Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. С. Насыров, О представлении некоторых классов стохастических интегралов Ито в виде потраекторных интегралов Лебега, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 450–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:54:16

3. Freyer B. Ein Bedienungssystem $(M|G|\infty)$ mit zeitabhängiger Eingangsintensität und Bedienungszeitverteilung. — Math. Operationsforsch. Statistik, 1974, B. 5, H. 9, S. 701–708.
4. Андронов А. М. Анализ нестационарной бесконечнолинейной системы массового обслуживания как модели сети случайного множественного доступа. — Автомат. и вычисл. техника, 1994, № 1, с. 28–33.

Поступила в редакцию

4.XI.1996

Переработанный вариант

21.X.1998

© 1999 г.

НАСЫРОВ Ф. С.*

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ИТО В ВИДЕ ПОТРАЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА¹⁾

Получено представление интеграла Ито в виде интеграла Лебега и обобщение формулы Ито. Доказано, что монотонная перестановка траекторий винеровского процесса абсолютно непрерывна.

Ключевые слова и фразы: интеграл Ито, локальные времена, формула Ито, броуновское движение.

1. Основные результаты. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан стандартный винеровский процесс $X(s)$, $s \in [0, 1]$. Положим $M(t) = \max\{X(s) : s \in [0, t]\}$, $m(t) = \min\{X(s) : s \in [0, t]\}$, $0 \leq t \leq 1$. Пусть $\alpha(t, u)$, $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, — локальное время процесса броуновского движения, непрерывное с вероятностью 1 по переменным (t, u) . Из определения локального времени следует (см. [2]), что для любой ограниченной (или знакопостоянной) борелевской функции $f(\cdot, \cdot)$ справедливо равенство

$$\int_0^t f(s, X(s)) ds = \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t f(s, u) \alpha(ds, u) du. \quad (1)$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ σ -алгебру предсказуемых множеств, а σ -алгебру борелевских множеств пространств $E = \mathbf{R}$ или $E = \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ будем обозначать через $\mathcal{B}(E)$.

В работе для определенного класса подынтегральных функций найдено представление стохастического интеграла Ито в виде интеграла Лебега, получены обобщения классической формулы Ито и доказана абсолютная непрерывность монотонных перестановок реализаций винеровского процесса.

Пусть $\varphi(s, \omega, u) = \varphi(s, u)$ — случайная функция, неотрицательная, ограниченная на множестве $[0, 1] \times \Omega \times \mathbf{R}$, измеримая относительно σ -алгебры $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$, положим $\delta(t, u) = \int_0^t \varphi(s, u) \alpha(ds, u)$. Обозначим при каждом $u \in \mathbf{R}$ и $x \in [0, +\infty)$ через $t^*(x, u)$ момент первого попадания функции $\delta(t, u)$ на уровень x : $t^*(x, u) = \inf\{s \in [0, 1] : \delta(s, u) \geq x\}$, если $\delta(s, u) \geq x$, и $t^*(x, u) = \infty$ в противном случае, $t^*(\tau) = t^*(\delta(\tau, X(\tau)), X(\tau))$. Рассмотрим ограниченную, измеримую по всем переменным и суммируемую по переменной v функцию $b(v, u, x)$, $(v, u, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times [0, +\infty)$,

* Уфимский государственный авиационный технический университет, кафедра математики, ул. К. Маркса, 12, 450000 Уфа-Центр; e-mail: farsag@math.ugatu.ac.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00096.

$B(v, u, x) = \int_{-\infty}^v b(y, u, x) dy$. Положим $y(t, u) = \int_0^t I(X(s) > u) dX(s)$, отметим, что функция $y(t, u)$ может быть найдена непосредственно из формулы Танака

$$(X(t) - u)^+ - (-u)^+ = y(t, u) + \frac{1}{2} \alpha(t, u), \quad (2)$$

где $(a)^+ = \max(a, 0)$; обозначим $k(t, u) = I(\alpha(t, u) > 0) y(t, u) / \alpha(t, u)$.

Теорема 1. С вероятностью 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^s B(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau dX(s) \\ &= \int_0^t \int_0^s b(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau k(t, X(s)) ds \\ & - \int_0^t \int_s^t b(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) k(\tau, X(s)) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau ds. \end{aligned} \quad (3)$$

З а м е ч а н и е. Частный случай формулы (3) имеет вид

$$\int_0^t B(X(s)) dX(s) = \int_0^t b(X(s)) k(t, X(s)) ds = \int_{m(t)}^{M(t)} b(u) y(t, u) du, \quad (4)$$

где $b(u)$, $u \in \mathbb{R}$, — суммируемая функция, $B(v) = \int_{-\infty}^v b(u) du$.

Пусть случайный процесс $Y(s)$, $s \in [0, 1]$, имеет стохастический дифференциал $dY(s) = a(s) ds + \sigma(s) dX(s)$, где случайные ограниченные функции $a(s)$ и $\sigma(s)$ удовлетворяют необходимым в формуле Ито предположениям. Рассмотрим детерминированную непрерывную функцию $F(t, y, u, x)$, $t \in [0, 1]$, $y, u, x \in \mathbb{R}$, имеющую непрерывные частные производные F'_t , F'_y и F''_{yy} .

Теорема 2. (а) В предположениях, приведенных выше, справедлива обобщенная формула Ито

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\{ F(t, Y(t), X(s), \delta(s, X(s))) \right. \\ & \quad \left. - F(t^*(s), Y(t^*(s)), X(s), \delta(s, X(s))) \right\} \varphi(s, X(s)) ds \\ &= \int_0^t \int_0^s f(s, Y(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau dX(s) \\ & \quad + \int_0^t \int_0^s g(s, Y(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau ds \quad \text{н.н.}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f(s, Y(s), u, x) &= F'_y(s, Y(s), u, x) \sigma(s), \\ g(s, Y(s), u, x) &= F'_t(s, Y(s), u, x) + F'_y(s, Y(s), u, x) a(s) + \frac{1}{2} F''_{yy}(s, Y(s), u, x) \sigma^2(s). \end{aligned}$$

(б) Пусть $\delta_1(t, u)$ — произвольная неубывающая по t при всех u ограниченная $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримая функция такая, что $\delta_1(t, u) = 0$ при $u \notin [m(t), M(t)]$, $t \in [0, 1]$.

Тогда справедлива обобщенная формула Ито

$$\begin{aligned} & \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\delta_1(t, u)} \left\{ F(t, Y(t), u, x) - F(t_1^*(x, u), Y(t_1^*(x, u)), u, x) \right\} dx du \\ &= \int_0^t \int_{m(s)}^{M(s)} \int_0^{\delta_1(s, u)} f(s, X(s), u, x) dx du dX(s) \\ & \quad + \int_0^t \int_{m(s)}^{M(s)} \int_0^{\delta_1(s, u)} g(s, X(s), u, x) dx du ds \quad \text{н.н.}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $t_1^*(x, u) = \inf\{s \in [0, 1]: \delta_1(s, u) \geq x\}$, если $\delta_1(t, u) \geq x$, и $t_1^*(x, u) = \infty$ в противном случае.

З а м е ч а н и е. Дальнейшее обобщение формул (3), (5) и (6) возможно с помощью предельных переходов под знаком интеграла в этих формулах, однако автору неясно, каков максимальный класс получаемых при этом предсказуемых подынтегральных предельных функций. Кроме того, сделанные выше предположения об ограниченности случайных функций $b(v, u, x)$, $a(s)$, $\sigma(s)$, $\varphi(s, u)$ могут быть ослаблены.

Теорема 3. Монотонные перестановки

$$X^*(s) = \inf \left\{ u \in [m(1), M(1)] : G(1, u) < s \right\},$$

где $G(t, u) = \int_0^t I(X(s) < u) ds$, почти всех траекторий винеровского процесса $X(s)$ являются абсолютно непрерывными функциями.

2. Доказательства. Доказательство теоремы 1. В дальнейшем переменная $t \in (0, 1]$, если не оговорено противное, фиксирована. Пусть $b(u)$, $u \in \mathbf{R}$, — детерминированная суммируемая функция такая, что $b(u) \neq 0$ при п.в. $u \in [m(t), M(t)]$. Умножая обе части равенства (2) на функцию $b(u)$ и интегрируя полученное равенство по $u \in \mathbf{R}$, в силу формулы (1) и формулы Ито получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} y(t, u) b(u) du &= \int_{\mathbf{R}} b(u) \left[(X(t) - u)^+ - (-u)^+ - \frac{1}{2} \alpha(t, u) \right] du \\ &= \int_{\mathbf{R}} b(u) \int_{-u}^{X(t)-u} I(v > 0) dv du - \frac{1}{2} \int_0^t b(X(s)) ds \\ &= \int_0^t B(X(s)) dX(s), \end{aligned} \quad (7)$$

где $B(u) = \int_{\mathbf{R}} I(v < u) b(v) dv$.

Проверим, что с вероятностью 1 выполнено условие:

$$\alpha(t, u) > 0 \quad \text{при п.в. } u \in [m(t), M(t)]. \quad (8)$$

Действительно, поскольку $\alpha(t, u) = 0$ при $u \notin [m(t), M(t)]$, то

$$M(t) - m(t) - \int_{\mathbf{R}} I(\alpha(t, u) > 0) du \geq 0. \quad (9)$$

Следовательно, для доказательства условия (8) достаточно проверить, что неравенство (9) на самом деле есть равенство. Поскольку распределения случайных величин $\alpha(t, u)$, $M(t)$ и $m(t)$ хорошо известны, то прямым вычислением убеждаемся, что математическое ожидание левой части неравенства (9) равно нулю, что доказывает условие (8).

Так как, в силу условия (8), левая часть тождества (7) равна

$$\int_{m(t)}^{M(t)} b(u) k(t, u) \alpha(t, u) du,$$

то, ввиду формулы (1), из тождества (3) получим представление интеграла Ито в виде интеграла Лебега (4). Для обобщения формулы (4) воспользуемся методом локальных времен, впервые примененным в работах [3]–[5]. Пусть переменные x и u фиксированы. Умножим обе части равенства (4) на $I(\delta(t, u) < x)$; тогда, в силу монотонности функции $\delta(s, u)$ по переменной s , получим

$$\begin{aligned} I(\delta(t, u) < x) \int_0^t B(X(s)) dX(s) \\ &= I(\delta(t, u) < x) \int_0^t B(X(s)) I(\delta(s, u) < x) dX(s) \\ &= I(\delta(t, u) < x) \int_0^t b(X(s)) k(t, X(s)) I(\delta(s, u) < x) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим теперь в равенстве (4) величину t равной марковскому моменту $t^*(x, u)$ и умножим обе части этого равенства на $I(\delta(t, u) \geq x)$. В силу свойств стохастических интегралов имеем:

$$\begin{aligned} I(\delta(t, u) \geq x) \int_0^t B(X(s)) I(\delta(s, u) < x) dX(s) \\ = I(\delta(t, u) \geq x) \int_0^t b(X(s)) k(t^*(x, u), X(s)) I(\delta(s, u) < x) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Сложив соотношения (10) и (11), получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t B(X(s)) I(\delta(s, u) < x) dX(s) = I(\delta(t, u) < x) \int_0^t b(X(s)) k(t, X(s)) I(\delta(s, u) < x) ds \\ + I(\delta(t, u) \geq x) \int_0^t b(X(s)) k(t^*(x, u), X(s)) I(\delta(s, u) < x) ds. \end{aligned}$$

Ввиду тождества (4) из последнего равенства выводим

$$\begin{aligned} \int_0^t B(X(s)) I(\delta(s, u) \geq x) dX(s) = I(\delta(t, u) \geq x) \int_0^t b(X(s)) k(t, X(s)) ds \\ - I(\delta(t, u) \geq x) \int_0^t b(X(s)) k(t^*(x, u), X(s)) I(\delta(s, u) < x) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Выделим тот факт, что стохастический интеграл в левой части равенства (12) по самому построению как функция переменных $(s, \omega, u, x) \in [0, 1] \times \Omega \times \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ измерим относительно σ -алгебры $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbf{R} \times [0, \infty))$. Заменяем в равенстве (12) функцию $b(v)$ на функцию $b(v, u, x)$ и проинтегрируем данное равенство по $(u, x) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty)$. Ввиду «стохастической теоремы Фубини» (см. [1, с. 123–126]) и формулы (1) левая часть полученного равенства, в силу непрерывности по переменной t локального времени $\alpha(t, u)$ и того факта, что $\alpha(s, u) = 0$ при $u \notin [m(s), M(s)]$, преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{m(s)}^{M(s)} \int_0^\infty B(X(s), u, x) I(\delta(s, u) \geq x) dx du dX(s) \\ = \int_0^t \int_{m(s)}^{M(s)} \int_0^{\delta(s, u)} B(X(s), u, x) dx du dX(s) \\ = \int_0^t \int_0^s B(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau dX(s). \end{aligned}$$

Правую часть полученного равенства преобразуем с помощью приведенных ниже формул:

$$\begin{aligned} \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\delta(t, u)} b(X(s), u, x) dx du \\ = \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t b(X(s), u, \delta(\tau, u)) \varphi(\tau, u) \alpha(d\tau, u) du \\ = \int_0^t b(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau; \\ \int_{m(t)}^{M(t)} \int_{\delta(s, u)}^{\delta(t, u)} b(X(s), u, x) k(t^*(x, u), X(s)) dx du \\ = \int_s^t b(X(s), X(\tau), \delta(\tau, X(\tau))) k(\tau, X(s)) \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

поскольку $t^*(\delta(\tau, X(\tau)), X(\tau)) = \tau$.

Воспользовавшись последними преобразованиями, получим утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим детерминированную непрерывную функцию $F = F(t, y, u, x)$, $t \in [0, 1]$, $y, u, x \in \mathbf{R}$, имеющую непрерывные частные производные F'_t , F'_y и F''_{yy} . Тогда при любых фиксированных u, x имеет место формула Ито:

$$\begin{aligned}\Delta F(t, u, x) &= F(t, Y(t), u, x) - F(0, Y(0), u, x) \\ &= \int_0^t f(s, Y(s), u, x) dX(s) + \int_0^t g(s, Y(s), u, x) ds.\end{aligned}\quad (13)$$

Положим

$$\begin{aligned}\Phi(t, u, x) &= \int_0^t f(s, Y(s), u, x) I(\delta(s, u) < x) dX(s) \\ &\quad + \int_0^t g(s, Y(s), u, x) I(\delta(s, u) < x) ds.\end{aligned}$$

Зафиксируем в равенстве (13) переменную t и умножим обе части этого равенства на $I(\delta(t, u) < x)$; в силу рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 1, получим

$$\Delta F(t, u, x) I(\delta(t, u) < x) = \Phi(t, u, x) I(\delta(t, u) < x). \quad (14)$$

Положив в равенстве (13) $t = t^*(x, u)$ и умножив обе части данного равенства на $I(\delta(t, u) \geq x)$, имеем:

$$\Delta F(t^*(x, u), u, x) I(\delta(t, u) \geq x) = \Phi(t, u, x) I(\delta(t, u) \geq x). \quad (15)$$

Сложим равенства (14) и (15):

$$\Delta F(t, u, x) I(\delta(t, u) < x) + \Delta F(t^*(x, u), u, x) I(\delta(t, u) \geq x) = \Phi(t, u, x).$$

В силу формулы Ито (13) из последнего равенства получим

$$\begin{aligned}&\left\{ F(t, Y(t), u, x) - F(t^*(x, u), Y(t^*(x, u)), u, x) \right\} I(\delta(t, u) \geq x) \\ &= \int_0^t f(s, Y(s), u, x) I(\delta(s, u) \geq x) dX(s) + \int_0^t g(s, Y(s), u, x) I(\delta(s, u) \geq x) ds.\end{aligned}$$

Так как стохастический интеграл в правой части равенства, как функция переменных (t, ω, u, x) , измерим относительно σ -алгебры $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, то, интегрируя последнее равенство по $(u, x) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty)$, ввиду «стохастической» теоремы Фубини [1, с. 123] получим формулу (6) с функциями $\delta_1(s, u)$ и $t_1^*(x, u)$, замененными на $\delta(s, u)$ и $t^*(x, u)$ соответственно. Воспользовавшись формулой (1) и тем фактом, что $\delta(s, u)$ — неубывающая непрерывная по s функция, завершим доказательство формулы (5). Доказательство формулы (6) проводится аналогично.

Доказательство теоремы 3. Так как, в силу непрерывности с вероятностью 1 процесса $X(s)$, при п.в. ω функция $G(1, u)$ строго возрастает по $u \in [m(1), M(1)]$, то, ввиду [5, с. 256, упр. 13], доказанное выше соотношение (8) равносильно следующему: монотонные перестановки $X^*(s) = \inf\{u \in [m(1), M(1)]: G(1, u) < s\}$, $s \in [0, 1]$, почти всех траекторий процесса $X(s)$ есть абсолютно непрерывные функции. Следовательно, справедливо утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
2. Geman D., Horowitz J. Occupation densities. — Ann. Probab., 1980, v. 8, p. 1–67.
3. Насыров Ф. С. Q-интегралы, локальные времена и стохастическое интегрирование. Препринт. Уфа: УНЦ РАН, 1994. 41 с.

4. Насыров Ф. С. Обобщенное исчисление Ито и задача отражения. — Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам (Туапсе, 17–24 сент. 1996 г.): Тез. докл. М.: ТВП, 1996, с. 121–122.
5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

Поступила в редакцию
17.XII.1996

Исправленный вариант
15.VII.1998

© 1999 г.

РОГОЗИН Б. А.*

О ПОСТОЯННОЙ В ОПРЕДЕЛЕНИИ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

Доказывается, что постоянная в определении субэкспоненциальных распределений равна 2.

Ключевые слова и фразы: субэкспоненциальное распределение.

Субэкспоненциальные распределения появились в работе [1]. В работе [2] были введены связанные с этим классом распределения класса $\mathcal{S}(\gamma)$. Распределение G принадлежит $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, если при некоторой постоянной c и любом $y \geq 0$

a) $G([0, \infty)) = 1$, $\tau(x) = G([x, \infty)) > 0$ при $x > 0$,

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} G * G([x, \infty)) / \tau(x) = c$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tau(x + y) / \tau(x) = e^{-\gamma y}$,

где для конечных комплекснозначных мер ν и μ на прямой $\nu * \mu$ — их свертка.

В работе [2] утверждалось, что

$$c = 2 \int_0^\infty e^{\gamma x} G(dx), \quad (1)$$

и потому класс $\mathcal{S}(0)$ совпадает с классом субэкспоненциальных распределений. Замечания к утверждению относительно соотношения (1) в [2] и его доказательству в [3] содержатся в работе [4]. Используя банаховоалгебраические методы работы [3], удается подтвердить выполнение равенства (1) в случае распределений из $\mathcal{S}(\gamma)$ при $\gamma > 0$ (см. [4]). Цель настоящей заметки — получить соотношение (1) и для распределений из $\mathcal{S}(0)$.

Теорема. Для $G \in \mathcal{S}(0)$ справедливо равенство $c = 2$.

В доказательстве этого утверждения используются некоторые результаты из работ [4] и [5], приведем их.

Распределение G принадлежит $\tilde{\mathcal{S}}(0)$ — классу слабо субэкспоненциальных распределений, если выполнено условие а),

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{G * G([x, \infty))}{\tau(x)} < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(x)}{x} = 0.$$

Обозначим через $P(\tau)$ совокупность комплекснозначных конечных мер ν на $[0, \infty)$, для которых $Q(\nu) = \sup_{x \geq 0} |\nu|([x, \infty)) / \tau(x) < \infty$, где $|\nu|$ — вариация меры ν . Из предложения 1 [5] вытекает

* Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: rogozin@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 96-01-00091, 99-01-01130.