Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Процесс Гальтона–Ватсона при условии достижения высокого уровня, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 588–594

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:09:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2007 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

ПРОЦЕСС ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА
ПРИ УСЛОВИИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ¹⁾

Для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, рассматриваемого при условии достижения им высокого уровня, установлены предельные теоремы для времени достижения этого уровня и времени жизни.

Ключевые слова и фразы: процесс Гальтона–Ватсона, время достижения уровня, время жизни, условные принципы инвариантности, условные предельные теоремы, модифицированные функции Бесселя.

1. Пусть $Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots$ — критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, удовлетворяющий условию

$$DZ_1 \equiv 2b \in (0, +\infty), \quad (1)$$

и T — момент вырождения этого процесса, т.е.

$$T = \inf\{n: Z_n = 0\}.$$

Среди условных предельных теорем для процесса $\{Z_n\}$ можно выделить два больших класса: теоремы с условием $\{T > n\}$, составляющие классическую часть теории ветвящихся процессов, и теоремы с условием $\{\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = n\}$, составляющие ядро теории случайных деревьев (в обоих случаях $n \rightarrow \infty$).

В данной работе указанный процесс $\{Z_n\}$ рассматривается при условии $\{\max_{i \geq 0} Z_i > x\}$, $x \rightarrow +\infty$. Асимптотика вероятности этого события найдена Линдваллом [1]: при выполнении условия (1)

$$P\left\{\max_{i \geq 0} Z_i > x\right\} \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Иное доказательство этого результата и его обобщение на случай, когда условие (1) не выполняется, получены К. А. Боровковым и В. А. Ватутиным [2].

Пусть T_x — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\{Z_n\}$, т.е.

$$T_x = \inf\{n: Z_n > x\}.$$

Заметим, что случайные события $\{\max_{i \geq 0} Z_i > x\}$ и $\{T_x < +\infty\}$ совпадают. Справедливы следующие результаты.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viafan@mail.ru; viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00035) и гранта НШ-4129.2006.1.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1), тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{bT_x}{x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \tau_1,$$

где случайная величина τ_1 имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\tau_1) = \frac{\sqrt{s}}{I_1(2\sqrt{s})}, \quad s > 0$$

(здесь $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению).

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1), тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{bT}{x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \tau,$$

где случайная величина τ имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\tau) = 2s \frac{K_1(2\sqrt{s})}{I_1(2\sqrt{s})}, \quad s > 0$$

(здесь $K_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода, или функция Макдональда).

2. Приведем некоторые сведения о критических процессах Гальтона–Ватсона. Хорошо известно, что при выполнении условия (1)

$$\mathbf{P}\{T > n\} \sim \frac{1}{bn}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Сформулируем принцип инвариантности Ламперти–Нея–Дарретта [3]: если выполнено условие (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \in [0, 1] \mid T > n \right\} \xrightarrow{D} Y^+, \quad (4)$$

где $Y^+ = \{Y^+(t), t \in [0, 1]\}$ — некоторый неоднородный марковский процесс с непрерывными положительными (при $t \in (0, 1]$) траекториями; символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Указанный результат включает в себя теорему Яглома (сходимость при $t = 1$), в силу которой случайная величина $Y^+(1)$ имеет показательное распределение с параметром 1.

Важную роль в дальнейшем играет и следующий принцип инвариантности Феллера–Линдвалла [4], [5]: если выполнено условие (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \in [0, +\infty) \mid Z_0 = [bnx] \right\} \xrightarrow{D} \{Y(t), t \in [0, +\infty) \mid Y(0) = x\}, \quad (5)$$

где $\{Y(t)\}$ — так называемый *феллеровский ветвящийся диффузионный процесс*, являющийся хорошо изученным объектом теории вероятностей.

Наряду с указанными результатами в дальнейшем часто используется следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении условия (1)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T \leq \varepsilon x \mid T_x < +\infty) = 0.$$

Доказательство. Очевидно, что при натуральном x и положительном ε

$$\mathbf{P}\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon x\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=x+1}^{\infty} \mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l, T \leq \varepsilon x\}.$$

Далее, при $k \leq \varepsilon x$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l, T \leq \varepsilon x\} &= \mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l\} (\mathbf{P}\{T \leq \varepsilon x - k\})^l \\ &\leq \mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l\} (\mathbf{P}\{T \leq \varepsilon x\})^l. \end{aligned}$$

Поэтому при $k \leq \varepsilon x, l > x$

$$\mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l, T \leq \varepsilon x\} \leq \mathbf{P}\{T_x = k, Z_k = l\} (\mathbf{P}\{T \leq \varepsilon x\})^x,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{T_x < +\infty, T \leq \varepsilon x\} \leq \mathbf{P}\{T_x < +\infty\} (\mathbf{P}\{T \leq \varepsilon x\})^x.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(T \leq \varepsilon x \mid T_x < +\infty) \leq (\mathbf{P}\{T \leq \varepsilon x\})^x \leq e^{-x\mathbf{P}\{T > \varepsilon x\}}.$$

Осталось учесть соотношение (3). Лемма 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Запишем при $s > 0, \varepsilon > 0$ представление

$$\mathbf{E}[e^{-sT_x/x}; T_x < +\infty] = \mathbf{E}e^{-sT_x/x} = E_1(s, x, \varepsilon) + E_2(s, x, \varepsilon) + E_3(s, x, \varepsilon), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} E_1(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E}[e^{-sT_x/x}; T > \varepsilon x, T_x \geq \varepsilon x], \\ E_2(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E}[e^{-sT_x/x}; T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x], \\ E_3(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E}[e^{-sT_x/x}; T \leq \varepsilon x, T_x < +\infty]. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 и соотношения (2)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_3(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (7)$$

Далее,

$$E_2(s, x, \varepsilon) \leq \mathbf{P}\{T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x\}. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{P}\{T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x\} = 0. \quad (9)$$

Полагая $\varepsilon x = n$, видим, что

$$\mathbf{P}\{T > \varepsilon x, T_x \leq \varepsilon x\} = \mathbf{P}\{T > n, T_{n/\varepsilon} \leq n\} = \mathbf{P}\left(\max_{i \leq n} Z_i > \frac{n}{\varepsilon} \mid T > n\right) \mathbf{P}\{T > n\}.$$

В силу принципа инвариантности Ламперти-Нея-Дарретта (см. (4))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\max_{i \leq n} Z_i > \frac{n}{\varepsilon} \mid T > n\right) = \mathbf{P}\left\{\max_{t \in [0,1]} Y^+(t) > \frac{1}{b\varepsilon}\right\}.$$

Следовательно, ввиду соотношения (3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{P}\{T > \varepsilon x, T_x \leq \varepsilon x\} = \frac{1}{b\varepsilon} \mathbf{P}\left\{\max_{t \in [0,1]} Y^+(t) > \frac{1}{b\varepsilon}\right\}. \quad (10)$$

В работе [6, раздел 4] доказано, что случайная величина $\max_{t \in [0,1]} Y^+(t)$ имеет конечные моменты всех порядков, поэтому по неравенству Чебышёва

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}\left\{\max_{t \in [0,1]} Y^+(t) > \frac{1}{b\varepsilon}\right\} = 0. \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) вытекает (9). Из соотношений (8) и (9) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_2(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению $E_1(s, x, \varepsilon)$. Снова полагая $\varepsilon x = n$, получаем

$$E_1(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{s\varepsilon T_{n/\varepsilon}}{n}\right); T > n, T_{n/\varepsilon} \geq n\right].$$

Рассмотрим на множестве $\{T > n\}$ случайную последовательность $\tilde{Z}_m = Z_{n+m}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и положим

$$\tilde{T}_x = \inf\{m: \tilde{Z}_m > x\}.$$

Тогда на множестве $\{T > n, T_{n/\varepsilon} \geq n\}$ выполняется равенство $T_{n/\varepsilon} = n + \tilde{T}_{n/\varepsilon}$, и поэтому

$$E_1(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{s\varepsilon \tilde{T}_{n/\varepsilon}}{n} \right); T > n, T_{n/\varepsilon} \geq n \right].$$

Следовательно,

$$E_1(s, x, \varepsilon) = E_{11}(s, x, \varepsilon) - E_{12}(s, x, \varepsilon), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} E_{11}(s, x, \varepsilon) &= e^{-s\varepsilon} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{s\varepsilon \tilde{T}_{n/\varepsilon}}{n} \right); T > n \right], \\ E_{12}(s, x, \varepsilon) &= e^{-s\varepsilon} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{s\varepsilon \tilde{T}_{n/\varepsilon}}{n} \right); T > n, T_{n/\varepsilon} < n \right]. \end{aligned}$$

Ввиду соотношения (9)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_{12}(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} E_{11}(s, x, \varepsilon) &= e^{-s\varepsilon} \mathbf{P}\{T > n\} \\ &\times \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{s\varepsilon T_{n/\varepsilon}}{n} \right) \mid Z_0 = [bnz] \right] d\mathbf{P}(Z_n \leq bnz \mid T > n). \end{aligned} \quad (15)$$

По теореме Яглома

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_n}{bn} \leq z \mid T > n \right) = 1 - e^{-z}. \quad (16)$$

Пусть $T_x^{(Y)}$ — момент первого достижения уровня $x > 0$ феллеровским ветвящимся диффузионным процессом $\{Y(t)\}$, т.е.

$$T_x^{(Y)} = \inf\{t: Y(t) > x\}.$$

При $a > 0$, $u \geq 0$ и $z > 0$

$$\mathbf{P} \left(\frac{T_{an}}{n} \leq u \mid Z_0 = [bnz] \right) = \mathbf{P} \left(\max_{i \leq nu} Z_i > an \mid Z_0 = [bnz] \right).$$

Следовательно, по принципу инвариантности Феллера-Линдвалла (см. (5))

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{T_{an}}{n} \leq u \mid Z_0 = [bnz] \right) &= \mathbf{P} \left(\max_{t \leq u} Y(t) > \frac{a}{b} \mid Y(0) = z \right) \\ &= \mathbf{P}(T_{a/b}^{(Y)} \leq u \mid Y(0) = z), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{sT_{an}}{n} \right) \mid Z_0 = [bnz] \right] = \mathbf{E}[\exp(-sT_{a/b}^{(Y)}) \mid Y(0) = z]. \quad (17)$$

Можно показать, что это соотношение выполняется равномерно по z , принадлежащим произвольному отрезку. Применяя (3), (16) и (17) к соотношению (15), получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x E_{11}(s, x, \varepsilon) = \frac{e^{-s\varepsilon}}{b\varepsilon} \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)}) \mid Y(0) = z \right] e^{-z} dz. \quad (18)$$

Положим

$$\eta(s, x, z) = \mathbf{E}[\exp(-sT_x^{(Y)}) \mid Y(0) = z]. \quad (19)$$

Тогда, ввиду (18),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x E_{11}(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} (b\varepsilon)^{-1} \int_0^{+\infty} \eta(s\varepsilon, (b\varepsilon)^{-1}, z) e^{-z} dz. \quad (20)$$

В работе [6, раздел 2] доказано, что $\eta(s, x, z) = \sqrt{z} I_1(2\sqrt{zs}) / (\sqrt{x} I_1(2\sqrt{xs}))$. Известно, что $I_1(y) \sim y/2$ при $y \rightarrow 0$. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\eta(s\varepsilon, (b\varepsilon)^{-1}, z) = \frac{\sqrt{b\varepsilon z} I_1(2\sqrt{zs\varepsilon})}{I_1(2\sqrt{s/b})} \sim \frac{z\varepsilon\sqrt{bs}}{I_1(2\sqrt{s/b})}.$$

Тогда, учитывая, что $0 \leq \eta(s, x, z) \leq 1$, из соотношения (20) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x E_{11}(s, x, \varepsilon) = \frac{\sqrt{s/b}}{I_1(2\sqrt{s/b})} \int_0^{+\infty} z e^{-z} dz = \frac{\sqrt{s/b}}{I_1(2\sqrt{s/b})}. \quad (21)$$

Из соотношений (6), (7), (12)–(14) и (21) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{E}[e^{-sT_x/x}; T_x < +\infty] = \frac{\sqrt{s/b}}{I_1(2\sqrt{s/b})}.$$

Вспоминая соотношение (2), получаем утверждение теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Запишем при $s > 0$, $\varepsilon > 0$ представление

$$\mathbf{E}[e^{-sT/x}; T_x < +\infty] = I_1(s, x, \varepsilon) + I_2(s, x, \varepsilon) + I_3(s, x, \varepsilon), \quad (22)$$

где

$$I_1(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E}[e^{-sT/x}; T > \varepsilon x, \varepsilon x \leq T_x < +\infty],$$

$$I_2(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E}[e^{-sT/x}; T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x],$$

$$I_3(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E}[e^{-sT/x}; T \leq \varepsilon x, T_x < +\infty].$$

Ввиду леммы 1 и соотношения (2)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x I_3(s, x, \varepsilon) = 0, \quad (23)$$

а ввиду соотношения (9)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x I_2(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (24)$$

Положим $\varepsilon x = n$ и для случайной последовательности $\tilde{Z}_m = Z_{n+m}$, рассматриваемой на множестве $\{T > n\}$ (см. доказательство теоремы 1), введем момент вырождения

$$\tilde{T} = \inf\{m: \tilde{Z}_m = 0\}.$$

Тогда на множестве $\{T > n\}$ справедливо равенство $T = n + \tilde{T}$, и поэтому

$$I_1(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} \mathbf{E}[\exp(-s\varepsilon \tilde{T} n^{-1}); T > n, n \leq T_{n/\varepsilon} < +\infty].$$

Откуда, учитывая, что на множестве $\{T_{n/\varepsilon} \geq n\}$ выполняется равенство $T_{n/\varepsilon} = n + \tilde{T}_{n/\varepsilon}$, запишем представление

$$I_1(s, x, \varepsilon) = I_{11}(s, x, \varepsilon) - I_{12}(s, x, \varepsilon), \quad (25)$$

где

$$I_{11}(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} \mathbf{E}[\exp(-s\varepsilon \tilde{T} n^{-1}); T > n, \tilde{T}_{n/\varepsilon} < +\infty],$$

$$I_{12}(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} \mathbf{E}[\exp(-s\varepsilon \tilde{T} n^{-1}); T > n, T_{n/\varepsilon} < n, \tilde{T}_{n/\varepsilon} < +\infty].$$

Ввиду соотношения (9)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x I_{12}(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (26)$$

Очевидно, что

$$I_{11}(s, x, \varepsilon) = e^{-s\varepsilon} \mathbf{P}\{T > n\} \\ \times \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T n^{-1}) \chi_{\{T_{n/\varepsilon} < +\infty\}} \mid \right. \\ \left. Z_0 = [bnz] \right] d\mathbf{P}(Z_n \leqslant bnz \mid T > n), \quad (27)$$

где $\chi_{\{\cdot\}}$ — индикатор события $\{\cdot\}$.

Пусть $T^{(Y)}$ — момент вырождения феллеровского ветвящегося диффузионного процесса $\{Y(t)\}$, т.е.

$$T^{(Y)} = \inf\{t > 0: Y(t) = 0\}.$$

Т. Линдвалл [5, теорема 3.1] доказал, что если выполнено условие (1) и $z > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{T}{n} \mid Z_0 = [bnz] \right\} \xrightarrow{D} \{T^{(Y)} \mid Y(0) = z\}, \quad (28)$$

причем функция распределения предельной случайной величины имеет вид

$$F(u) = e^{-z/u}, \quad u > 0.$$

Из таблиц интегралов (см., например, [7, п. 2.3.16]) находим, что

$$\mathbf{E}(\exp(-sT^{(Y)}) \mid Y(0) = z) = 2\sqrt{zs} K_1(2\sqrt{zs}). \quad (29)$$

Соотношение (28) нетрудно обобщить (см. (17)): если выполнено условие (1), $a > 0$, $z > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\{Tn^{-1}, T_{an}n^{-1} \mid Z_0 = [bnz]\} \xrightarrow{D} \{T^{(Y)}, T_{a/b}^{(Y)} \mid Y(0) = z\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T n^{-1}) \chi_{\{T_{n/\varepsilon} < +\infty\}} \mid Z_0 = [bnz] \right] \\ = \mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T^{(Y)}) \chi_{\{T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty\}} \mid Y(0) = z \right].$$

Теперь заметим, что в силу строго марковского свойства диффузионного процесса $\{Y(t)\}$ последнее математическое ожидание равно

$$\mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T^{(Y)}) \mid Y(0) = \frac{1}{b\varepsilon} \right] \mathbf{E}[\exp(-s\varepsilon T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)}) \mid Y(0) = z].$$

Вспоминая (19) и (29), в итоге находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp(-s\varepsilon T n^{-1}) \chi_{\{T_{n/\varepsilon} < +\infty\}} \mid Z_0 = [bnz] \right] \\ = 2\sqrt{sb^{-1}} K_1(2\sqrt{sb^{-1}}) \eta(s\varepsilon, (b\varepsilon)^{-1}, z), \quad (30)$$

причем можно показать, что это соотношение выполняется равномерно по z , принадлежащим произвольному отрезку.

Из соотношения (27), учитывая (3), (16) и (30), получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x I_{11}(s, x, \varepsilon) = 2\sqrt{sb^{-1}} K_1(2\sqrt{sb^{-1}}) \frac{e^{-s\varepsilon}}{b\varepsilon} \int_0^{+\infty} \eta\left(s\varepsilon, \frac{1}{b\varepsilon}, z\right) e^{-z} dz. \quad (31)$$

Замечая, что правая часть (20) является множителем в правой части (31), и вспоминая (21), находим, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x I_{11}(s, x, \varepsilon) = 2 \frac{s}{b} \frac{K_1(2\sqrt{s/b})}{I_1(2\sqrt{s/b})}. \quad (32)$$

Из соотношений (22)–(26) и (32) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{E}[e^{-sT/x}; T_x < +\infty] = 2 \frac{s}{b} \frac{K_1(2\sqrt{s/b})}{I_1(2\sqrt{s/b})}.$$

Откуда, ввиду (2), следует утверждение теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Незначительно модифицируя доказательство теоремы 2, можно показать, что при выполнении условия (1) случайные величины bT_x/x и $b(T - T_x)/x$, рассматриваемые при условии $\{T_x < +\infty\}$, асимптотически независимы при $x \rightarrow +\infty$, причем

$$\left\{ \frac{b(T - T_x)}{x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \tau_2,$$

где случайная величина τ_2 имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\tau_2) = 2\sqrt{s} K_1(2\sqrt{s}), \quad s > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lindvall T.* On the maximum of a branching process. — *Scand. J. Statist.*, 1976, v. 3, № 4, p. 209–214.
2. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* On distribution tails and expectations of maxima in critical branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1996, v. 33, № 3, p. 614–622.
3. *Durrett R. T.* Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 5, p. 798–828.
4. *Lindvall T.* Convergence of critical Galton–Watson branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1972, v. 9, p. 445–450.
5. *Lindvall T.* Limit theorems for some functionals of certain Galton–Watson branching processes. — *Adv. Appl. Probab.*, 1974, v. 6, p. 309–321.
6. *Pakes A. G.* A limit theorem for the maxima of the para-critical simple branching process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1998, v. 30, № 3, p. 740–756.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 798 с.

Поступила в редакцию
29.III.2005

Исправленный вариант
11.XII.2006

© 2007 г.

КАЧИНСКАЙТЕ Р.*, ЛАУРИНЧИКАС А.**

ОБЩАЯ ДИСКРЕТНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ МАТСУМОТО¹⁾

Рассматривается широкий класс рядов Дирихле с полиномиальным эйлеровским произведением, а именно дзета-функция Матсумото; этот класс охватывает все классические дзета-функции, имеющие эйлеровское произведение. Для таких рядов Дирихле доказана общая дискретная предельная теорема в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций.

* Department of Physics and Mathematics, Šiauliai University, P. Višinskio 19, 77156 Šiauliai, Lithuania; e-mail: r.kacinskaite@fm.su.lt

** Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lithuania e-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Литовского фонда науки и образования.