Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, Асимптотические свойства выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 440–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:28:30

2. Гапошкин В. Ф. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 2, с. 295–319.
3. Гапошкин В. Ф. Одна теорема о сходимости почти всюду последовательности измеримых функций и ее применения к последовательностям стохастических интегралов. — Матем. сб., 1977, т. 104, в. 1, с. 3–21.
4. Алексич А. Теория ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1964.
5. Sz.-Nagy B. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert spaces. — Acta Sci. Math. (Szeged), 1947, v. 11, p. 152–157.
6. Berkson E., Gillespie T. Stečkin's theorem, transference, and spectral decompositions. — J. Funct. Anal., 1987, v. 70, p. 140–170.
7. Berkson E., Bourgain J., Gillespie T. On the a.e. convergence of ergodic averages for power-bounded operators on L^p -spaces. — Integral Equations Operator Theory, 1991, v. 14, p. 678–715.
8. Campbell J., Petersen K. The spectral measure and Hilbert transform of a measure-preserving transformation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1992, v. 15, t. 1, p. 131–142.

Поступила в редакцию
3.III.1998

© 1999 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНЫХ КВАНТИЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫБОРКАМ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА¹⁾

Приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости совместных распределений выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема. Описаны предельные распределения.

Ключевые слова и фразы: порядковые статистики, выборочные квантили, выборки случайного объема.

1. Введение. Пусть $n \geq 1$, $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с общей плотностью распределения $p(x)$, а $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ — соответствующий вариационный ряд, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Пусть $r \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — некоторые числа такие, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r < 1$. Квантили порядков $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ с.в. X_1 мы будем обозначать ξ_{λ_i} , $i = 1, \dots, r$. Выборочными квантилями порядков $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ принято называть случайные величины $X_{([\lambda_i n] + 1)}$, $i = 1, \dots, r$, где символ $[a]$ обозначает целую часть числа a . Следующий результат Мостеллера [1] (см. также [2, раздел 9.2]) является классическим. Обозначим $Y_{n,j}^* = \sqrt{n}(X_{([\lambda_j n] + 1)} - \xi_{\lambda_j})$, $j = 1, \dots, r$.

Теорема А. Если $p(x)$ дифференцируема в окрестностях квантилей ξ_{λ_i} и $p(\xi_{\lambda_i}) \neq 0$, $i = 1, \dots, r$, то совместное распределение нормированных выборочных квантилей $Y_{n,1}^*, \dots, Y_{n,r}^*$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к r -мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})$,

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_i(1 - \lambda_j)}{p(\xi_{\lambda_i})p(\xi_{\lambda_j})}, \quad i \leq j.$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@cmc.msk.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-01-01919 и 99-01-00847.

Во многих случаях заранее нельзя предугадать число наблюдений, которые будут доступны исследователю. Такая ситуация особенно характерна для биологии и медицины. Поэтому большой интерес представляют статистические задачи, в которых объем выборки сам является случайной величиной.

В связи с этим рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых одинаково распределенных с.в. с общей плотностью распределения $p(x)$. Пусть $\{N_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность целочисленных неотрицательных с.в. таких, что при каждом $n \geq 1$ с.в. N_n и $X_1, X_2, \dots$ независимы. В данной заметке рассматривается асимптотика распределения случайных величин $X_{([N_n] + 1)}$, $i = 1, \dots, r$, при $n \rightarrow \infty$ в предположении, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности.

На существенное отличие асимптотических свойств выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема, от аналогичных свойств выборочных квантилей в стандартной ситуации обратил внимание еще Б. В. Гнеденко. В частности, изучая достаточные условия слабой сходимости распределений выборочных квантилей в выборках случайного объема, он привел следующий пример, связанный с выборочной медианой. Хорошо известно, что в стандартной ситуации выборочная медиана асимптотически нормальна (это, в частности, немедленно вытекает из теоремы А). В то же время, как показано в [3], если объем выборки N_n имеет геометрическое распределение со средним n , то нормированная выборочная медиана $\sqrt{n}(X_{([N_n/2] + 1)} - \xi_{1/2})$ имеет предельную функцию распределения $\Psi(x) = \frac{1}{2}(1 + x/\sqrt{2 + x^2})$, у которой нет никаких моментов положительных порядков!

Кратко остановимся на истории рассматриваемой задачи. Б. В. Гнеденко, С. Стоматович и А. Шукри [4] получили достаточные условия сходимости распределений выборочной медианы, построенной по выборкам случайного объема. В кандидатской диссертации А. К. Шукри эти условия распространены на выборочные квантили произвольного порядка. В работах В. Ю. Королева и Д. О. Селивановой [5] и [6] получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерных распределений выборочных квантилей в выборках случайного объема. Наконец, в заметке [7] приведены необходимые и достаточные условия слабой сходимости распределений произвольных статистик, построенных по выборкам случайного объема, в предположении, что рассматриваемые статистики асимптотически нормальны при неслучайном объеме выборки.

Цель данной статьи — привести необходимые и достаточные условия слабой сходимости совместных распределений выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема, и описать возникающие при этом r -мерные предельные законы, распространив тем самым теорему А Мостеллера на выборки со случайным объемом. Основная теорема будет получена с помощью одного общего результата об условиях слабой сходимости произвольных многомерных случайных последовательностей с независимыми случайными индексами при операторной нормировке. Все нужные для этого сведения приводятся в следующем пункте.

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим последовательность $\{S_n\}_{n \geq 1}$ случайных элементов (с.э.), принимающих значения в r -мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^r$. Пусть $\Theta(\mathbf{R}^r)$ — множество всех невырожденных линейных операторов, действующих из $\mathbf{R}^r$ в $\mathbf{R}^r$. Символы $\Rightarrow$, $\stackrel{d}{=}$ и $\stackrel{P}{\rightarrow}$ будут соответственно обозначать слабую сходимость, совпадение распределений и сходимость по вероятности. Предположим, что существуют последовательности $\{B_n\}_{n \geq 1}$ операторов из $\Theta(\mathbf{R}^r)$ и $\{a_n\}_{n \geq 1}$ элементов из $\mathbf{R}^r$ такие, что

$$Y_n \equiv B_n^{-1}(S_n - a_n) \Rightarrow Y \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.1)$$

где Y — некоторый с.э., распределение которого мы обозначим H .

Наряду с $\{S_n\}_{n \geq 1}$, рассмотрим последовательность целочисленных положительных с.в. $\{N_n\}_{n \geq 1}$ таких, что при каждом $n \geq 1$ с.в. N_n независима от последовательности $\{S_k\}_{k \geq 1}$. Пусть $c_n \in \mathbf{R}^r$, $D_n \in \Theta(\mathbf{R}^r)$, $n \geq 1$. В данном пункте мы сформулируем достаточные условия слабой сходимости распределений с.э. $Z_n = D_n^{-1}(S_{N_n} - c_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим, что все с.в. и с.э. заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Под измеримостью случайного поля подразумевается его измеримость как

функции двух переменных — элементарного исхода и параметра — относительно декартова произведения σ -алгебры $\mathcal{A}$ и борелевской σ -алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{R}^r)$ подмножеств $\mathbf{R}^r$.

Для $g \in \mathbf{R}^r$ обозначим $W_n(g) = D_n^{-1}(B_{N_n}g + a_{N_n} - c_n)$. В работах [8] и [9] доказана следующая теорема, устанавливающая достаточные условия слабой сходимости произвольных многомерных случайных последовательностей с независимыми случайными индексами при операторной нормировке.

Теорема В. Пусть $\|D_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и последовательность случайных величин $\{\|D_n^{-1}B_{N_n}\|\}_{n \geq 1}$ слабо относительно компактна. Предположим, что существуют случайный элемент Y с распределением H и случайное поле $W(g)$, $g \in \mathbf{R}^r$, такие, что имеет место (2.1) и

$$W_n(g) \Rightarrow W(g) \quad (n \rightarrow \infty)$$

для H -почти всех $g \in \mathbf{R}^r$. Тогда поле $W(g)$ измеримо, линейно зависит от g и

$$Z_n \Rightarrow W(Y) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.2)$$

где поле $W(\cdot)$ и случайный элемент Y независимы.

Теперь приведем один вспомогательный результат, связанный с идентифицируемостью специального семейства смесей многомерных нормальных законов. Нормальное распределение в $\mathbf{R}^r$ с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ будем обозначать Φ_Σ . Пусть U — неотрицательная с.в. Символом $E\Phi_{U\Sigma}(\cdot)$ мы будем обозначать распределение, которое для каждого борелевского множества A в $\mathbf{R}^r$ определяется как

$$E\Phi_{U\Sigma}(A) = \int_0^\infty \Phi_{u\Sigma}(A) dP\{U < u\}. \quad (2.3)$$

Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех неотрицательных с.в.

Лемма 1. Какова бы ни была невырожденная ковариационная матрица Σ , семейство распределений $\{E\Phi_{U\Sigma}(\cdot): U \in \mathcal{U}\}$ идентифицируемо в том смысле, что если $U_1 \in \mathcal{U}$, $U_2 \in \mathcal{U}$ и

$$E\Phi_{U_1\Sigma}(A) = E\Phi_{U_2\Sigma}(A) \quad (2.4)$$

для любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^r)$, то $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$.

Доказательство этого утверждения совсем просто. Если $U \in \mathcal{U}$, то характеристическая функция, соответствующая распределению $E\Phi_{U\Sigma}(\cdot)$, имеет вид

$$\phi_U(t) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}t^T(u\Sigma)t\right\} dP\{U < u\} = \int_0^\infty \exp\{-us\} dP\{U < u\}, \quad (2.5)$$

$s = \frac{1}{2}\|C^T t\|^2$, $t \in \mathbf{R}^r$, где C — невырожденная матрица такая, что $C^T \Sigma^{-1} C = I_r$, а I_r — тождественная матрица размера $r \times r$. Но в правой части (2.5) стоит преобразование Лапласа—Стилтьеса с.в. U . Из (2.4) вытекает тождество $\phi_{U_1}(t) \equiv \phi_{U_2}(t)$, что в силу (2.5) означает совпадение преобразований Лапласа—Стилтьеса с.в. U_1 и U_2 , а это в свою очередь влечет $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$. Лемма доказана.

3. Основные результаты. В дополнение к обозначениям, введенным в п. 1, положим $Q_{n,j} = X_{([\lambda_j N_n] + 1)}$, $j = 1, \dots, r$, $Q_n = (Q_{n,1}, \dots, Q_{n,r})$, $\xi = (\xi_{\lambda_1}, \dots, \xi_{\lambda_r})$, $Z_n = \sqrt{n}(Q_n - \xi)$. Основным результатом данной статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если $p(x)$ дифференцируема в окрестностях квантилей ξ_{λ_i} и $p(\xi_{\lambda_i}) \neq 0$, $i = 1, \dots, r$, то для сходимости

$$Z_n \Rightarrow Z \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

к некоторому случайному элементу Z необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина U , что

$$\frac{N_n}{n} \Rightarrow U^2 \quad (n \rightarrow \infty), \quad P\{Z \in A\} = E\Phi_{U^{-2}\Sigma}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^r),$$

где $\Sigma = (\sigma_{ij})$,

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_i(1 - \lambda_j)}{p(\xi_{\lambda_i})p(\xi_{\lambda_j})}, \quad i \leq j.$$

Доказательство. Достаточность. При доказательстве мы будем существенно опираться на теорему В. Для каждого $n \geq 1$ положим $S_n = Q_n - \xi$, $a_n = c_n = 0$, $B_n^{-1} = D_n^{-1} = \sqrt{n}I_r$. Заметим, что условия теоремы гарантируют слабую относительную компактность последовательности случайных величин $\|D_n^{-1}B_{N_n}\| = \sqrt{n/N_n}$, $n = 1, 2, \dots$, вследствие ее слабой сходимости к с.в. $1/U$. Это обусловлено тем, что точка $x \geq 0$ является точкой непрерывности функции распределения некоторой неотрицательной с.в. X тогда и только тогда, когда точка $1/x$ является точкой непрерывности функции распределения с.в. $1/X$ (для определенности можно считать, что $1/0 = +\infty$ в силу неотрицательности с.в. X). Далее, в рассматриваемом случае $W_n(g) = \sqrt{\frac{n}{N_n}}g$, $g \in \mathbb{R}^r$. Поэтому условие $N_n/n \Rightarrow U^2$ влечет $W_n(g) \Rightarrow U^{-1}g$ для всех $g \in \mathbb{R}^r$. Условие (2.1) выполнено по теореме А с $H = \Phi_\Sigma$. Поэтому по теореме В $Z_n \Rightarrow U^{-1}Y$, где Y — с.э. с распределением Φ_Σ , независимый от с.в. U . Несложно убедиться, что распределение с.э. $U^{-1}Y$ совпадает с $E\Phi_{U^{-2}\Sigma}(\cdot)$, где матрица Σ определена в формулировке теоремы.

Необходимость. Пусть выполнено условие (3.1). Убедимся в слабой относительной компактности последовательности случайных величин $\{\|D_n^{-1}B_{N_n}\|\}_{n \geq 1}$. Положим $Y_n^* = (Y_{n,1}^*, \dots, Y_{n,r}^*)$, где с.в. $Y_{n,j}^*$, $j = 1, \dots, r$, определены во введении. Пусть Y — с.э. с распределением Φ_Σ . Существуют такие числа $\delta > 0$ и $R > 0$, что

$$\mathbf{P}\{\|Y\| > R\} > \delta. \quad (3.2)$$

Для выбранного таким образом R и произвольного $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|\sqrt{n}S_n\| > x\} &\geq \mathbf{P}\{\|\sqrt{n}S_n\| > x; \|\sqrt{N_n}S_n\| > R\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{\|\sqrt{N_n}S_n\|}; \|\sqrt{N_n}S_n\| > R\right\} \\ &\geq \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}; \|\sqrt{N_n}S_n\| > R\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_n = k\} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}; \|Y_k^*\| > R\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_n = k\} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right\} \mathbf{P}\{\|Y_k^*\| > R\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(последнее равенство имеет место, поскольку любая константа независима от любой с.в.). Так как в условиях теоремы 1 в силу теоремы А имеет место сходимость $Y_k^* \Rightarrow Y$ ($k \rightarrow \infty$), то из (3.2) вытекает существование такого номера $k_0 = k_0(R, \delta)$, что $\mathbf{P}\{\|Y_k^*\| > R\} > \frac{\delta}{2}$ для всех $k > k_0$. Поэтому, продолжив (3.3), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|\sqrt{n}S_n\| > x\} &\geq \frac{\delta}{2} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \mathbf{P}\{N_n = k\} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right\} \\ &= \frac{\delta}{2} \left[\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right\} - \sum_{k=1}^{k_0} \mathbf{P}\{N_n = k\} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{k}} > \frac{x}{R}\right\} \right] \\ &\geq \frac{\delta}{2} \left[\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right\} - \mathbf{P}\{N_n \leq k_0\} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R}\right\} \leq \frac{2}{\delta} \mathbf{P}\{\|\sqrt{n}S_n\| > x\} + \mathbf{P}\{N_n \leq k_0\}. \quad (3.5)$$

Из условия $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $\mathbf{P}\{N_n \leq n_0\} < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Поэтому с учетом слабой относительной компактности последовательности $\{\sqrt{n}S_n\}_{n \geq 1}$, вытекающей из ее слабой

сходимости к с.э. Z вследствие условия (3.1), соотношение (3.5) влечет

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \geq n_0(\varepsilon)} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{N_n}} > \frac{x}{R} \right\} \leq \varepsilon, \quad (3.6)$$

каким бы ни было $\varepsilon > 0$. Предположим теперь, что последовательность $\|D_n^{-1} B_{N_n}\| = \sqrt{n/N_n}$, $n = 1, 2, \dots$, не является слабо относительно компактной. В этом случае существует число $\alpha > 0$ и последовательности $\mathcal{N}$ натуральных и $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ вещественных чисел, удовлетворяющие условиям $x_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$) и

$$P \left\{ \sqrt{\frac{n}{N_n}} > x_n \right\} > \alpha, \quad n \in \mathcal{N}. \quad (3.7)$$

Но, согласно (3.6), для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $M = M(\varepsilon)$ и $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\sup_{n \geq n_0(\varepsilon)} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{N_n}} > M(\varepsilon) \right\} \leq 2\varepsilon. \quad (3.8)$$

Выберем $\varepsilon < \alpha/2$, где α — число из (3.7). Тогда для всех достаточно больших $n \in \mathcal{N}$, согласно (3.7), должно выполняться неравенство, противоположное (3.8). Полученное противоречие по теореме Прохорова доказывает слабую относительную компактность последовательности $\{\|D_n^{-1} B_{N_n}\|\}_{n \geq 1}$ или, что в данном случае то же самое, последовательности $\{n/N_n\}_{n \geq 1}$.

Введем множество

$$\mathcal{W}(Z) = \left\{ U' : P\{U' \geq 0\} = 1, P\{Z \in A\} = E\Phi_{(U')^2 \Sigma}(A) \text{ для любого } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^r) \right\}.$$

Пусть $L(\cdot, \cdot)$ — метрика Леви в пространстве случайных величин или, что то же самое, в пространстве функций распределения (если X_1 и X_2 — с.в. с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно, то мы отождествляем $L(X_1, X_2)$ и $L(F_1, F_2)$). Покажем, что существует последовательность с.в. $\{U'_n\}_{n \geq 1}$, $U'_n \in \mathcal{W}(Z)$, такая, что

$$L \left(\frac{n}{N_n}, (U'_n)^2 \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.9)$$

Обозначим

$$\beta_n = \inf \left\{ L \left(\frac{n}{N_n}, (U')^2 \right) : U' \in \mathcal{W}(Z) \right\}.$$

Покажем, что $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим противное. В таком случае $\beta_n \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех n из некоторой подпоследовательности $\mathcal{N}$ натуральных чисел. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ так, чтобы последовательность $\{n/N_n\}_{n \in \mathcal{N}_1}$ слабо сходилась к некоторой с.в. $(U')^2$ (это можно сделать в силу установленной выше слабой относительной компактности семейства $\{n/N_n\}_{n \geq 1}$). Но с помощью рассуждений, приведенных при доказательстве достаточности, мы заключаем, что $n/N_n \Rightarrow (U')^2$ ($n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$) тогда и только тогда, когда $N_n/n \Rightarrow U^2$ ($n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$), где с.в. U распределена так же, как $1/U'$. Но тогда $W_n(g) \Rightarrow U'g$ ($n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$) для любого $g \in \mathbf{R}^r$. Применив теорему В к $n \in \mathcal{N}_1$ с учетом условия (2.1), выполненного по теореме А, убеждаемся, что $U' \in \mathcal{W}(Z)$, поскольку условие (3.1) гарантирует совпадение пределов всех слабо сходящихся подпоследовательностей. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением о том, что $\beta_n \geq \delta$ для всех $n \in \mathcal{N}_1$. Следовательно, $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ выберем с.в. U'_n из $\mathcal{W}(Z)$, для которой выполнено условие $L(n/N_n, (U'_n)^2) \leq \beta_n + 1/n$. Эта последовательность, очевидно, удовлетворяет условию (3.9). Теперь рассмотрим структуру множества $\mathcal{W}(Z)$. Это множество состоит из с.в., определяющих семейство специальных смесей многомерных нормальных законов, о котором шла речь в п. 2. Но по лемме 1 это семейство идентифицируемо, так что, каков бы ни был с.э. Z , множество $\mathcal{W}(Z)$ состоит не более чем из одного элемента. Поэтому на самом деле условие (3.9) эквивалентно тому, что $n/N_n \Rightarrow (U')^2$ ($n \rightarrow \infty$), что в свою очередь, как уже было отмечено, эквивалентно условию $N_n/n \Rightarrow U^2$ ($n \rightarrow \infty$). Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 совместное распределение нормированных выборочных квантилей $\sqrt{n}(X_{([\lambda_j N_n]+1)} - \xi_{\lambda_j})$, $j = 1, \dots, r$, слабо сходится к r -мерному нормальному закону с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ , определенной в теореме А, если и только если

$$\frac{N_n}{n} \Rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Данное утверждение немедленно вытекает из теоремы 1 с учетом леммы 1.

Пусть $0 < \lambda < 1$, ξ_λ — квантиль с.в. X_1 порядка λ . Стандартную нормальную функцию распределения обозначим $\Phi(x)$.

Следствие 2. Предположим, что плотность $p(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки ξ_λ , $p(\xi_\lambda) > 0$ и $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для того чтобы нормированная выборочная квантиль порядка λ , построенная по выборке случайного объема N_n , имела предельное распределение при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\sqrt{n}p(\xi_\lambda)}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}(X_{([\lambda N_n]+1)} - \xi_\lambda) \Rightarrow Z \quad (n \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина U , что

$$P\{Z < x\} \equiv E\Phi(\sqrt{U}x) \quad \text{и} \quad \frac{N_n}{n} \Rightarrow U \quad (n \rightarrow \infty).$$

Это утверждение, впервые доказанное в работе [5] и приведенное также в [6], является частным случаем теоремы 1.

Автор благодарен рецензенту за советы, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mosteller F. On some useful «inefficient» statistics. — Ann. Math. Statist., 1946, v. 17, p. 377–408.
2. Дэвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.
3. Гнеденко Б. В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений. — В сб.: Теория вероятностей и математическая статистика. Труды Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1989, с. 146–150.
4. Гнеденко Б. В., Стоматович С., Шукри А. О распределении медианы. — Вестник Московского ун-та, матем., мех., 1984, № 2, с. 59–63.
5. Королев В. Ю., Селиванова Д. О. Асимптотическое поведение выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема. Деп. ВИНТИ 12.05.94, № 1197-B94.
6. Селиванова Д. О. Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для случайных сумм: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1995.
7. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 907–910.
8. Korolev V. Yu., Kossova E. V. On limit distributions of randomly indexed multidimensional random sequences with an operator normalization. — J. Math. Sci., 1992, v. 72, № 1, p. 2915–2929.
9. Korolev V. Yu., Kossova E. V. Convergence of multidimensional random sequences with independent random indices. — J. Math. Sci., 1995, v. 76, № 2, p. 2259–2268.

Поступила в редакцию
3.VII.1998