Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Рецензия на книгу Vladimir M. Zolotarev
“Modern Theory of Summation of Random Variables”, *Теория
вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 2, 473–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:10:10

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Том 44

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Выпуск 2

1999

© 1999 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Vladimir M. Zolotarev. *Modern Theory of Summation of Random Variables*. Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, VSP, 1997, x+412 p.

Предлагаемая вниманию читателей монография В.М. Золотарева «Современная теория суммирования случайных величин» открывает новую серию издательства VSP, Нидерланды, под названием *Современные Вероятность и Статистика*. Монография представляет собой основательно переработанный и расширенный вариант монографии того же автора «Современная теория суммирования независимых случайных величин», М.: Наука, 1986. Изменения столь значительны, что с полным основанием можно говорить о новой монографии.

По мнению автора современная теория вероятностей зиждется на трех «китах»: на понятии независимости, которое по существу позволило выделить теорию вероятностей в самостоятельную математическую науку; на формуле полной вероятности; на законе больших чисел, открытым Я. Бернулли и представляющим собой связующее звено между теоретическим и практическим началами теории вероятностей. Закон больших чисел Бернулли положил начало одному из основных направлений — теории предельных теорем для сумм случайных величин. В монографии с оригинальной точки зрения дано описание современного состояния теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин, а также указываются пути возможного обобщения этой теории на суммы зависимых случайных величин.

Первая глава (*Введение в теорию вероятностных метрик*) содержит исчерпывающие сведения идейного и технического характера о вероятностных метриках. Излагаются основные идеи метрического подхода в теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Этот метод, созданный В.М. Золотаревым, ныне успешно применяется при решении многочисленных задач, связанных с суммами случайных величин, а также в теории случайных процессов. Объем приведенных сведений превосходит объем необходимых сведений для последующего изложения.

Вторая глава (*Природа предельных теорем*) содержит ретроспективный анализ теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин и векторов. На примере центральной предельной теоремы в формах теоремы Муавра–Лапласа, теоремы Чебышева, теоремы Ляпунова, теоремы Линдеберга–Феллера и ее обобщения, данное автором монографии, делается серьезная попытка ответить на чрезвычайно глубокий вопрос: в чем кроется и как проявляется механизм образования вероятностных закономерностей. В своей попытке дать ответ на поставленный вопрос автор вводит понятие «естественной» оценки скорости сходимости в предельных теоремах, а также рассматривает предельные теоремы как утверждения об устойчивости стохастических моделей. Эта точка зрения, пропагандируемая автором в течение многих лет, теперь становится доступной для широкой читающей аудитории. В этой главе впервые в монографической литературе подчеркивается специфическая роль «большой» размерности в теории предельных теорем для сумм независимых случайных векторов.

Третья глава (*Нормирование случайных последовательностей*) содержит обсуждение общей схемы суммирования, когда в качестве операции суммирования могут выступать операции, отличные от операции суммирования чисел. Например, под

«суммой» двух чисел мы можем понимать их максимум или рассматривать суммы случайных элементов со значениями в некоторой группе с групповой операцией в качестве операции суммирования. Общеизвестно, что предельные теоремы, как правило, формулируются для центрированных и нормированных сумм случайных величин. Автор начинает с очевидного, но, тем не менее, очень важного замечания, что нормирование и центрирование зависит от природы операции суммирования. Затем он разъясняет свою точку зрения на выбор нормирующих и центрирующих постоянных в тесной связи с упомянутым выше методом вероятностных метрик. В частности, рассматриваются центры Дуба, а также нормирующие и центрирующие постоянные, традиционно используемые в линейных моделях.

Четвертая глава (*Центры и разбросы*) содержит сведения о числовых характеристиках случайных величин, введенных автором монографии более двадцати лет назад. С тех пор эти характеристики использовались многими специалистами в своих исследованиях. Центры и разбросы случайных величин могут выполнять роли математического ожидания и дисперсии и имеют ряд предпочтительных свойств, в частности, они определены для любой случайной величины. Благодаря своим свойствам, эти характеристики способны привести определенные упрощения в традиционные доказательства предельных теорем, в частности, в доказательство общей центральной предельной теоремы. С их использованием удастся весьма просто переформулировать известные критерии слабой компактности семейств функций распределения.

Пятая глава (*Классическая теория предельных теорем для сумм независимых случайных величин*) содержит изложение основных идей и результатов асимптотической теории для нормированных и центрированных сумм независимых случайных величин при предположении, что выполнено так называемое условие «предельной малости» слагаемых. Впервые развернутая теория предельных теорем для таких сумм была изложена во всемирно известной монографии Б. Б. Гнеденко и А. Н. Колмогорова «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин». М.: Г.И.Т.Т.Л., 1949. С тех пор вышли десятки монографий, которые содержат полное или частичное изложение материала из этой выдающейся монографии. Трактовка материала, предложенная В. М. Золотаревым, является подлинно оригинальной. Здесь мы находим не только конкретные результаты, но также глубокое обсуждение природы этих утверждений. Использование метрического подхода и ряда методических усовершенствований придает дополнительное своеобразие изложению. В заключительном параграфе читатель найдет обсуждение проблемы границ применимости классической теории и постановки новых задач.

Шестая глава (*Обобщение классической теории суммирования независимых случайных величин*) содержит изложение новейших результатов из асимптотической теории сумм независимых случайных величин, когда условие «предельной малости» слагаемых не предполагается. Эта глава содержит, главным образом, результаты автора и его учеников. С единой точки зрения обсуждаются предельные теоремы для сумм и максимумов независимых случайных величин. При этом показывается, что получающиеся в результате теории естественным образом включают в себя результаты, ранее доказанные в рамках классической теории суммирования независимых случайных величин. Как и в предыдущих главах автор успешно демонстрирует силу метода вероятностных метрик как при доказательстве предельных теорем так и при их уточнении с построением оценок скорости сходимости в этих теоремах. Заключительный параграф посвящен возможному обобщению изложенной теории на суммы, определенным образом зависящих случайных величин.

Монография завершается списком литературы, где заинтересованный читатель найдет дополнительную информацию по затронутым темам.

Автор монографии — выдающийся ученый Владимир Михайлович Золотарев не нуждается в специальном представлении. Он хорошо известен мировой научной общественности своими многочисленными глубокими и оригинальными исследова-

ями. Предлагаемая книга дает представление о его творчестве и отражает его взгляд на современное состояние асимптотической теории для сумм независимых случайных величин. Заинтересованный читатель найдет в ней много интересных тем для собственных исследований. Перевод на русский язык этой оригинальной и полезной книги представляется весьма желательным.

В. М. Круглов

G. George Yin, Qing Zhang. *Continuous-Time Markov Chains and Application: A Singular Perturbations Approach*. Applications of Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997, xi+349 p.

С первого взгляда название рецензируемой книги наводит на мысль, что перед нами еще один более или менее стандартный курс по теории цепей Маркова. Но скромное пояснение: метод сингулярных возмущений быстро развеивает эти иллюзии. Перед нами глубокое и, что не совсем привычно для книг серии «Приложения математики», моментами монотонно скучное и кропотливое изложение результатов исследований цепей Маркова с непрерывным временем и большим числом состояний при помощи упомянутого метода.

Книга состоит из десяти глав, объединенных в три больших раздела, и приложения.

В первой главе объясняется замысел книги, а также дан обзор литературы, относящейся как к теории цепей Маркова, так и к теории сингулярных возмущений.

Вторая глава содержит основные понятия и факты, используемые в теории марковских цепей: уравнения Колмогорова–Чепмена, неприводимость, квазистационарность и ряд других. Для некоторых российских ученых приятным сюрпризом окажется тот факт, что в данной главе определение цепей Маркова дается при помощи мартингалов.

Широта возможных применений цепей Маркова продемонстрирована в главе 3, где собрано множество примеров популярных марковских моделей. В их числе процессы рождения и гибели, системы массового обслуживания (включая сингулярно возмущенные и системы со слабым и сильным взаимодействиями), марковские модели в теории надежности, теории риска, сингулярно возмущенные процессы Кокса, процессы эволюции и модели сезонного изменения погоды. В этой же главе читатель обнаружит разделы, посвященные постановке задач стохастической оптимизации и аппроксимации, а также задаче контроля линейных систем с марковскими возмущениями.

Главы 4–7, объединенные в раздел «Сингулярно возмущенные цепи Маркова», составляют ядро рецензируемой монографии.

В главе 4 основное внимание уделено решению следующей задачи. Пусть $Q(t) \in R^{m \times m}$ — генератор некоторой неоднородной цепи Маркова с пространством состояний $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\alpha^\varepsilon(t)$ — цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{M}$ и генератором $Q^\varepsilon(t) = Q(t)/\varepsilon$. Спрашивается, каким будет асимптотическое разложение распределения

$$p^\varepsilon(t) = (P(\alpha^\varepsilon(t) = 1), \dots, P(\alpha^\varepsilon(t) = m))$$

по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что основные трудности, возникающие при решении этой задачи, обусловлены необратимостью матрицы $Q(t)$, и авторы книги предлагают оригинальный метод, позволяющий преодолеть это препятствие. При этом основное внимание уделяется слабо неприводимым генераторам $Q(t)$, т.е. таким, для которых при каждом $t \geq 0$ система уравнений

$$v(t) Q(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1$$