Общероссийский математический портал

А. С. Черный, А. Н. Ширяев, Некоторые свойства броуновского движения со сносом и обобщение одной теоремы П. Леви, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 466–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:48:52

© 1999 г.

ЧЕРНЫЙ А. С.* , ШИРЯЕВ А. Н.**

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ И ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ П. ЛЕВИ

Теорема П. Леви утверждает, что для броуновского движения B имеет место равенство по распределению $(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B))$, где $L(B)$ — локальное время B в нуле. В работе доказывается обобщение теоремы Леви для броуновского движения со (случайным) сносом и для условно-гауссовских мартингалов. Также дается простое доказательство результата работы [10] о том, что $2 \sup B^\lambda - B^\lambda \stackrel{\text{law}}{=} |B^\lambda| + L(B^\lambda)$, где B^λ — броуновское движение со сносом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова и фразы: теорема П. Леви, локальное время, броуновское движение со сносом, условно-гауссовские мартингалы, лемма Скорохода.

1. Об одном свойстве инвариантности для броуновского движения

1. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение и $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ — броуновское движение со сносом ($B_t^\lambda = \lambda t + B_t$), где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Классический результат П. Леви (см. [3], [9, гл. VI, § 2, (2.3)]) утверждает, что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)), \quad (1)$$

т.е. что процессы $(\sup_{s \leq t} B_s - B_t, \sup_{s \leq t} B_s; t \geq 0)$ и $(|B_t|, L_t(B); t \geq 0)$ совпадают по распределению. Здесь $L(B) = (L_t(B))_{t \geq 0}$ — локальное время броуновского движения в нуле:

$$L_t(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds \quad \text{п.н.}$$

Из (1) вытекает, что

$$2 \sup B - B \stackrel{\text{law}}{=} |B| + L(B). \quad (2)$$

В [10] это «одномерное» свойство было обобщено для случая броуновского движения со сносом:

$$2 \sup B^\lambda - B^\lambda \stackrel{\text{law}}{=} |B^\lambda| + L(B^\lambda). \quad (3)$$

Непосредственное обобщение «двумерного» результата П. Леви (1) было получено в работе [1], согласно которой

$$(\sup B^\lambda - B^\lambda, \sup B^\lambda) \stackrel{\text{law}}{=} (|X^\lambda|, L(X^\lambda)), \quad (4)$$

где $X^\lambda = (X_t^\lambda)_{t \geq 0}$ — (сильное) решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t^\lambda = -\lambda \operatorname{sign} X_t^\lambda dt + dB_t, \quad X_0^\lambda = 0, \quad (5)$$

и $L(X^\lambda) = (L_t(X^\lambda))_{t \geq 0}$ — локальное время в нуле процесса X^λ .

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: shiryayev@mi.ras.ru

Из (4) вытекает, что

$$2 \sup B^\lambda - B^\lambda \stackrel{\text{law}}{=} |X^\lambda| + L(X^\lambda). \quad (6)$$

Сопоставляя (3) и (6), видим, что имеет место

Теорема 1. Для любого $\lambda \in \mathbf{R}$

$$|B^\lambda| + L(B^\lambda) \stackrel{\text{law}}{=} |X^\lambda| + L(X^\lambda). \quad (7)$$

Ввиду определенного интереса этого свойства инвариантности по распределению формы $|x| + L(x)$, $x \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, при замене $x = B^\lambda$ на $x = X^\lambda$, представляется целесообразным дать его прямое доказательство. Заметим, что (6) + (7) $\Rightarrow$ (3) и (3) + (7) $\Rightarrow$ (6).

Доказательство теоремы 1. Из теоремы П. Леви (1) вытекает, что для всякого $\lambda \in \mathbf{R}$ и $t \geq 0$

$$\mathbf{E} e^{\lambda B_t} = \mathbf{E} e^{\lambda(L_t(B) - |B_t|)}. \quad (8)$$

Ключевым моментом в доказательстве свойства (7) является следующая «условная» версия равенства (8): для всякого $t \geq 0$

$$\mathbf{E} \left[e^{\lambda B_t} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] = \mathbf{E} \left[e^{\lambda(L_t(B) - |B_t|)} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] \quad \text{п.н.}, \quad (9)$$

где $R(B) = (R_t(B))_{t \geq 0}$, $R_t(B) = |B_t| + L_t(B)$ и $\mathcal{F}_t^{R(B)} = \sigma(R_s(B); s \leq t)$; при этом

$$\mathbf{E} \left[e^{\lambda B_t} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] = \frac{\text{sh } \lambda R_t(B)}{\lambda R_t(B)}. \quad (10)$$

Для доказательства (9) и (10) заметим прежде всего, что из соображений симметрии вытекает равенство

$$\mathbf{E} \left[e^{\lambda B_t} \middle| \mathcal{F}_t^{|B|} \right] = \frac{1}{2} \left(e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} \right) \quad \left(= \text{ch } \lambda |B_t| \right),$$

где $\mathcal{F}_t^{|B|} = \sigma(|B_s|; s \leq t)$. Поскольку $\mathcal{F}_t^{R(B)} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$, то

$$\mathbf{E} \left[e^{\lambda B_t} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left[e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right]. \quad (11)$$

Согласно результату работы [8] (см. также [9, гл. VI, § 3, (3.6)]), условное распределение $\text{law}(|B_t| \mid \mathcal{F}_t^{R(B)})$ является равномерным на $[0, R_t(B)]$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \left[e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] = \frac{1}{2\lambda R_t(B)} \left(e^{\lambda R_t(B)} - e^{-\lambda R_t(B)} \right),$$

что вместе с (11) доказывает формулу (10).

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[e^{\lambda(L_t(B) - |B_t|)} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] &= e^{\lambda R_t(B)} \mathbf{E} \left[e^{-2\lambda |B_t|} \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda R_t(B)} \left(e^{\lambda R_t(B)} - e^{-\lambda R_t(B)} \right) = \frac{\text{sh } \lambda R_t(B)}{\lambda R_t(B)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Сопоставляя (10) и (12), получаем требуемое равенство (9).

Перейдем непосредственно к доказательству свойства инвариантности (7). Пусть P_B , P_{B^λ} и P_{X^λ} — распределения вероятностей процессов B , B^λ и X^λ на каноническом пространстве $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \geq 0}$. Обозначим через $P_B | \mathcal{F}_t$, $P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t$ и $P_{X^\lambda} | \mathcal{F}_t$ сужения этих распределений на σ -алгебры $\mathcal{F}_t = \sigma(x_s; s \leq t)$, $t \geq 0$.

Хорошо известно (см., например, [4, гл. 7, § 2]), что соответствующие производные Радона–Никодима имеют вид

$$\frac{d(P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t)}{d(P_B | \mathcal{F}_t)}(B) = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}. \quad (13)$$

Учитывая формулу Танака $|B_t| = \int_0^t \text{sign } B_s dB_s + L_t(B)$ (см. [9, гл. VI, § 1]), получаем, что

$$\frac{d(P_{X^\lambda}|\mathcal{F}_t)}{d(P_B|\mathcal{F}_t)}(B) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^t \text{sign } B_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2} t \right\} = \exp \left\{ \lambda (L_t(B) - |B_t|) - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}. \quad (14)$$

Пусть теперь $P_{R(B)}$, $P_{R(B^\lambda)}$ и $P_{R(X^\lambda)}$ — образы мер P_B , P_{B^λ} и P_{X^λ} при отображении $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \ni x \mapsto R(x) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, где $R_t(x) = |x_t| + L_t(x)$. Положим $\mathcal{F}_t^R = \sigma(R_s(x); s \leq t)$. Нетрудно видеть, что $(P_B\text{-п.н.})$

$$\frac{d(P_{R(B^\lambda)}|\mathcal{F}_t^R)}{d(P_{R(B)}|\mathcal{F}_t^R)}(R(B)) = \mathbf{E} \left[\frac{d(P_{B^\lambda}|\mathcal{F}_t)}{d(P_B|\mathcal{F}_t)}(B) \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right] \quad (15)$$

и

$$\frac{d(P_{R(X^\lambda)}|\mathcal{F}_t^R)}{d(P_{R(B)}|\mathcal{F}_t^R)}(R(B)) = \mathbf{E} \left[\frac{d(P_{X^\lambda}|\mathcal{F}_t)}{d(P_B|\mathcal{F}_t)}(B) \middle| \mathcal{F}_t^{R(B)} \right]. \quad (16)$$

Из (13), (14) и (9) видим, что правые части в (15) и (16) совпадают $(P_B\text{-п.н.})$ и

$$\frac{d(P_{R(B^\lambda)}|\mathcal{F}_t^R)}{d(P_{R(B)}|\mathcal{F}_t^R)}(R(B)) = \frac{d(P_{R(X^\lambda)}|\mathcal{F}_t^R)}{d(P_{R(B)}|\mathcal{F}_t^R)}(R(B)) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \frac{\text{sh } \lambda R_t(B)}{\lambda R_t(B)}. \quad (17)$$

Следовательно, $P_{R(B^\lambda)} = P_{R(X^\lambda)}$, что и доказывает утверждение (7) теоремы 1.

2. З а м е ч а н и е 1. Из (17) следует, что $R(B^\lambda) \stackrel{\text{law}}{=} R(B^{-\lambda})$ и $R(X^\lambda) \stackrel{\text{law}}{=} R(X^{-\lambda})$.

З а м е ч а н и е 2. Согласно [8] (см. также [9, гл. VI, § 3, (3.5)]), процесс $2 \sup B - B$ совпадает по распределению с (диффузионным) процессом Бесселя $\text{Bes}(\nu)$, выходящим из нуля и имеющим размерность $\nu = 3$. Инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}_\nu$ процесса $\text{Bes}(\nu)$ определяется формулой

$$\mathcal{A}_\nu = \frac{\nu - 1}{2r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2}$$

и, следовательно, в случае $\nu = 3$ имеем

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2}.$$

Отсюда следует, что процесс $\text{Bes}(3)$ может быть реализован как (сильное) решение стохастического дифференциального уравнения

$$dr_t = \frac{1}{r_t} dt + d\beta_t, \quad r_0 = 0,$$

с броуновским движением $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$.

В силу (2) видим, что процесс $R(B) = |B| + L(B)$ также есть версия процесса Бесселя $\text{Bes}(3)$.

З а м е ч а н и е 3. В [10] было показано, что процесс $2 \sup B^\lambda - B^\lambda$ является диффузионным процессом с инфинитезимальным оператором

$$\mathcal{A}_3^\lambda = \lambda \text{cth } \lambda r \frac{d}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2}.$$

Из (3) и (6) следует, что каждый из процессов $|B^\lambda| + L(B^\lambda)$ и $|X^\lambda| + L(X^\lambda)$ является версией диффузионного процесса с инфинитезимальным оператором $\mathcal{A}_3^\lambda$.

З а м е ч а н и е 4. Согласно (15) и (17), процесс $(M_t, \mathcal{F}_t^{R(B)}, P_{R(B)})$ с

$$M_t = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \frac{\text{sh } \lambda R_t(B)}{\lambda R_t(B)}$$

является мартингалом. Более того, если $\tau_a = \inf\{t \geq 0: R_t(B) = a\}$, $a > 0$, то семейство случайных величин $\{M_{t \wedge \tau_a}, t \geq 0\}$ является равномерно интегрируемым и $P\{\tau_a < \infty\} = 1$. Следовательно, по *теореме Дуба об остановке*, $EM_{\tau_a} = 1$, что равносильно известному свойству

$$Ee^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a} = \frac{\lambda a}{\operatorname{sh} \lambda a}.$$

Для сравнения напомним, что если $\sigma_a = \inf\{t: |B_t| \geq a\}$, то $Ee^{-\lambda^2 \sigma_a / 2} = (\operatorname{ch} \lambda a)^{-1}$. Очевидно, что $\tau_a \leq \sigma_a$.

2. Некоторые обобщения теоремы П. Леви

1. Доказательство свойства (4), приведенное в [1], было основано на применении *теоремы Гирсанова* к процессам B^λ и X^λ , *формулы Танака* к $|B|$ и *теоремы П. Леви* (1) для процесса B . Оказывается, однако, что свойство (4) может быть выведено непосредственно из (приводимой далее) *леммы Скорохода*, на которой обычно и основывается доказательство теоремы П. Леви (см., например, [9, гл. VI, § 2, (2.1)]). Более того, данная лемма позволяет дать ряд новых обобщений свойства (1), приведенных ниже в теоремах 2 и 3.

Лемма 1 (А. В. Скороход; см. [11], [9, гл. VI, § 2, (2.1)]). Пусть $y = (y_t)_{t \geq 0}$ — непрерывная функция с $y_0 \geq 0$. Существует и притом единственная пара функций $(x, l) = (x_t, l_t)_{t \geq 0}$ такая, что

$$(a) \quad x = y + l;$$

$$(b) \quad x \geq 0;$$

(c) $l = (l_t)_{t \geq 0}$ является неубывающей непрерывной функцией, $l_0 = 0$ и носитель меры dl_t содержится в множестве $\{s \geq 0: x_s = 0\}$.

При этом функция l определяется формулой: $l_t = \sup_{s \leq t} (-y_s \vee 0)$.

2. В этом разделе мы приводим обобщение теоремы П. Леви для случая броуновского движения со случайным сносом.

Рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения

$$dB_t^{(a)} = a(t, B_t^{(a)}) dt + dB_t, \quad B_0^{(a)} = 0, \quad (18)$$

и

$$dX_t^{(a)} = -a(t, Y_t^{(a)}) \operatorname{sign} X_t^{(a)} dt + dB_t, \quad X_0^{(a)} = 0, \quad (19)$$

где $a = a(t, x)$ — ограниченный неупреждающий функционал, $x \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $t \geq 0$, и

$$Y_t^{(a)} = - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^{(a)} dX_s^{(a)}. \quad (20)$$

Заметим, что в случае постоянного сноса $a(t, x) \equiv \lambda$ решением уравнения (18) будет броуновское движение со сносом λ , а уравнение (19) переходит в уравнение (5).

Лемма 2. Для уравнения (18), а также для системы (19), (20) имеют место существование слабого решения и его слабая единственность.

Доказательство. Докажем сначала существование слабого решения системы (19), (20). Рассмотрим каноническое пространство $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$ непрерывных $\mathbf{R}^2$ -значных функций с каноническим процессом $(x, y) = (x_t, y_t)_{t \geq 0}$ и фильтрацией $\mathcal{F}_t = \sigma(x_s, y_s; s \leq t)$. Зададим на σ -алгебре $\mathcal{F}_\infty = \sigma(x_s, y_s; s \geq 0)$ вероятностную меру P , относительно которой $(x_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение, а y связано с x соотношением $y_t = -(P) \int_0^t \operatorname{sign} x_s dx_s$, где знак (P) означает, что стохастический интеграл строится относительно меры P .

Для каждого $t \geq 0$ определим меру P_t' на σ -алгебре $\mathcal{F}_t$ по формуле:

$$\frac{dP_t'}{dP_t}(x, y) = M_t = \exp \left\{ -(P) \int_0^t a(s, y) dx_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s, y) ds \right\}, \quad (21)$$

где $P_t = P|_{\mathcal{F}_t}$. Учитывая, что процесс $a(s, y)$ ограничен, и применяя *критерий Новикова* (см. [6], [4, гл. 6, § 2, теорема 6.1]), заключаем, что процесс M_t является

мартингалом (по мере P). Таким образом, $(P'_t; t \geq 0)$ — семейство вероятностных мер, согласованных в том смысле, что $P'_t|_{\mathcal{F}_s} = P'_s$ при $s \leq t$. Следовательно, существует вероятностная мера P' на σ -алгебре $\mathcal{F}_\infty$ такая, что $P'_t|_{\mathcal{F}_t} = P'_t$ для любого $t \geq 0$ (см. [12, с. 34]).

В силу того, что стохастический интеграл не изменяется при замене меры на (локально) эквивалентную (см. [5, Lemme III.2.]), имеем

$$y_t = -(P) \int_0^t \text{sign } x_s dx_s = -(P') \int_0^t \text{sign } x_s dx_s.$$

Отсюда и из теоремы Гирсанова (см. [2, гл. III, § 3b, (3.11)]) вытекает, что процесс $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ является решением системы (19), (20) на стохастическом базисе $(C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2), \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P')$.

Перейдем к доказательству слабой единственности для системы (19), (20). Пусть мера Q' на σ -алгебре $\mathcal{F}_\infty$ пространства $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$ отвечает некоторому слабому решению этой системы. Зададим меры Q_t на σ -алгебрах $\mathcal{F}_t$ ($t \geq 0$) по формуле:

$$\frac{dQ_t}{dQ'_t}(x, y) = \exp \left\{ (Q') \int_0^t a(s, y) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s, y) ds \right\}. \quad (22)$$

Так же, как и раньше, доказывается существование меры Q на $\mathcal{F}_\infty$ такой, что $Q|_{\mathcal{F}_t} = Q_t$. По теореме Гирсанова, процесс $(x_t)_{t \geq 0}$ является $(\mathcal{F}_t, Q)$ -броуновским движением. При этом

$$y_t = -(Q') \int_0^t \text{sign } x_s dx_s = -(Q) \int_0^t \text{sign } x_s dx_s.$$

Тем самым, $Q = P$. С учетом равенства

$$(Q') \int_0^t a(s, y) dx_s = (Q) \int_0^t a(s, y) dx_s = (P) \int_0^t a(s, y) dx_s,$$

из (21) и (22) вытекает, что

$$\frac{dP'_t}{dP_t} = \left(\frac{dQ_t}{dQ'_t} \right)^{-1} = \frac{dQ'_t}{dQ_t}, \quad t \geq 0.$$

Следовательно, $Q' = P'$, что и доказывает слабую единственность решения системы (19), (20).

Слабое существование и слабая единственность для уравнения (18) доказываются аналогично.

Теорема 2. Для процессов $B^{(a)}$ и $X^{(a)}$, являющихся решениями уравнений (18)–(20), справедливо следующее свойство:

$$\left(\sup B^{(a)} - B^{(a)}, \sup B^{(a)} \right) \stackrel{\text{law}}{=} \left(|X^{(a)}|, L(X^{(a)}) \right), \quad (23)$$

т.е. процессы

$$\left(\sup_{s \leq t} B_s^{(a)} - B_t^{(a)}, \sup_{s \leq t} B_s^{(a)}; t \geq 0 \right) \quad \text{и} \quad \left(|X_t^{(a)}|, L_t(X^{(a)}); t \geq 0 \right)$$

совпадают по распределению.

Доказательство. По формуле Танака,

$$|X_t^{(a)}| = \int_0^t \text{sign } X_s^{(a)} dX_s^{(a)} + L_t(X^{(a)}) = -Y_t^{(a)} + L_t(X^{(a)}).$$

Применение леммы 1 Скорохода показывает, что $L_t(X^{(a)}) = \sup_{s \leq t} Y_s^{(a)}$. Тем самым, $|X_t^{(a)}| = \sup_{s \leq t} Y_s^{(a)} - Y_t^{(a)}$ и, очевидно,

$$\left(\sup_{s \leq t} Y_s^{(a)} - Y_t^{(a)}, \sup_{s \leq t} Y_s^{(a)}; t \geq 0 \right) = \left(|X_t^{(a)}|, L_t(X^{(a)}); t \geq 0 \right). \quad (24)$$

Далее,

$$\begin{aligned} Y_t^{(a)} &= - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^{(a)} dX_s^{(a)} = \int_0^t a(s, Y^{(a)}) ds - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^{(a)} dB_s \\ &= \int_0^t a(s, Y^{(a)}) ds + \tilde{B}_t, \end{aligned} \quad (25)$$

где процесс $\tilde{B}_t = - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^{(a)} dB_s$ является, по *характеризационной теореме П. Леви* (см. [9, гл. IV, § 3, (3.6)]), стандартным броуновским движением. При этом $\tilde{B}$ является мартингалом по отношению к фильтрации $\mathcal{F}^{Y^{(a)}} = (\mathcal{F}_t^{Y^{(a)}})_{t \geq 0}$. Таким образом, $Y^{(a)}$ — решение уравнения (18). Поскольку решение этого уравнения слабо единственно, имеем $Y^{(a)} \stackrel{\text{law}}{=} B^{(a)}$. Итак, требуемое свойство (23) вытекает из (24).

3. Во всех предшествующих рассмотрениях «стохастическая неопределенность» моделировалась броуновским движением $B = (B_t)_{t \geq 0}$. В нижеследующей теореме роль «порождающего» процесса будет играть *условно-гауссовский* (относительно фильтрации $\mathcal{F}^{(M)} = (\mathcal{F}_t^{(M)})_{t \geq 0}$) мартингал $M = B_{(M)} = (B_{(M)_t})_{t \geq 0}$, у которого B и квадратичная характеристика $\langle M \rangle$ являются независимыми процессами (см. [2, гл. II, (6.2)], [7]). В [13] мартингалы такого вида называются *мартингалами Окона*.

Теорема 3. Пусть $M = B_{(M)}$ является условно-гауссовским мартингалом с независимыми процессами B и $\langle M \rangle$. Положим $M_t^\lambda = \lambda \langle M \rangle_t + M_t$ и обозначим через X^λ решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t^\lambda = -\lambda \operatorname{sign} X_t^\lambda d\langle M \rangle_t + dM_t, \quad X_0^\lambda = 0. \quad (26)$$

Тогда

$$\left(\sup M^\lambda - M^\lambda, \sup M^\lambda \right) \stackrel{\text{law}}{=} \left(|X^{(a)}|, L(X^{(a)}) \right). \quad (27)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что уравнение (26) заведомо имеет решение. В самом деле, пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — исходное броуновское движение и $Z^\lambda = (Z_t^\lambda)_{t \geq 0}$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$dZ_t^\lambda = -\lambda \operatorname{sign} Z_t^\lambda dt + dB_t, \quad Z_0^\lambda = 0.$$

Это уравнение (ср. с (5)) имеет и притом единственное сильное решение (см. [14]). По свойствам случайной замены времени ($t \mapsto \langle M \rangle_t$),

$$Z_{\langle M \rangle_t}^\lambda = -\lambda \int_0^{\langle M \rangle_t} \operatorname{sign} Z_s^\lambda ds + B_{\langle M \rangle_t} = -\lambda \int_0^t \operatorname{sign} Z_{\langle M \rangle_s}^\lambda d\langle M \rangle_s + M_t.$$

Тем самым, процесс $X_t^\lambda = Z_{\langle M \rangle_t}^\lambda$ является решением уравнения (26).

Пологая $Y_t^\lambda = - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dX_s^\lambda$ (ср. с (20)), так же, как и в (24), получаем

$$\left(\sup_{s \leq t} Y_s^\lambda - Y_t^\lambda, \sup_{s \leq t} Y_s^\lambda; t \geq 0 \right) = \left(|X_t^\lambda|, L_t(X^\lambda); t \geq 0 \right). \quad (28)$$

При этом, в соответствии с (26),

$$Y_t^\lambda = - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dX_s^\lambda = \lambda \langle M \rangle_t - \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dM_s.$$

Для мартингалов $M = B_{(M)}$ с независимыми B и $\langle M \rangle$ справедлив следующий результат ([7, теорема А, лемма (2.5)]): для любого предсказуемого процесса $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \geq 0}$, принимающего значения ± 1 , выполнено

$$\left(\langle M \rangle_t, \int_0^t \varepsilon_s dM_s; t \geq 0 \right) \stackrel{\text{law}}{=} \left(\langle M \rangle_t, M_t; t \geq 0 \right).$$

Следовательно, $Y^\lambda \stackrel{\text{law}}{=} M^\lambda$, что вместе с (28) доказывает требуемое утверждение (27).

Следствие. Если $M = B_{\langle M \rangle}$ является условно-гауссовским мартингалом с независимыми процессами B и $\langle M \rangle$, то

$$\left(\sup M - M, \sup M \right) \stackrel{\text{law}}{=} \left(|M|, L(M) \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graversen S. E., Shiryaev A. N.* An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. Research Report № 22. Aarhus: Centre for Mathematical Physics and Stochastics, Aarhus University, 1998. (To appear in Bernoulli.)
2. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
3. *Lévy P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris: Gauthier-Villars, 1948.
4. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
5. *Memin J.* Espaces de semi martingales et changement de probabilité. — Probab. Theory Relat. Fields, 1980, v. 52, p. 9–39.
6. *Новиков А. А.* Об одном тождестве для стохастических интегралов. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 4, с. 761–765.
7. *Ocone D. L.* A symmetry characterization of conditionally independent increment martingales. — Progr. Probab., 1993, v. 32, p. 147–167.
8. *Pitman J. W.* One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. — Adv. Appl. Probab., 1975, v. 7, p. 511–526.
9. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
10. *Rogers L. C. G., Pitman J. W.* Markov functions. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 4, p. 573–582.
11. *Скорород А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961. 216 с.
12. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional Diffusion Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 339 p.
13. *Yor M.* Some invariance properties (of the laws) of Ocone's martingales. Prépublication № 471. Paris: Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI, 1998.
14. *Звонкин А. К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, «уничтожающее» снос. — Матем. сб., 1974, т. 93, № 1, с. 129–149.

Поступила в редакцию
25.I.1999