Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Предельные теоремы о максимумах пуассоновских последовательностей и их применения в теории массового обслуживания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 446–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:57:36

© 1999 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМАХ ПУАССОНОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ¹⁾

Рассматривается последовательность независимых пуассоновских случайных величин X_n с параметрами λ_n . Изучаются асимптотические свойства максимумов $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ в зависимости от свойств последовательности $\{\lambda_n\}$. Полученные результаты применяются к исследованию максимального числа заявок в системе $M|G| \infty$ с параметрами, зависящими от времени.

Ключевые слова и фразы: пуассоновские случайные величины, максимумы, предельные теоремы, сходимость почти наверное, бесконечнолинейные системы массового обслуживания.

1. Классы последовательностей. Введем классы неотрицательных числовых последовательностей следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1. Числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ принадлежит классу D , если существует такое $s > 0$, что $\lambda_n \leq n^{-s}$ при всех достаточно больших n .

О п р е д е л е н и е 2. Числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ принадлежит классу L , если для некоторого $r > 0$ и любого $s > 0$ верно $\lambda_n \leq r \ln n$ и $\lambda_n > n^{-s}$ при всех достаточно больших n .

О п р е д е л е н и е 3. Числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ принадлежит классу I , если $\lambda_n / \ln n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Свойства максимумов. Как было отмечено еще в [1], для одинаково распределенных независимых пуассоновских случайных величин не существует линейной нормировки, при которой распределения нормированных максимумов сходились бы к некоторому невырожденному предельному закону.

Однако в ряде случаев оказывается возможным получать для нормированных максимумов верхние пределы почти наверное (п.н.).

Пусть X_n — независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_n , $n \geq 1$. Обозначим $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Далее будем пользоваться неравенством

$$\frac{\lambda^m}{m!} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \left(1 - \frac{\lambda}{m+1}\right)^{-1} \frac{\lambda^m}{m!}, \quad \lambda < m+1, \quad (1)$$

доказательство которого элементарно.

Теорема 1. Если $\{\lambda_n\} \in D$, то $Y = \sup X_n$ — собственная случайная величина.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{aligned} P\{Y \leq N\} &= \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!}. \end{aligned}$$

* Московский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01092.

Обозначим $\Lambda = \sup \lambda_n n^s < \infty$. Тогда при $N > \max(\Lambda, 1/s)$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{N+2}\right)^{-1} \frac{\lambda_n^{N+1}}{(N+1)!} \\ &\leq \left(1 - \frac{\Lambda}{N+2}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s(N+1)} \frac{\Lambda^{N+1}}{(N+1)!} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $P\{Y \leq N\} \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. распределение Y собственное. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению случаев $\{\lambda_n\} \in L$, $\{\lambda_n\} \in I$.

Лемма 1. Если $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n/m_n < 1$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \geq m_n\}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = m_n\}$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из неравенства (1).

Обозначим $\varphi(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x \geq 1$. Функция φ монотонна и $\varphi: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Следовательно, существует обратная функция $\varphi^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$.

Обозначим $\tau(\theta, x) = \varphi(\theta \varphi^{-1}(x))/x$, где $\theta > 0$, $x > 0$ и $\varphi^{-1}(x) \geq 1/\theta$. Очевидно, $\tau(1, x) \equiv 1$ и τ монотонна по θ .

Лемма 2. При любом $x_0 > 0$ для всех $x \geq x_0$ выполняются неравенства:

- 1) $\tau(\theta, x) \geq \theta$ при $\theta > 1$,
- 2) $\tau(\theta, x) \leq 1 - c(\theta, x_0)(1 - \theta)$ при $\theta_0 < \theta < 1$, где $c(\theta, x_0) = 1 - \max\{0, \ln \theta / \ln \theta_0\} > 0$, $\theta_0 = 1/\varphi^{-1}(x_0)$.

Доказательство. При $x \geq x_0$, $\theta > \theta_0$ выполнено $\varphi^{-1}(x) \geq 1/\theta$, так что $\tau(\theta, x)$ определено. Будем обозначать $y = \varphi^{-1}(x) \geq 1/\theta_0 > 1$. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta}(\theta, x) = \frac{\varphi^{-1}(x)}{x} \ln(\theta \varphi^{-1}(x)) = \frac{y}{\varphi(y)} \ln \theta y \geq \frac{\ln \theta y}{\ln y} \geq c(\theta, x_0).$$

При $\theta > 1$ получаем $c(\theta, x_0) \equiv 1$. Воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях: $\tau(\theta, x) = 1 + (\partial \tau / \partial \theta)(\xi, x)(\theta - 1)$, где ξ лежит на интервале между θ и 1. При $\theta > 1$ получаем отсюда $\tau(\theta, x) \geq \theta$, а при $\theta_0 < \theta < 1$ имеем $c(\xi, x_0) \geq c(\theta, x_0)$ и $\tau(\theta, x) \leq 1 - c(\theta, x_0)(1 - \theta)$.

Обозначим $\varepsilon_n = (\ln n)/\lambda_n$, $\lambda_n > 0$ и $u_n = \lambda_n \varphi^{-1}(\varepsilon_n)$.

Лемма 3. Если $\{\lambda_n\} \in L$, то $u_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для функции φ^{-1} имеет место оценка:

$$\varphi^{-1}(x) \geq \frac{x+1}{\ln(x+1)+1}, \quad \forall x \geq 0,$$

что доказывается непосредственной подстановкой правой части в φ .

По определению класса L для любого $s > 0$ при всех достаточно больших n верно $\lambda_n > n^{-s}$. Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + n^{-s}}{\ln(n^s \ln n + 1) + 1} = \frac{1}{s}, \quad \forall s > 0,$$

что и доказывает лемму.

Заметим, что имеет место асимптотика $\varphi^{-1}(x) \sim x/\ln x$, $x \rightarrow \infty$. При $\lambda_n = o(\ln n)$ получаем

$$u_n \sim \frac{\ln n}{\ln \varepsilon_n} = \frac{\ln n}{\ln \ln n - \ln \lambda_n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Лемма 4. Если $\{\lambda_n\} \in L$, то существует такое θ_0 , что для $m_n \sim \theta u_n$, $n \rightarrow \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = m_n\}$ расходитесь при $\theta_0 < \theta < 1$ и сходится при $\theta > 1$.

Доказательство. При всех достаточно больших n имеем $\varepsilon_n \geq 1/r > 0$. Положим $\theta_0 = 1/\varphi^{-1}(1/r)$. Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим

$$\begin{aligned} \ln P\{X_n = m_n\} &= -\lambda_n + m_n \ln \lambda_n - m_n \ln m_n + m_n - \frac{1}{2} \ln m_n + O(1) \\ &\sim -\tau(\theta, \varepsilon_n) \ln n, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2, интегральный признак Коши и признак сравнения рядов, получаем утверждение леммы.

Будем пользоваться утверждением теоремы 4.4.1 [2, с. 201] в следующей формулировке: если X_n — независимые случайные величины, $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, u_n — неубывающая числовая последовательность, $u_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $S = \{\theta > 0: \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > \theta u_n\} \text{ расходится}\}$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{u_n} \stackrel{\text{п.н.}}{=} \begin{cases} \sup S, & S \neq \emptyset, \\ 0, & S = \emptyset. \end{cases}$$

Можно показать, что условие неубывания u_n здесь можно заменить на условие асимптотической эквивалентности неубывающей последовательности. Будем обозначать класс последовательностей, удовлетворяющих такому условию, через A .

Теорема 2. Если $\{\lambda_n\} \in L$, $\{u_n\} \in A$, то $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n/u_n = 1$ п.н.

Доказательство. Пусть $m_n = [\theta u_n] + 1$, $\theta > \theta_0$. По лемме 3 имеем $u_n \rightarrow \infty$. По лемме 4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = m_n\}$ расходится при $\theta_0 < \theta < 1$ и сходится при $\theta > 1$, а по лемме 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \geq m_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > \theta u_n\}$ сходится или расходится одновременно с ним. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 3. Если $\{\lambda_n\} \in I \cap A$, то $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n/\lambda_n = 1$ п.н.

Доказательство. Пусть $m_n = [\theta \lambda_n] + 1$, где $\theta > 1$, тогда $\ln P\{X_n = m_n + 1\} \sim -\lambda_n \varphi(\theta)$, $n \rightarrow \infty$. При достаточно больших n имеем $\lambda_n > (2/\varphi(\theta)) \ln n$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = m_n\}$ сходится, а по лемме 1 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \geq m_n\}$. Значит, $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n/\lambda_n \leq 1$. С другой стороны, при $\lambda_n \rightarrow \infty$ можно воспользоваться асимптотической нормальностью X_n и получить $P\{X_n > \lambda_n\} \rightarrow \frac{1}{2}$, откуда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > \lambda_n\}$ расходится и $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n/\lambda_n \geq 1$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

3. Примеры. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим следующие примеры.

3.1. Пусть $\lambda_n = \lambda$, тогда по (2) и теореме 2

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n \frac{\ln \ln n}{\ln n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Этот известный ранее результат упомянут, например, в [2].

3.2. Пусть $\lambda_n \sim r \ln n$, $n \rightarrow \infty$, тогда по теореме 2

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{r \varphi^{-1}(1/r) \ln n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

3.3. Пусть $\lambda_n \sim cn$, $n \rightarrow \infty$, тогда по теореме 3

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n/\lambda_n = 1 \quad \text{п.н.}$$

4. Применения в теории массового обслуживания. Рассмотрим систему с нестационарным пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda(t)$ и бесконечным числом приборов. Если заявка приходит в момент t , то время ее обслуживания имеет функцию распределения $B_t(x)$. Обслуживание заявок происходит независимо, в начальный момент система свободна.

Подобные системы рассматриваются, например, в [3], [4].

Нас будет интересовать асимптотическое поведение максимума $M(t)$ числа заявок в системе на $[0, t]$ при $t \rightarrow \infty$.

Обозначим через $<$ отношение «стохастически меньше», т.е. $\xi < \eta \Leftrightarrow P\{\xi > x\} \leq P\{\eta > x\}$.

Лемма 5. Пусть $\{v_n\}$ — случайная последовательность, $\Upsilon_n = \max_{1 \leq i \leq n} v_i$ и

1) $v'_n \leq v_n$, где v'_n независимы, $\Upsilon'_n = \max_{1 \leq i \leq n} v'_i$,

2) $v_n < v''_n$, где v''_n независимы, $\Upsilon''_n = \max_{1 \leq i \leq n} v''_i$; тогда для любой числовой последовательности $\{u_n\} \in A$, $u_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, выполнено неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Upsilon'_n}{u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Upsilon_n}{u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Upsilon''_n}{u_n} \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Оценка снизу для $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n/u_n$, очевидно, следует из условия 1). Если $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n''/u_n < \infty$, то из условия 2) для любого $\varepsilon > 0$ получаем: $\sum_{n=1}^{\infty} P\{v_n > (l + \varepsilon)u_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{v_n'' > (l + \varepsilon)u_n\} < \infty$, откуда по теореме 4.2.1 [2, с. 189] следует $\limsup_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n/u_n \leq l + \varepsilon$, что и доказывает лемму.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ — числовая последовательность, стремящаяся к бесконечности. Обозначим через μ_n максимальное число заявок на отрезке $J_n = [t_{n-1}, t_n]$, через μ'_n — число заявок, пришедших в течение J_n и оставшихся к его концу, и через μ_n^S — сумму числа заявок, находившихся в системе в момент t_{n-1} , и числа заявок, пришедших в течение J_n . Очевидно, $\mu'_n \leq \mu_n \leq \mu_n^S$, причем μ'_n независимы.

Построим последовательность независимых случайных величин $\mu_n'' \stackrel{d}{=} \mu_n^S$. Тогда $\mu'_n \leq \mu_n < \mu_n''$, т.е. выполняются условия леммы 5. Заметим, что μ'_n и μ_n'' — пуассоновские случайные величины с параметрами

$$\begin{aligned} \lambda'_n &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda(u) \bar{B}_u(t_n - u) du, \\ \lambda_n'' &= \int_0^{t_{n-1}} \lambda(u) \bar{B}_u(t_{n-1} - u) du + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda(u) du \end{aligned} \quad (3)$$

соответственно. Изучая асимптотику случайных последовательностей $M'_n = \max_{1 \leq i \leq n} \mu'_i$ и $M_n'' = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i''$, можно получить утверждения об асимптотике $M(t_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$.

Следующая теорема иллюстрирует применение описанного выше метода в случае, когда распределение времени обслуживания не зависит от момента поступления заявки и имеет конечное среднее β , а интенсивность входного потока растет быстрее логарифма, но медленнее экспоненты.

Теорема 4. Пусть $\lambda(t)$ не убывает при всех достаточно больших t и $\lambda(t)/\ln t \rightarrow \infty$, $\lambda(t+p)/\lambda(t) \rightarrow 1$, $\forall p$ при $t \rightarrow \infty$, тогда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{\lambda(t)} = \beta \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

Доказательство. Положим $t_n = nh$, $h > 0$, $n \geq 0$. Из (3) и условия теоремы получаем для всех достаточно больших n : $\lambda'_n \geq \lambda(t_{n-1}) \int_0^h \bar{B}(u) du$, $\lambda_n'' \leq \lambda(t_n)(\beta + h)$. Применяя лемму 5 и теорему 3, получаем:

$$\int_0^h \bar{B}(u) du \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M'_n}{\lambda(t_n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M(t_n)}{\lambda(t_n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n''}{\lambda(t_n)} \leq \beta + h. \quad (5)$$

При любом $h > 0$ имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M(t_n)}{\lambda(t_n)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{\lambda(t)}.$$

Переходя в левой части неравенства (5) к пределу при $h \rightarrow \infty$, а в правой части при $h \rightarrow 0$, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что (4) можно обратить следующим образом: пусть T_L — момент первого достижения числом заявок уровня L , тогда $\liminf_{L \rightarrow \infty} \lambda(T_L)/L = 1/\beta$ п.н.

Автор благодарен Е. В. Булинской и А. В. Печинкину за полезные замечания при обсуждении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. — Ann. Math., 1943, v. 44, № 3, p. 423–453.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984. 368 с.

3. Freyer B. Ein Bedienungssystem $(M|G|\infty)$ mit zeitabhängiger Eingangsintensität und Bedienungszeitverteilung. — Math. Operationsforsch. Statistik, 1974, B. 5, H. 9, S. 701–708.
4. Андронов А. М. Анализ нестационарной бесконечнолинейной системы массового обслуживания как модели сети случайного множественного доступа. — Автомат. и вычисл. техника, 1994, № 1, с. 28–33.

Поступила в редакцию

4.XI.1996

Переработанный вариант

21.X.1998

© 1999 г.

НАСЫРОВ Ф. С.*

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ИТО В ВИДЕ ПОТРАЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА¹⁾

Получено представление интеграла Ито в виде интеграла Лебега и обобщение формулы Ито. Доказано, что монотонная перестановка траекторий винеровского процесса абсолютно непрерывна.

Ключевые слова и фразы: интеграл Ито, локальные времена, формула Ито, броуновское движение.

1. Основные результаты. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан стандартный винеровский процесс $X(s)$, $s \in [0, 1]$. Положим $M(t) = \max\{X(s) : s \in [0, t]\}$, $m(t) = \min\{X(s) : s \in [0, t]\}$, $0 \leq t \leq 1$. Пусть $\alpha(t, u)$, $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, — локальное время процесса броуновского движения, непрерывное с вероятностью 1 по переменным (t, u) . Из определения локального времени следует (см. [2]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(\cdot, \cdot)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s, X(s)) ds = \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t f(s, u) \alpha(ds, u) du. \quad (1)$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ σ -алгебру предсказуемых множеств, а σ -алгебру борелевских множеств пространств $E = \mathbf{R}$ или $E = \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ будем обозначать через $\mathcal{B}(E)$.

В работе для определенного класса подынтегральных функций найдено представление стохастического интеграла Ито в виде интеграла Лебега, получены обобщения классической формулы Ито и доказана абсолютная непрерывность монотонных перестановок реализаций винеровского процесса.

Пусть $\varphi(s, \omega, u) = \varphi(s, u)$ — случайная функция, неотрицательная, ограниченная на множестве $[0, 1] \times \Omega \times \mathbf{R}$, измеримая относительно σ -алгебры $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$, положим $\delta(t, u) = \int_0^t \varphi(s, u) \alpha(ds, u)$. Обозначим при каждом $u \in \mathbf{R}$ и $x \in [0, +\infty)$ через $t^*(x, u)$ момент первого попадания функции $\delta(t, u)$ на уровень x : $t^*(x, u) = \inf\{s \in [0, 1] : \delta(s, u) \geq x\}$, если $\delta(s, u) \geq x$, и $t^*(x, u) = \infty$ в противном случае, $t^*(\tau) = t^*(\delta(\tau, X(\tau)), X(\tau))$. Рассмотрим ограниченную, измеримую по всем переменным и суммируемую по переменной v функцию $b(v, u, x)$, $(v, u, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times [0, +\infty)$,

* Уфимский государственный авиационный технический университет, кафедра математики, ул. К. Маркса, 12, 450000 Уфа-Центр; e-mail: farsag@math.ugatu.ac.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00096.