. В. Ломоносова, физический ф-т, кафедра квантовой статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: victor@maslov.msk.su; alex@cheb.phys.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 96-0698.

Во-первых, это возможность вычисления вероятностей в произведениях сепарабельных вероятностных пространств, факторизованных относительно группы перестановок сомножителей, с помощью операции следа по симметричным и антисимметричным ортонормированным базисам, что указывает на принципиальную возможность некомбинаторных численных и асимптотических оценок вероятностей событий, удовлетворяющих некоторым правилам суперотбора. Вероятностные пространства такого типа рассматривались А. Я. Хинчиным [8], однако связь с задачей факторизации, отмечавшаяся В. А. Рохлиным, не была использована, равно как не были получены явные формулы для нормировочных коэффициентов, характеристических функционалов и распределений вероятностей чисел заполнения в общем случае. Во-вторых, это независимость чисел заполнения как случайных величин в факторизованных вероятностных пространствах с переменным числом частиц [5], [6]. Это замечание значительно упрощает вычисление средних значений и делает указанный класс пространств, называемых вероятностными пространствами Маслова [6], столь же удобным объектом исследования, как и класс вероятностных пространств с гауссовыми мерами. И наконец, это нелинейное уравнение типа Колмогорова–Феллера, которое является образом прямого линейного уравнения Колмогорова–Феллера при факторизации исходного вероятностного пространства относительно группы перестановок с правилами суперотбора. Заметим, что вопросы вывода марковских эволюционных уравнений в факторизованных произведениях вероятностных пространств в известных авторах работах не рассматривались.

1. Пусть $\Omega_0 = \{\omega_k\}$ — конечное или счетное множество, P_k — вероятности элементарных событий ω_k . Для любого натурального N обозначим через

$$\Omega_N = \left\{ \omega_{\mathbf{k}}: \omega_{k_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{k_N}, k_i \in (1, 2, \dots, |\Omega_0|) \right\}$$

прямое произведение N экземпляров множества Ω_0 , факторизованное относительно группы перестановок индексов $k_1, \dots, k_N$. Будем считать, что для каждой последовательности неубывающих индексов $\mathbf{k} = \{k_1 \leq \cdots \leq k_N\}$ элементарными событиями в $\Omega_N^\infty \subset \Omega_N$ являются произведения N элементарных событий из Ω_0 : $\omega = \otimes_{i=1}^N \omega_{k_i}$.

Естественным представителем события $\omega \in \Omega_N^\infty$ является вектор чисел заполнения $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\omega) = \{N_k\}_1^{|\Omega_0|} \in \mathbf{Z}^{|\Omega_0|}$, $\sum N_k = N$, с неотрицательными целочисленными компонентами $0 \leq N_k \leq N$, связанный с произведением $\otimes_{i=1}^N \omega_{k_i} \cong \{N_k\}$ соотношением $N_k = \sum_i \delta_{k,k_i}$. Обратно, каждому вектору $\mathbf{N}$ отвечает траектория $\omega(\mathbf{N})$ такая, что

$$\omega(\mathbf{N}) = \underbrace{\{\omega_{k_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{k_1}\}}_{N_{k_1}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\{\omega_{k_m} \otimes \cdots \otimes \omega_{k_m}\}}_{N_{k_m}}, \quad \sum_i N_{k_i} = N, \quad (1)$$

где N_{k_i} — ненулевые компоненты вектора $N \in \mathbb{Z}^{|\Omega_0|}$. Множества векторов заполнения, связанные с пространствами Ω_N^∞ , обозначаются через $\mathcal{N}_\infty$. Индекс ∞ указывает на отсутствие ограничений сверху для чисел заполнения. Будем говорить, что вектор $N \in \mathcal{N}_\infty$ мажорирует вектор $M \in \mathcal{N}_\infty$ и писать $M \prec N$, если $0 \leq M_k \leq N_k$. Для любого вектора $M \in \mathcal{N}_\infty$, задающего правило суперотбора, определим $\Omega_N(M)$ как подмножество в Ω_N^∞ , состоящее из событий ω_k таких, что $N(\omega_k) \prec M$.

Пусть $\Sigma_N(M)$ суть σ -алгебры подмножеств в $\Omega_N(M)$, порождаемые элементарными событиями (1), и $\mathcal{F}_N(M)$ суть σ -алгебры в $\mathbb{Z}^{|\Omega_0|}$, порождаемые числами заполнения. Относительно σ -алгебр $\Sigma_N(M)$ измеримы лишь функции, инвариантные относительно перестановок аргументов, в частности, функции, аргументами которых являются числа заполнения. Вероятности элементарных событий $\omega = \otimes_{i=1}^N \omega_{k_i}$ из $\Omega_N(M)$ вычисляются по формулам, которые в представлении векторов заполнения $N = N(\omega) = \{N_k\}_1^{|\Omega_0|} \in \mathcal{N}_\infty$ таких, что $\sum_{k=1}^{|\Omega_0|} N_k = N$, имеют вид:

$$P(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell=1}^{|\Omega_0|} \frac{P_\ell^{N_\ell}}{\Gamma_N(M)}, \quad \Gamma_N(M) = \sum_{N \prec M} \prod_{\ell=1}^{|\Omega_0|} P_\ell^{N_\ell}. \quad (2)$$

В качестве простейшего нетривиального примера вероятностного пространства $\Omega_N(M)$ рассмотрим неограниченную решетку Ω_0 , k -й узел которой соответствует элементарному событию $\omega_k = \{\text{случайная траектория посещает узел } k\}$. Пусть N — число идентичных частиц, блуждающих по узлам решетки, $P_N(M)$ — начальное распределение вероятностей для системы частиц. Часть узлов решетки являются ловушками, способными поглотить M частиц и превращающимися затем в препятствия для движения свободных частиц. В этом случае компоненты вектора $M = \{M_1, M_2, \dots\}$ описывают транзитивные узлы $M_k = \infty$ и предельную емкость ловушек ($M_\ell = M$), задающих правило суперотбора, промежуточное между статистиками Бозе и Ферми.

Другим важным примером служит модель финансовой пирамиды. Множество элементарных событий Ω_0 является множеством возможных состояний клиентуры: $\omega_0 = \{\text{пассивное}\}$, $\omega_k = \{\text{активное}\}$, через k единиц времени после момента входа в пирамиду $0 < k < |\Omega_0|$, $k = |\Omega_0| = \{\text{момент выхода}\}$, в который предполагается исполнение финансовых обязательств. Если суммарная численность активной и пассивной клиентуры фиксирована: $N = \sum_{k=0}^{|\Omega_0|} N_k$, то вероятностным пространством является бозевская факторизация $\{\Omega_N^\infty, \Sigma_N^\infty, \mathcal{P}_N^\infty\}$ пространства Ω_0^N . Односторонние переходы между состояниями ω_k и ω_{k+1} ($k \geq 1$) происходят детерминированным образом, а переход из состояния ω_0 в ω_1 является пуассоновским процессом с интенсивностью, пропорциональной некоторой случайной функции от числа активных клиентов $N_a = \sum_{k=1}^{|\Omega_0|} N_k$ и ожидаемой рентабельности R . (Среднее) число активных клиентов

определяет скорость распространения информации, а ожидание рентабельности является стимулом быстрого принятия решения. Начальное распределение сосредоточено в состояниях ω_0 и ω_1 . Коллапс пирамиды наступает в момент первого достижения $t_* = \min\{t: RN_{|\Omega_0|}(t) \geq N_a(t)\}$.

Лемма 1. *Имеют место следующие производящие выражения для статистического веса и характеристического функционала вероятностной меры (2):*

$$\Gamma_N(M) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha P_k} \Big|_{\alpha=0}, \quad (3)$$

$$\langle e^{i \sum_k \lambda_k N_k} \rangle = \frac{1}{N! \Gamma_N(M)} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha e^{i \lambda_k} P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha e^{i \lambda_k} P_k} \Big|_{\alpha=0}. \quad (4)$$

Доказательство. Сумма в (2) содержит только такие произведения вероятностей P_k , кратность которых не превосходит M_k , а сумма всех кратностей равна N , т.е.

$$\begin{aligned} \Gamma_N(M) &= \left\{ \text{coeff } \alpha^N: \prod_k \left(1 + \alpha P_k + \dots + (\alpha P_k)^{M_k} \right) \right\} \\ &= \left\{ \text{coeff } \alpha^N: \prod_k \frac{1 - (\alpha P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha P_k} \right\}. \end{aligned}$$

Это замечание доказывает формулу для статистического веса $\Gamma_N(M)$. Аналогично, согласно определению (2), имеем:

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_k \lambda_k N_k} \rangle &= \sum_{\omega \in \Omega_N(M)} P_N(\omega) \exp \left\{ i \sum_k \lambda_k N_k(\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma_N(M)} \left\{ \text{coeff } \alpha^N: \prod_k \left(1 + \alpha e^{i \lambda_k} P_k + \dots + (\alpha e^{i \lambda_k} P_k)^{M_k} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma_N(M)} \left\{ \text{coeff } \alpha^N: \prod_k \frac{1 - (\alpha e^{i \lambda_k} P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha e^{i \lambda_k} P_k} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула для характеристического функционала. Лемма доказана.

Важными частными случаями являются бозевский ($M = \infty = \{\infty, \infty, \dots\}$) и фермиевский ($M = 1 = \{1, 1, \dots\}$). В первом и во втором случаях соответственно получаем из формулы (3):

$$\begin{aligned} \Gamma_N(\infty) &= \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} (1 - \alpha P_k)^{-1} \Big|_{\alpha=0}, \\ \Gamma_N(1) &= \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} (1 + \alpha P_k) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Если $P_k = |\Omega_0|^{-1}$, то $\Gamma_N(\infty) = |\Omega_0|^{-N} C_{|\Omega_0|+N-1}^N$ и $\Gamma_N(1) = \{0$, если $N > |\Omega_0|$; $|\Omega_0|^{-N} C_{|\Omega_0|}^N$, если $N \leq |\Omega_0|$ }. При этом вероятности $P_N(\omega)$ не зависят от элементарного события ω и могут быть найдены с помощью комбинаторных оценок: $P_N(\omega|M = \infty) = (C_{|\Omega_0|+N-1}^N)^{-1}$, $P_N(\omega|M = 1) = (C_{|\Omega_0|}^N)^{-1}$ (см. [11]–[13]). С другой стороны, $C_{|\Omega_0|+N-1}^N$ и $C_{|\Omega_0|}^N$ совпадают с размерностями симметричной и антисимметричной частей базиса в $\mathcal{H} = l_2(|\Omega_0|^N)$. Таким образом, $P_N(\omega|M) = 1/\text{Tr}_M 1$. Эта формула обобщается для произвольного дискретного распределения $\{P_k\}$ (доказательство см. в [6]):

$$P_N(B|M) = \frac{\sum_k (\psi_k, \hat{P} I_B \psi_k)}{\sum_k (\psi_k, \hat{P} I \psi_k)} = \frac{\text{Tr}_M \{\hat{P} I_B\}}{\text{Tr}_M \hat{P}},$$

$$\hat{P} I_B(\omega) = \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} P_k^{N_k(\omega)} I_B(\omega),$$

где B — некоторое подмножество из $\Sigma_N(M)$, $\{\psi_k\}$ — ортонормированный базис симметричных ($M_k = \infty$) или антисимметричных ($M_k = 1$) функций в $l_2(|\Omega|^N)$, а $\hat{P}$ — оператор умножения на функцию распределения вероятности.

Отметим также, что в общем случае имеет место неравенство

$$P_N\{N_k = n, N_\ell = m|M\} > P_N\{N_k = n|M\} P_N\{N_\ell = m|M\},$$

т.е. числа заполнения N_k не являются независимыми случайными величинами в факторизованном вероятностном пространстве $\{\Omega_N(M), \Sigma_N(M), \mathcal{P}_N(\cdot|M)\}$.

2. Пусть $P_k = P(\omega_k)$ — вероятностная мера на Ω_0 и $\Omega_N(M)$ — фактор-подпространства прямых произведений Ω_N . Рассмотрим прямые суммы множеств элементарных событий

$$\omega = (\{\emptyset\}, \{\omega_{i_{11}}\}, \{\omega_{i_{21}} \otimes \omega_{i_{22}}\}, \dots) = (\{\emptyset\}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots),$$

$$\omega_{i_{mn}} \in \Omega_0, \quad \omega^{(N)} \in \Omega_N(M), \quad \Omega(M) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \Omega_N(M).$$

Событие $\{\emptyset, \emptyset, \dots\}$ называется *вакуумным состоянием*, его вероятность равна p_0 .

Зададим вероятностную меру элементарных событий на $\Omega(M)$ (см. [6]):

$$P(\omega) = p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \prod_{k=1}^N P_{i_{k,N}} = p_0 \sum_{N=1}^{\infty} z^N \Gamma_N(M) P_N(\omega^{(N)}),$$

$$\omega^{(N)} = \bigotimes_{k=1}^N \omega_{i_{k,N}}, \quad \text{где } i_{1,N} \leq i_{2,N} \leq \dots \quad (5)$$

Вероятность вакуумного состояния p_0 и постоянные z определяются из условия нормировки полной вероятности $\sum_{\omega \in \Omega(M)} P(\omega) = 1$ и условия на среднее значение числа частиц $\langle N \rangle = \sum_1^\infty N \pi_N$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\omega \in \Omega(M)} P(\omega) = p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \Gamma_N(M) = p_0 e^{z \partial_\alpha} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha P_k} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (z P_k)^{M_k+1}}{1 - z P_k}, \\ \langle N \rangle &= \sum_1^\infty N \pi_N = p_0 \sum_{N=1}^{\infty} N z^N \Gamma_N(M) = z p_0 \frac{d}{dz} \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (z P_k)^{M_k+1}}{1 - z P_k}, \end{aligned}$$

а параметры z и p_0 удовлетворяют неявным уравнениям:

$$\langle N \rangle = \sum_1^{|\Omega_0|} F_{M_k}(z P_k), \quad p_0 = \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (z P_k)^{M_k+1}}{1 - z P_k}, \quad (6)$$

где

$$F_M(x) = \frac{1}{x^{-1} - 1} - \frac{M+1}{x^{-M-1} - 1} = \frac{1-x}{1-x^{M+1}} x \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^{M+1}}{1-x} \right). \quad (7)$$

Распределения $\{\pi_N\}$: $\pi_N = p_0 z^N \Gamma_N(M)$ называются *обобщенными биномиальными распределениями*. Они имеют смысл вероятностей N -частичных состояний.

Так как функции $F_M(x)$ являются монотонными по z и неограниченно возрастают на интервале $(0, 1)$, то первое уравнение (6) имеет единственное решение, которое однозначно определяет $z \in (0, 1/\max P_k)$. Вероятностные пространства с мерой (5) обладают рядом замечательных свойств, рассматриваемых ниже.

Лемма 2. Вероятность события $\hat{\omega}_k = \{\text{состояние } \omega_k \text{ свободно}\}$ равна

$$P(\hat{\omega}_k | M) = \frac{1 - (z P_k)^{M_k+1}}{1 - z P_k}.$$

Вероятность вакуумного состояния p_0 равна произведению вероятностей событий $\hat{\omega}_k$, а слагаемые $F_{M_k}(z P_k)$ в сумме (6) равны средним значениям чисел заполнения состояний ω_k .

Условие $\sum_1^N P_k = 1$ имеет эквивалентную форму

$$z = \sum_{k=1}^{|\Omega_0|} C_{M_k}(\langle N_k \rangle), \quad z P_k = C_{M_k}(\langle N_k \rangle), \quad (8)$$

где $x = C_M(y)$ — единственное на $[0, 1)$ вещественное положительное решение уравнения $y = F_M(x)$, $x \in [0, 1)$, $y \geq 0$, где $F_M(x)$ — функция (7).

Доказательство. Заметим, что в подпространстве с фиксированным числом частиц вероятность того, что состояние ω_m свободно, равна

$$\begin{aligned} \sum_{\omega: N_m(\omega)=0} P_N(\omega|M) &= \frac{\Gamma_N(\Omega_0 \setminus \{\omega_m\}|M)}{\Gamma_N(\Omega_0|M)} \\ &= \frac{1}{N! \Gamma_N(\Omega_0|M)} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1, k \neq m}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha P_k} \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Поэтому из определения (6) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} P(\hat{\omega}_k) &= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\omega: N_m(\omega)=0} P_N(\omega|M) \\ &= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{k=1, k \neq m}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_k)^{M_k+1}}{1 - \alpha P_k} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 \prod_{k=1, k \neq m}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (z P_k)^{M_k+1}}{1 - z P_k}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $p_0 = \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} (1 - z P_k) / (1 - (z P_k)^{M_k+1})$, получаем первое утверждение леммы. В бозевском и фермиевском случаях соответственно имеем $P_B(\hat{\omega}_k) = 1 - z P_k$, $P_F(\hat{\omega}_k) = (1 + z P_k)^{-1}$.

Вычислим среднее значение $\langle N_k^n \rangle$ для целых положительных n . По определению среднего,

$$\begin{aligned} \langle N_k^n \rangle &= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \Gamma_N(M) \sum_{m=0}^{\infty} m^n \sum_{\omega: N_k(\omega)=m} P_N(\omega) \\ &= p_0 \sum_{N=1}^{|\Omega_0|} \frac{z^N}{N!} \left(P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \right)^n \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{i=0}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_i)^{M_i+1}}{1 - \alpha P_i} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0(P_1, P_2, \dots) \left(P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \right)^n \frac{1}{p_0(P_1, P_2, \dots)} \\ &= \frac{1-x}{1-x^{M_k+1}} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \frac{1-x^{M_k+1}}{1-x} \Big|_{x=zP_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности,

$$\langle N_k \rangle = \frac{z P_k}{1 - z P_k} - (M_k + 1) \frac{(z P_k)^{M_k+1}}{1 - (z P_k)^{M_k+1}} = F_{M_k}(z P_k).$$

Отсюда $z P_k = C_{M_k}(\langle N_k \rangle)$ по определению обратной функции. Лемма доказана.

В частности,

$$C_{\infty}(x) = \frac{x}{1+x}, \quad C_1(x) = \frac{x}{1-x}, \quad C_2(x) = \frac{x-1+\sqrt{1+6x-3x^2}}{2(2-x)},$$

$$C_3(x) = \frac{1}{3(3-x)} \left(x-2 + \frac{f_3(x)}{2^{1/3}} - \frac{2^{1/3}(5-8x+2x^2)}{f_3(x)} \right),$$

где

$$f_3(x) = \left(38 + 168x - 120x^2 + 20x^3 - 6\sqrt{6}(-3+x) \right. \\ \left. \times \sqrt{1+6x+16x^2-12x^3+2x^4} \right)^{1/3}.$$

Рис. 1

Выражение для $C_4(x)$ также может быть получено в явном виде, но мы не приводим его из-за громоздкости. Графики функций на рис. 1 показывают близость функций $C_k(x) = x + O(x^2)$ при малых x .

Отметим, что в фермиевском случае вероятность того, что состояние ω_k свободно, равна $P(\hat{\omega}_k) = 1 - \langle N_k \rangle$, т.е. среднее число частиц в состоянии ω_k равно вероятности того, что состояние ω_k занято.

Теорема 1. Числа заполнения состояний N_k являются независимыми случайными величинами. Характеристический функционал вероятностной меры (5) равен

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_k N_k \lambda_k} \rangle &= \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - P_k z}{1 - e^{i \lambda_k} P_k z} \frac{1 - (ze^{i \lambda_k} P_k)^{M_k+1}}{1 - (P_k z)^{M_k+1}} \\ &= \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} \frac{1 - C_{M_k}(\langle N_k \rangle)}{1 - e^{i \lambda_k} C_{M_k}(\langle N_k \rangle)} \frac{1 - (C_{M_k}(\langle N_k \rangle) e^{i \lambda_k})^{M_k+1}}{1 - C_{M_k}(\langle N_k \rangle)^{M_k+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Для доказательства независимости убедимся, что $\langle N_k^a N_j^b \rangle = \langle N_k^a \rangle \langle N_j^b \rangle$ с произвольными целыми $a, b \geq 0$. Для этого воспользуемся определением среднего:

$$\langle N_k^a N_j^b \rangle = p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \Gamma_N(M) \sum_{m,n=0}^{\infty} m^a n^b \sum_{\omega: N_k(\omega)=m, N_j(\omega)=n} P_N(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= p_0 \sum_{N=1}^{|\Omega_0|} \frac{z^N}{N!} \left(P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \right)^a \left(P_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right)^b \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{i=0}^{|\Omega_0|} \frac{1 - (\alpha P_i)^{M_i+1}}{1 - \alpha P_i} \Big|_{\alpha=0} \\
&= p_0(P_1, P_2, \dots) \left(P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \right)^a \left(P_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right)^b \frac{1}{p_0(P_1, P_2, \dots)}.
\end{aligned}$$

Поскольку p_0 распадается на произведение функций от P_m (см. формулу (6)), производные по P_k и P_j входят как сомножители, а сомножители, зависящие от P_m , $m \neq n$, $m \neq j$, сокращаются с соответствующими сомножителями из p_0 . Учитывая формулу (9) из доказательства леммы 2, получаем $\langle N_k^a N_j^b \rangle = \langle N_k^a \rangle \langle N_j^b \rangle$. Отсюда следует, что $\mathbf{E}f(N_k)\phi(N_j) = \mathbf{E}f(N_k)\mathbf{E}\phi(N_j)$ для любых ограниченных измеримых функций f, ϕ .

Далее, по определению среднего значения и вероятности p_0 имеем

$$\begin{aligned}
\langle e^{i \sum_k N_k \lambda_k} \rangle &= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z^N \Gamma_N(M) \sum_{\omega} e^{i \sum_k \lambda_k N_k(\omega)} P_N(\omega) \\
&= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \frac{d^N}{d\alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega|} \left(1 + \alpha e^{i\lambda_1} P_1 + \dots + (\alpha e^{i\lambda_k} P_k)^{M_k} \right) \Big|_{\alpha=0} \\
&= p_0 \prod_k \frac{1 - (ze^{i\lambda_k} P_k)^{M_k+1}}{1 - ze^{i\lambda_k} P_k} = \prod_k \frac{1 - (ze^{i\lambda_k} P_k)^{M_k+1}}{1 - ze^{i\lambda_k} P_k} \frac{1 - zP_k}{1 - (zP_k)^{M_k+1}},
\end{aligned}$$

что совпадает с формулой (10) и завершает доказательство теоремы.

3. Для ансамбля частиц интенсивность парных взаимодействий частиц в состоянии ω_n с частицами, находящимися в состоянии ω_k , пропорциональна среднему числу частиц $\langle N_k \rangle$ [9], [10]. Поэтому скачкообразный марковский процесс в ансамбле с переменным числом частиц, совершающих спонтанные переходы из состояния ω_n в состояние ω_m с вероятностью $M_{mn}^k \geq 0$, $\sum_m M_{mn}^k = 1$, и интенсивностью $\nu_{kn} = \lambda_{kn} \nu_k$, $\nu_k = \langle N_k \rangle$, при взаимодействии с частицами, находящимися в состоянии ω_k , описывается прямым уравнением Колмогорова–Феллера:

$$\frac{d}{dt} P_m(t) = \sum_k \left(\sum_n \nu_{kn} M_{mn}^k P_n(t) - \nu_{km} P_m(t) \right), \quad (11)$$

где $P_k(t)$ — вероятности событий ω_k из Ω_0 (см. п. 1). Признаком перехода из одного состояния в другое в уравнении (11) является условие $n \neq m$ или $M_{nn}^k = 0$ в сумме (11).

Из соотношения (8) и условия нормировки $\sum_m \langle N_m \rangle = N$, получаем

$$\frac{d}{dt} \langle N_m \rangle = (z \dot{P}_m + z \dot{P}_m) A_{M_m}(z P_m), \quad (12)$$

где $A_M(x) = F_N(x)' = (1-x)^{-2} - (M+1)^2 x^M (1-x^{M+1})^{-2}$. Учитывая, что $\sum_k \langle N_k \rangle = N = \text{const}$ и $zP_m = C_{M_m}(\langle N_m \rangle)$, получаем

$$\frac{\dot{z}}{z} = - \frac{\sum_m \dot{P}_m A_{M_m}(zP_m)}{\sum_m P_m A_{M_m}(zP_m)} = - \frac{\sum_j z \dot{P}_j a_{M_j}(\langle N_j \rangle)}{\sum_m C_{M_m}(\langle N_m \rangle) a_{M_m}(\langle N_m \rangle)},$$

где $a_M(x) = A_M(C_M(x))$.

Теперь уравнение (12), описывающее эволюцию средних значений $\rho(m, t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle N_m(t) \rangle$, может быть переписано в замкнутом виде, не содержащем ненаблюдаемых величин z и P_m :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(m, t) = & a_{M_m}(\rho(m, t)) \\ & \times \left\{ \sum_k \left(\sum_n \nu_{kn} M_{mn}^k C_{M_n}(\rho(n, t)) - \nu_{km} C_{M_m}(\rho(m, t)) \right) \right. \\ & - \frac{C_{M_m}(\rho(m, t))}{\sum_n C_{M_n}(\rho(n, t)) a_{M_n}(\rho(n, t))} \\ & \times \sum_j a_{M_j}(\rho(j, t)) \sum_k \left(\sum_n \nu_{kn} M_{jn}^k C_{M_n}(\rho(n, t)) \right. \\ & \left. \left. - \nu_{kj} C_{M_j}(\rho(j, t)) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. Самосогласованная система нелинейных уравнений, описывающая марковскую эволюцию средних значений чисел заполнения для факторизованных вероятностных пространств с неограниченным числом частиц имеет вид (13).

В частных случаях бозе- и ферми-систем уравнение (13) упрощается за счет явных выражений для функций a_M и C_M :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(m, t) = & (1 \pm \rho(m, t))^2 \\ & \times \left\{ \sum_k \left(\sum_n \nu_{kn} M_{mn}^k \frac{\rho(n, t)}{1 \pm \rho(n, t)} - \nu_{km} \frac{\rho(m, t)}{1 \pm \rho(m, t)} \right) \right\} \\ & - \frac{\rho(m, t) (1 \pm \rho(m, t))}{\sum_n \rho(n, t) (1 \pm \rho(n, t))} \\ & \times \left\{ \sum_j (1 \pm \rho(j, t))^2 \sum_k \left(\sum_n \nu_{kn} M_{jn}^k \frac{\rho(n, t)}{1 \pm \rho(n, t)} - \nu_{kj} \frac{\rho(j, t)}{1 \pm \rho(j, t)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где верхний и нижний знаки отвечают статистикам Бозе и Ферми соответственно.

Если известно решение уравнения (13), то явная формула (10) для характеристического функционала позволяет выразить через средние числа заполнения математическое ожидание любой функции чисел заполнения, фурье-образ которой принадлежит $L_2(\mathbf{R}^{|\Omega_0|})$.

Теорема 3. Для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^{|\Omega_0|})$ такой, что $\tilde{f} \in L_1(\mathbf{R}^{|\Omega_0|})$, условное математическое ожидание $E_{N_1, N_2, \dots}$ по случайным траекториям $N_1(t), N_2(t), \dots$, начинающимся в момент времени $t = 0$ в точке $\{N_1, N_2, \dots\}$, равно

$$\begin{aligned} f(t, N_1, N_2, \dots) &= E_{N_1, N_2, \dots} f(N_1(t), N_2(t), \dots) \\ &= (2\pi)^{-|\Omega_0|/2} \int_{\mathbf{R}^{|\Omega_0|}} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} d\lambda_k \\ &\quad \times \frac{1 - C_{M_k}(\rho(k, t))}{1 - e^{i\lambda_k} C_{M_k}(\rho(k, t))} \frac{1 - (C_{M_k}(\rho(k, t)) e^{i\lambda_k})^{M_k+1}}{1 - C_{M_k}(\rho(k, t))^{M_k+1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

В бозе- и ферми-случаях формула (15) значительно упрощается:

$$\begin{aligned} f(t, N_1, N_2, \dots) &= E_{N_1, N_2, \dots} f(N_1(t), N_2(t), \dots) \\ &= (2\pi)^{-|\Omega_0|/2} \int_{\mathbf{R}^{|\Omega_0|}} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \\ &= \prod_{k=1}^{|\Omega_0|} d\lambda_k (1 \pm \rho(k, t) (1 - e^{i\lambda_k}))^{\mp 1}. \end{aligned}$$

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Р. А. Минлосу за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розлин В. А. Об основных понятиях теории меры. — Матем. сб., 1949, т. 25, № 1, с. 107–150.
2. Airault H., Malliavin P. Integration géométrique sur l'espace de Wiener. — Bull. Sci. Math., 1988, v. 112, № 1, p. 3–52.
3. Маслов В. П. Теорема о классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ для N взаимодействующих фермионов. — Матем. заметки, 1998, т. 63, № 1, с. 147–150.
4. Маслов В. П. О взаимодействии классических фермионов с бозонами. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 2, с. 315–317.
5. Маслов В. П. Коммутативная теория вероятностей, отвечающая парастатистикам. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 5, с. 791–793.
6. Чеботарев А. М. Вероятностные пространства Маслова, связанные с Бозе и Ферми статистиками. — Матем. заметки, 1999, т. 65, № 6 (в печати).
7. Маслов В. П., Чеботарев А. М. Марковские эволюционные уравнения в факторизованных вероятностных пространствах. — Докл. РАН, 1999 (в печати).
8. Хинчин А. Я. Об аналитическом аппарате статистической физики. — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1950, т. 33, с. 1–55.
9. Dirac P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1927, v. 114, p. 243–265.
10. von Fock V. Konfigurationsraum und Zweite Quantisierung. — Z. Phys., 1932, v. 75, p. 622–653.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
12. Costantini D., Garibaldi U. Elementary particle statistics reconsidered. — Phys. Lett., Ser. A, 1988, v. 134, № 3, p. 161–164.
13. Bach A. Indistinguishability, Interchangeability, and Indeterminism. Dordrecht: Kluwer, 1990.

Поступила в редакцию
4.II.1999