Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Рогозин, О постоянной в определении субэкспоненциальных распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 455–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:27:07

4. Насыров Ф. С. Обобщенное исчисление Ито и задача отражения. — Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам (Туапсе, 17–24 сент. 1996 г.): Тез. докл. М.: ТВП, 1996, с. 121–122.
5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

Поступила в редакцию
17.XII.1996

Исправленный вариант
15.VII.1998

© 1999 г.

РОГОЗИН Б. А.*

О ПОСТОЯННОЙ В ОПРЕДЕЛЕНИИ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

Доказывается, что постоянная в определении субэкспоненциальных распределений равна 2.

Ключевые слова и фразы: субэкспоненциальное распределение.

Субэкспоненциальные распределения появились в работе [1]. В работе [2] были введены связанные с этим классом распределения класса $\mathcal{S}(\gamma)$. Распределение G принадлежит $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, если при некоторой постоянной c и любом $y \geq 0$

- a) $G([0, \infty)) = 1$, $\tau(x) = G([x, \infty)) > 0$ при $x > 0$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} G * G([x, \infty)) / \tau(x) = c$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tau(x + y) / \tau(x) = e^{-\gamma y}$,

где для конечных комплекснозначных мер ν и μ на прямой $\nu * \mu$ — их свертка.

В работе [2] утверждалось, что

$$c = 2 \int_0^\infty e^{\gamma x} G(dx), \quad (1)$$

и потому класс $\mathcal{S}(0)$ совпадает с классом субэкспоненциальных распределений. Замечания к утверждению относительно соотношения (1) в [2] и его доказательству в [3] содержатся в работе [4]. Используя банаховоалгебраические методы работы [3], удается подтвердить выполнение равенства (1) в случае распределений из $\mathcal{S}(\gamma)$ при $\gamma > 0$ (см. [4]). Цель настоящей заметки — получить соотношение (1) и для распределений из $\mathcal{S}(0)$.

Теорема. Для $G \in \mathcal{S}(0)$ справедливо равенство $c = 2$.

В доказательстве этого утверждения используются некоторые результаты из работ [4] и [5], приведем их.

Распределение G принадлежит $\tilde{\mathcal{S}}(0)$ — классу слабо субэкспоненциальных распределений, если выполнено условие а),

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{G * G([x, \infty))}{\tau(x)} < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(x)}{x} = 0.$$

Обозначим через $P(\tau)$ совокупность комплекснозначных конечных мер ν на $[0, \infty)$, для которых $Q(\nu) = \sup_{x \geq 0} |\nu|([x, \infty)) / \tau(x) < \infty$, где $|\nu|$ — вариация меры ν . Из предложения 1 [5] вытекает

* Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: rogozin@iitam.omsk.net.ru

⁰⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 96-01-00091, 99-01-01130.

Лемма 1. Если $G \in \tilde{\mathcal{S}}(0)$, то $P(\tau)$ — комплексная коммутативная банахова алгебра относительно нормы, эквивалентной Q .

При этом отметим, что операции сложения и умножения на постоянную в $P(\tau)$ — это обычные операции сложения мер и умножения мер на постоянную, а операция умножения в $P(\tau)$ — это свертка мер.

Если $G \in \mathcal{S}(0)$, то, очевидно, $G \in \tilde{\mathcal{S}}(0)$. В соответствующей банаховой алгебре $P(\tau)$ выделим совокупность $Pl(\tau)$ мер ν , для которых предел $l(\nu) = \lim_{x \rightarrow \infty} \nu([x, \infty))/\tau(x)$ существует. Этот функционал конечен на $Pl(\tau)$.

Лемма 2. Если $G \in \mathcal{S}(0)$, то $Pl(\tau)$ — банахова подалгебра $P(\tau)$, и для ν и μ из $Pl(\tau)$

$$l(\nu * \mu) = l(\nu)\mu([0, \infty)) + l(\mu)\nu([0, \infty)) + (c - 2)l(\nu)l(\mu).$$

Обоснование этого утверждения содержится в [5] (см. [5, предложения 1, 2 и замечание 2]). Изменения, которые нужно внести в доказательство предложения 2 [5], связаны с тем, что в этом случае справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} G_n * G_n([x, \infty))/\tau(x) = c - 2$, где $G_n(A) = G(A \cap [n, \infty))$, $n \geq 0$.

Лемма 3. Если $G \in \mathcal{S}(0)$, $a = \int_0^\infty x G(dx) < \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \tau(x-y)\tau(y)dy \left(\int_x^\infty \tau(y)dy \right)^{-1} = c - 2.$$

Доказательство. Имеем

$$J = \int_x^\infty G * G([z, \infty)) dz = \int_x^\infty \int_0^z \tau(z-y)G(dy) dz + \int_x^\infty \tau(z) dz.$$

Если изменить порядок интегрирования в двойном интеграле, то $J = \int_0^x (\int_{x-y}^\infty \tau(z) dz) G(dy) + a\tau(x) + \int_x^\infty \tau(z) dz$. После интегрирования по частям в первом интеграле получим $J = \int_0^x \tau(x-y)\tau(y)dy + 2 \int_x^\infty \tau(z) dz$. Если использовать условие б), то при $x \rightarrow \infty$

$$J = c \int_x^\infty \tau(z) dz + o\left(\int_x^\infty \tau(z) dz\right).$$

Откуда и получаем утверждение леммы.

Наиболее существенными для доказательства теоремы являются следующие два утверждения, вытекающие из результатов работы [6].

Лемма 4. Если $f_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$, $\sum_{n=0}^\infty f_n < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}/f_n = 1$, то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f_{n-k}f_k}{f_n} = 2 \sum_{n=0}^\infty f_n. \quad (2)$$

Утверждение леммы 4 является следствием теорем 3 и 4 [6]. Из теоремы 2* [6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Если для распределения G на $[0, \infty)$ при некотором целом $p > 0$ $\int_0^\infty t^p G(dt) = \infty$, то

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{G * G([x, \infty))}{G([x, \infty))} = 2.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $G \in \mathcal{S}(0)$ и $\int_0^\infty x G(dx) = \infty$. Из леммы 5 и свойства б) определения $\mathcal{S}(\gamma)$ вытекает, что $c = 2$.

Пусть $G \in \mathcal{S}(0)$ и $\int_0^\infty x G(dx) < \infty$. Положим $f_n = G([n, \infty))$, $n = 0, \dots$. Для последовательности f_n , $n = 0, \dots$, выполнены условия леммы 4, и, следовательно, имеет место соотношение (2).

Наряду с распределением G рассмотрим распределение F , сосредоточенное на множестве $\{0, 1, \dots\}$, и при этом $F([n, \infty)) = G([n, \infty))$, $n = 0, \dots$. Сходимость в предельном соотношении условия с) имеет место равномерно по y , принадлежащему компакту (см. [7]), и потому $l(F) = 1$ и $F \in Pl(\tau)$. В силу леммы 2 $l(F * F) = c$, и, следовательно, $F \in \mathcal{S}(0)$ с той же постоянной c , что и G .

С помощью леммы 3 для распределения F , при $x = n = 1, \dots$, получим, что так как

$$\int_0^n F([n-y, \infty)) F([y, \infty)) dy = \sum_{k=0}^{n+1} f_{n+1-k} f_k - 2f_{n+1} f_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k}{f_{n+1}} = \infty, \quad (3)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n+1} f_{n+1-k} f_k \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right)^{-1} = c - 2.$$

Поэтому, если предположить, что $c \neq 2$, то немедленно с учетом (3) приходим в противоречие с соотношением (2), имеющим место, как уже отмечалось ранее, для последовательности f_n , $n = 0, \dots$. Следовательно, и в этом случае $c = 2$.

Стандартные рассуждения, связанные с переходом к $G_0 \in \mathcal{S}(0)$, $G_0([0, x)) \doteq \int_{[0, x)} e^{\gamma y} G(dy) (\int_0^{\infty} e^{\gamma y} G(dy))^{-1}$ при $G \in \mathcal{S}(\gamma)$ (см., например, начало доказательства теоремы 2.9 [8]), приводят к новому доказательству (1) при $\gamma > 0$.

Следствие. Если $G \in \mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$, то имеет место соотношение (1).

З а м е ч а н и е 1. В работах [9] и [10] содержатся утверждения относительно выполнения соотношения (1), но, как уже отмечалось в [11] и [12], доказательство в [10] содержит пробелы и неверные утверждения.

З а м е ч а н и е 2. В работе [8] содержится еще одно доказательство соотношения (1). Но автор встретился с утверждением на с. 356 в доказательстве теоремы 2.9, что $\bar{H}_\mu = o(\bar{H}_\mu * \bar{H}_\mu)$ при $\lambda_0 < \mu < 1/m$. Это утверждение, так как какие-либо пояснения относительно него в [8] отсутствуют, после безуспешных попыток нам не удалось обосновать.

Таким образом, настоящая заметка — это четвертая известная автору попытка доказать соотношение (1). Считаю необходимым отметить, что появление этой заметки было бы невозможно без нашей совместной работы с М. С. Сгибневым над публикациями [4] и [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чистяков В. П. Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 4, с. 710–718.
2. Chover J., Ney P., Wainger S. Degeneracy properties of subcritical branching processes. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 663–673.
3. Chover J., Ney P., Wainger S. Functions of probability measures. — J. Anal. Math., 1973, v. 26, p. 255–302.
4. Rogozin B. A., Sgibnev M. S. Strong subexponential distributions. — Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics: Proc. Intern. Conf. St. Petersburg, June 1998. St. Petersburg, 1998, p. 229–233.
5. Rogozin B. A., Сгибнев М. С. Банаховы алгебры мер на прямой с заданной асимптотикой «хвостов». Препринт. Новосибирск: Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, 1998. 17 с.
6. Rudin W. Limits of ratios of tails of measures. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 982–994.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 141 с.
8. Cline D. B. H. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails. — J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 1987, v. 43, p. 347–365.
9. Teugels J. L. The subexponential class of probability distributions. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 4, с. 854–855.
10. Teugels J. L. The class of subexponential distributions. — Ann. Probab., 1975, v. 3, p. 1000–1011.

11. Embrechts P., Goldie C.M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, S. 335–347.
12. Embrechts P., Goldie C.M. On convolution tails. — Stochastic Process. Appl., 1982, v. 13, p. 263–278.

Поступила в редакцию
22.IX.1998

© 1999 г.

СМОРОДИНА Н. В.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ СТРОГО УСТОЙЧИВОГО СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА. II¹⁾

Пусть u — строго устойчивый негауссовский вектор с показателем устойчивости $\alpha \geq 1$, принимающий значения в сепарабельном банаховом пространстве B . Пусть $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкий однородный функционал, и пусть F — функция распределения случайной величины $h(u)$. Для функции $1 - F(x)$ получено асимптотическое разложение вида $\sum_{k=1}^n c_k x^{-k\alpha} + O(x^{-(n+1)\alpha})$, $x \rightarrow \infty$, (n определяется гладкостью h). Для доказательства этого разложения использован новый подход, основанный на разложении распределения в сумму линейных функционалов.

Ключевые слова и фразы: строго устойчивое распределение, спектральная мера, пространство конфигураций, пуассоновская случайная мера, линейный функционал на банаховом пространстве, стохастический интеграл.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, u — строго устойчивый случайный вектор со значениями в B , $h: B \rightarrow [0, \infty)$ — гладкий однородный функционал. В работе автора [1] в случае, когда показатель устойчивости α вектора u меньше единицы, для функции распределения (и ее производных) случайной величины $h(u)$ было получено асимптотическое разложение вида ($l \geq 0$, $x \rightarrow \infty$)

$$\frac{d}{dx^l} P(h(u) > x) = \sum_{k=1}^n \frac{c_{k,l}}{k!} x^{-k\alpha-l} + O(x^{-(n+1)\alpha-l}) \quad (0)$$

(число n определяется степенью гладкости функционала h).

Для получения этого разложения в [1] был использован подход, связанный, с одной стороны, с известным представлением устойчивого случайного вектора в виде стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере, а с другой стороны, с разложением распределения (в пространстве реализаций) этой случайной меры в сумму линейных функционалов, каждый из которых хорошо приспособлен для выделения отдельных слагаемых асимптотики. Данное разложение распределения случайной меры является «пуассоновским» аналогом разложения винеровских функционалов в сумму кратных стохастических интегралов. Предположения о характере поведения интенсивности пуассоновской случайной меры, которые были использованы в [1] при получении этого разложения, оказались довольно ограничительными, в частности, позволили рассмотреть только устойчивые векторы с показателем устойчивости $\alpha < 1$.

*С.-Петербургский государственный университет; e-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-15-96870.