Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Качинскайте, А. П. Лауринчикас, Общая дискретная предельная теорема в пространстве аналитических функций для дзета-функции Матсумото, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 594–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:32:55

Из соотношений (22)–(26) и (32) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{E}[e^{-sT/x}; T_x < +\infty] = 2 \frac{s}{b} \frac{K_1(2\sqrt{s/b})}{I_1(2\sqrt{s/b})}.$$

Откуда, ввиду (2), следует утверждение теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Незначительно модифицируя доказательство теоремы 2, можно показать, что при выполнении условия (1) случайные величины bT_x/x и $b(T - T_x)/x$, рассматриваемые при условии $\{T_x < +\infty\}$, асимптотически независимы при $x \rightarrow +\infty$, причем

$$\left\{ \frac{b(T - T_x)}{x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \tau_2,$$

где случайная величина τ_2 имеет следующее преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\tau_2) = 2\sqrt{s} K_1(2\sqrt{s}), \quad s > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lindvall T.* On the maximum of a branching process. — *Scand. J. Statist.*, 1976, v. 3, № 4, p. 209–214.
2. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* On distribution tails and expectations of maxima in critical branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1996, v. 33, № 3, p. 614–622.
3. *Durrett R. T.* Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 5, p. 798–828.
4. *Lindvall T.* Convergence of critical Galton–Watson branching processes. — *J. Appl. Probab.*, 1972, v. 9, p. 445–450.
5. *Lindvall T.* Limit theorems for some functionals of certain Galton–Watson branching processes. — *Adv. Appl. Probab.*, 1974, v. 6, p. 309–321.
6. *Pakes A. G.* A limit theorem for the maxima of the para-critical simple branching process. — *Adv. Appl. Probab.*, 1998, v. 30, № 3, p. 740–756.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 798 с.

Поступила в редакцию
29.III.2005

Исправленный вариант
11.XII.2006

© 2007 г.

КАЧИНСКАЙТЕ Р.*, ЛАУРИНЧИКАС А.**

ОБЩАЯ ДИСКРЕТНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ МАТСУМОТО¹⁾

Рассматривается широкий класс рядов Дирихле с полиномиальным эйлеровским произведением, а именно дзета-функция Матсумото; этот класс охватывает все классические дзета-функции, имеющие эйлеровское произведение. Для таких рядов Дирихле доказана общая дискретная предельная теорема в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций.

* Department of Physics and Mathematics, Šiauliai University, P. Višinskio 19, 77156 Šiauliai, Lithuania; e-mail: r.kacinskaite@fm.su.lt

** Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lithuania e-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Литовского фонда науки и образования.

Ключевые слова и фразы: вероятностная мера, дзета-функция Матсумото, компактная топологическая группа, мера Хаара, пространство аналитических функций, ряд Дирихле, слабая сходимостъ, теорема Прохорова, эргодическое преобразование.

1. Введение. Как обычно, через $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ будем обозначать соответственно множества всех положительных целых, целых, действительных и комплексных чисел. Для $m \in \mathbf{N}$ определим положительное целое $g(m)$. Кроме того, пусть $a_m^{(j)} \in \mathbf{C}$ и $f(j, m) \in \mathbf{N}$, $1 \leq j \leq g(m)$. Определим полином

$$A_m(x) = \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - a_m^{(j)} x^{f(j,m)}\right)$$

степени $f(1, m) + \dots + f(g(m), m)$. Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, а p_m обозначает m -е простое число. В [1] К. Матсумото ввел и начал изучать следующую дзета-функцию:

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} A_m^{-1}(p_m^{-s}). \quad (1)$$

Он предполагал выполнение условий

$$g(m) \leq c_1 p_m^{\alpha}, \quad |a_m^{(j)}| \leq p_m^{\beta}$$

с положительной константой c_1 и неотрицательными константами α и β . При этих условиях бесконечное произведение (1) при $\sigma > \alpha + \beta + 1$ абсолютно сходится и определяет голоморфную функцию $\varphi(s)$ без нулей. Нетрудно видеть, что дзета-функция Матсумото при $\sigma > \alpha + \beta + 1$ задается абсолютно сходящимся рядом Дирихле:

$$\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s},$$

и коэффициенты b_m удовлетворяют оценке $b_m = O(m^{\alpha+\beta+\varepsilon})$ при каждом положительном ε .

Отметим, что функция $\varphi(s)$ является обобщением разнообразных классических дзета-функций: дзета-функции Римана, L -функций Дирихле, дзета-функций Дедекинда, дзета-функций, связанных с параболическими формами, и т.д.

Непрерывные предельные теоремы в смысле слабой сходимости вероятностных мер для дзета-функции Матсумото были доказаны самим Матсумото в [1]–[3] и вторым автором в [4]–[7]. В этих теоремах рассматривается частота множеств

$$\{\varphi(\sigma + it) \in A\} \quad \text{или} \quad \{\varphi(s + i\tau) \in A\}.$$

Здесь A обозначает некоторое множество на комплексной плоскости или в пространстве аналитических или мероморфных функций. В этом случае мнимая часть сдвигов меняется непрерывно в промежутке $[0, T]$.

Дискретные предельные теоремы для функции $\varphi(s)$ в разных пространствах были получены первым автором в [8]–[10]. В этом случае мнимая часть сдвигов принимает значения из некоторой арифметической прогрессии. Пусть при $N \in \mathbf{N}$

$$\mu_N(\dots) = \frac{1}{N+1} \#(0 \leq m \leq N: \dots),$$

где вместо многоточия будем писать условие, которому удовлетворяет m . Кроме того, пусть $D = \{s \in \mathbf{C}: \sigma > \alpha + \beta + 1\}$, и пусть $H(D)$ обозначает пространство аналитических в D функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах.

Пусть $h > 0$ — фиксированное число. В [9] рассматривалась слабая сходимостъ при $N \rightarrow \infty$ вероятностных мер

$$P_N(A) = \mu_N(\varphi(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

где $\mathcal{B}(S)$ обозначает класс борелевских множеств пространства S . Чтобы сформулировать предельную теорему, нам нужна следующая топологическая структура. Через γ обозначим единичную окружность на комплексной плоскости, и пусть

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$, для всех простых p . С топологией произведения и поточечным перемножением бесконечномерный тор Ω является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H и мы получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Пусть $\omega(p)$ обозначает проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p . Тогда формула

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \parallel m} \omega^\alpha(p),$$

где $p^\alpha \parallel m$ означает, что $p^\alpha \mid m$, но $p^{\alpha+1} \nmid m$, дает продолжение функции $\omega(p)$ на все множество $\mathbf{N}$. Очевидно, что $\omega(m)$ является вполне мультипликативной функцией.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H(D)$ -значный случайный элемент

$$\varphi(s, \omega) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{\omega^{f(j,m)}(p_m) a_m^{(j)}}{p_m^{sf(j,m)}} \right)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m \omega(m)}{m^s}, \quad s \in D,$$

и через P_φ обозначим его распределение. В [9] было получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что число $\exp\{2\pi k/h\}$ иррационально для всех $k \neq 0$. Тогда вероятностные меры P_N при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к P_φ .*

Важно получить общую предельную теорему без требования, чтобы число $\exp\{2\pi k/h\}$ было иррациональным для всех $k \neq 0$. Цель настоящей статьи — доказать предельную теорему для меры P_N с таким h , что число $\exp\{2\pi k/h\}$ рационально для некоторых $k \in \mathbf{Z}$.

Предположим, что существуют числа $k \neq 0$ такие, что число $\exp\{2\pi k/h\}$ рационально (ясно, что достаточно рассматривать только положительные числа k). Пусть k_0 является наименьшим из них. Нетрудно видеть, что каждое k с таким свойством является кратным числа k_0 . Действительно, имеем, что $k = ak_0 + b$, где $0 \leq b < k_0$. Тогда

$$\exp \left\{ \frac{2\pi k}{h} \right\} = \exp \left\{ \frac{2\pi ak_0}{h} \right\} \exp \left\{ \frac{2\pi b}{h} \right\},$$

где $\exp\{2\pi k/h\}$ и $\exp\{2\pi ak_0/h\}$ — рациональные числа. Поэтому число $\exp\{2\pi b/h\}$ также должно быть рациональным, но это противоречит определению k_0 , поскольку $0 \leq b < k_0$.

Пусть $\exp\{2\pi k_0/h\} = m_0/n_0$, где $m_0, n_0 \in \mathbf{N}$, $(m_0, n_0) = 1$. Определим $\Omega_h = \{\omega \in \Omega: \omega(m_0) = \omega(n_0)\}$. Тогда Ω_h является замкнутой подгруппой группы Ω , поэтому Ω_h также является компактной топологической абелевой группой. Через m_{hH} обозначим вероятностную меру Хаара на $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$. Тогда имеем вероятностное пространство $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Пусть при $\sigma > \alpha + \beta + 1$

$$\varphi(s, \omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{\omega_h^{f(j,m)}(p_m) a_m^{(j)}}{p_m^{sf(j,m)}} \right)^{-1}, \quad \omega_h \in \Omega_h.$$

Последний ряд абсолютно сходится при $\sigma > \alpha + \beta + 1$ для всех $\omega_h \in \Omega_h$. Поэтому ввиду хорошо известных свойств рядов Дирихле этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости D . Следовательно, $\varphi(s, \omega_h)$ является $H(D)$ -значным случайным элементом, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Через P_{φ_h} обозначим распределение случайного элемента $\varphi(s, \omega_h)$, т.е.

$$P_{\varphi_h}(A) = m_{hH}(\varphi(s, \omega_h) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Теорема 2. Предположим, что число $\exp\{2\pi k/h\}$ рационально для некоторых $k \neq 0$. Тогда вероятностные меры P_N при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к P_{φ_h} .

В дальнейшем мы полагаем, что h такое же, как и в теореме 2.

2. Предельные теоремы для полиномов Дирихле. Пусть

$$\varphi_n(s) = \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{m^s}$$

и

$$P_{\varphi_n, N}(A) = \mu_N(\varphi_n(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Теорема 3. На $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ существует вероятностная мера P_{φ_n} такая, что меры $P_{\varphi_n, N}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к P_{φ_n} .

Для доказательства теоремы 3 мы применим следующее утверждение. Обозначим $p_1, \dots, p_r$ различные простые числа, делящие произведение $\prod_{k=1}^n b_k \neq 0$. Пусть

$$\Omega_r = \prod_{j=1}^r \gamma_{p_j},$$

где $\gamma_{p_j} = \gamma$ для $j = 1, \dots, r$. Кроме того, пусть $\Omega_{hr} = \{\omega \in \Omega_r : \omega(m_0) = \omega(n_0)\}$. Определим вероятностную меру

$$Q_{hN}(A) = \mu_N((p_1^{imh}, \dots, p_r^{imh}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega_r).$$

Лемма 1. Вероятностные меры Q_{hN} слабо сходятся к мере Хаара m_{hr} на $(\Omega_{hr}, \mathcal{B}(\Omega_{hr}))$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $g_N(k_1, \dots, k_r)$ меры Q_{hN} , т.е.

$$g_N(k_1, \dots, k_r) = \int_{\Omega_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r} dQ_{hN},$$

где $k_j \in \mathbf{Z}$, $x_1, \dots, x_r \in \gamma$. Имеем, что

$$\begin{aligned} g_N(k_1, \dots, k_r) &= \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N \prod_{j=1}^r p_j^{imhk_j} = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N \exp \left\{ imh \sum_{j=1}^r k_j \ln p_j \right\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } k_1 = k\alpha_1, \dots, k_l = k\alpha_l, \quad k_{l+1} = \dots = k_r = 0, \\ \frac{1}{N+1} \frac{1 - \exp\{i(N+1)h \sum_{j=1}^r k_j \ln p_j\}}{1 - \exp\{ih \sum_{j=1}^r k_j \ln p_j\}} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Логарифмы простых чисел линейно независимы над полем рациональных чисел, поэтому

$$\sum_{j=1}^r k_j \ln p_j \neq 0 \quad \text{для } (k_1, \dots, k_r) \neq (0, \dots, 0).$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^r k_j \ln p_j \neq \frac{2\pi k}{h} \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

при $(k_1, \dots, k_l, k_{l+1}, \dots, k_r) \neq (m\alpha_1, \dots, m\alpha_l, 0, \dots, 0)$, поскольку по определению числа h выполнено равенство $\exp\{2\pi k_0/h\} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$. Поэтому рациональные числа $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ и $\exp\{2\pi k/h\}$ совпадают тогда и только тогда, когда $(k_1, \dots, k_r) = (m\alpha_1, \dots, m\alpha_l, 0, \dots, 0)$. Следовательно, из (2) получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(k_1, \dots, k_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } (k_1, \dots, k_l, k_{l+1}, \dots, k_r) = (k\alpha_1, \dots, k\alpha_l, 0, \dots, 0), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и лемма доказана, так как предельное преобразование Фурье соответствует мере Хаара на $(\Omega_{hr}, \mathcal{B}(\Omega_{hr}))$.

Доказательство теоремы 3. Определим функцию $u: \Omega_r \rightarrow H(D)$ формулой

$$u(x_1, \dots, x_r) = \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{m^s} \prod_{p_j^{k_j} \parallel m, 1 \leq j \leq r} (x_j^{k_j})^{-1}, \quad (x_1, \dots, x_r) \in \Omega_r.$$

Очевидно, что функция u непрерывна на Ω_r и

$$\varphi_n(s + imh) = u(p_1^{imh}, \dots, p_r^{imh}).$$

Следовательно, поскольку $P_{\varphi_n, N} = Q_{hN} u^{-1}$ и по лемме 1 вероятностные меры Q_{hN} при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к m_{hr} , хорошо известные свойства слабой сходимости (см. [11, § 5]) показывают, что меры $P_{\varphi_n, N} = Q_{hN} u^{-1}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к $m_{hr} u^{-1}$.

З а м е ч а н и е. Предельная мера P_{φ_n} в теореме 3 равна $m_{hr} u^{-1}$.

Пусть $\omega_h \in \Omega_{hr}$,

$$\varphi_n(s, \omega_h) = \sum_{m=1}^n \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s}$$

и

$$\hat{P}_{\varphi_n, N}(A) = \mu_N(\varphi_n(s + imh, \omega_h) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Теорема 4. Вероятностные меры $\hat{P}_{\varphi_n, N}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к $m_{hr} u^{-1}$.

Доказательство. Пусть функция $u_1: \Omega_r \rightarrow \Omega_r$ определена формулой

$$u_1(x_1, \dots, x_r) = (x_1 \omega_h^{-1}(p_1), \dots, x_r \omega_h^{-1}(p_r)).$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что вероятностные меры $\hat{P}_{\varphi_n, N}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к $m_{hr} v^{-1}$, где

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{m=1}^n \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s} \left(\prod_{p_j^{k_j} \parallel m, 1 \leq j \leq r} x_j^{k_j} \right)^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{m^s} \left(\prod_{p_j^{k_j} \parallel m, 1 \leq j \leq r} x_j^{k_j} \omega_h^{-k_j}(p_j) \right)^{-1} \\ &= u(u_1(x_1, \dots, x_r)), \quad (x_1, \dots, x_r) \in \Omega. \end{aligned}$$

Так как мера Хаара m_{hr} инвариантна относительно сдвигов на точки из Ω_{hr} , отсюда получаем, что меры $\hat{P}_{\varphi_n, N}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к мере

$$m_{hr}(u u_1)^{-1} = (m_{hr} u_1^{-1}) u^{-1} = m_{hr} u^{-1}.$$

3. Доказательство теоремы 2. Вначале мы напомним некоторые результаты эргодической теории. Пусть $a_h = \{p^{-ih}: p \text{ — простое число}\}$. Определим преобразование f_h группы Ω_h , полагая $f_h(\omega_h) = a_h \omega_h$ для $\omega_h \in \Omega_h$. Тогда f_h является измеримым, сохраняющим меру преобразованием на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hN})$.

Множество $A \in \mathcal{B}(\Omega_h)$ называется инвариантным относительно преобразования f_h , если множества A и $A_h = f_h(A)$ отличаются друг от друга на множество m_{hN} -меры нуль, другими словами, если $m_{hN}(A \Delta A_h) = 0$, где Δ обозначает симметрическую разность.

Преобразование группы Ω_h называется эргодическим, если его σ -поле инвариантных множеств состоит только из множеств, имеющих m_{hN} -меру, равную 0 или 1.

Лемма 2. Преобразование f_h эргодично.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что множество $A \in \mathcal{B}(\Omega_h)$ удовлетворяет соотношению $m_{hH}(A \triangle A_h) = 0$. Для доказательства леммы мы должны показать, что $m_{hH}(A) = 0$ или $m_{hH}(A) = 1$. Пусть I_A — индикатор множества A . Так как A инвариантно, то для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$ относительно меры m_{hH} выполнено равенство

$$I_A(a_h \omega_h) = I_A(\omega_h). \quad (3)$$

Пусть χ — нетривиальный характер группы Ω_h . Тогда, как и в случае Ω (см. [12]), существует положительное рациональное число $r = m/n$ такое, что

$$\chi(\omega_h) = \omega_h(r) = \frac{\omega_h(m)}{\omega_h(n)}.$$

Поэтому

$$\chi(a_h) = r^{-ih}.$$

Если $\chi(a_h) = 1$, то $r = \exp\{2\pi k/h\}$ с некоторым $k \in \mathbf{Z}$. Если k является кратным k_0 , то для всех $\omega_h \in \Omega_h$

$$\omega_h(r) = \left(\frac{\omega_h(m_0)}{\omega_h(n_0)} \right)^l = 1, \quad l \in \mathbf{Z},$$

т.е. χ — тривиальный характер группы Ω_h . Мы получаем такую же ситуацию, если $k = 0$. Следовательно, $\chi(a_h) \neq 1$.

Обозначим $\hat{f}$ преобразование Фурье функции f . Тогда, принимая во внимание (3), находим

$$\begin{aligned} \hat{I}_A(\chi) &= \int_{\Omega_h} \chi(\omega_h) I_A(\omega_h) m_{hH}(d\omega_h) = \int_{\Omega_h} \chi(a_h \omega_h) I_A(a_h \omega_h) m_{hH}(d\omega_h) \\ &= \chi(a_h) \int_{\Omega_h} \chi(\omega_h) I_A(\omega_h) m_{hH}(d\omega_h) = \chi(a_h) \hat{I}_A(\chi). \end{aligned}$$

Так как $\chi(a_h) \neq 1$, отсюда получаем, что $\hat{I}_A(\chi) = 0$ для всех нетривиальных характеров группы Ω_h .

Теперь пусть χ_0 — тривиальный характер группы Ω_h , т.е. $\chi_0(\omega_h) = 1$ для всех $\omega_h \in \Omega_h$. Предположим, что $\hat{I}_A(\chi_0) = u$. Так как

$$\int_{\Omega_h} \chi(\omega_h) m_{hH}(d\omega_h) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

$\hat{I}_A(\chi) = 0$ для $\chi \neq \chi_0$ и $\hat{I}_A(\chi_0) = u$, то находим, что для всякого характера χ группы Ω_h

$$\hat{I}_A(\chi) = u \int_{\Omega_h} \chi(\omega_h) m_{hH}(d\omega_h) = u \hat{I}_A(\chi) = \hat{u}(\chi).$$

Функция $I_A(\omega_h)$ однозначно определяется своим преобразованием Фурье, поэтому $I_A(\omega_h) = u$ для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$. Однако $I_A(\omega_h)$ — индикатор множества A , поэтому отсюда находим, что $u = 0$ или $u = 1$. Следовательно, $I_A(\omega_h) = 0$ для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$ или $I_A(\omega_h) = 1$ для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$. Это означает, что $m_{hH}(A) = 0$ или $m_{hH}(A) = 1$, и лемма доказана.

Ввиду теорем 3 и 4 вероятностные меры $P_{\varphi_n, N}$ и $\hat{P}_{\varphi_n, N}$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к одной и той же мере $m_{h\tau} u^{-1}$. Для краткости обозначим эту меру через P_n .

Лемма 3. Семейство вероятностных мер $\{P_n\}$ является плотным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть θ_N — случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbf{P})$, со значениями mh , $m = 0, 1, \dots, N$, и

$$\mathbf{P}\{\theta_N = mh\} = \frac{1}{N+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

Положим

$$X_{N,n}(s) = \varphi_n(s + i\theta_N).$$

Тогда по теореме 3 имеем, что

$$X_{N,n}(s) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X_n, \quad (4)$$

где X_n — $H(D)$ -значный случайный элемент с распределением P_n , а $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению.

Хорошо известно (см., например, [13]), что существует последовательность $\{K_n\}$ компактных подмножеств полуплоскости D такая, что $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, кроме того, множества K_n могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $K_n \subset K_{n+1}$; 2) если K — компакт и $K \subset D$, то $K \subseteq K_n$ при некотором n .

Пусть для $f, g \in H(D)$

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\varrho_n(f, g)}{1 + \varrho_n(f, g)}, \quad \text{где } \varrho_n(f, g) = \sup_{s \in K_n} |f(s) - g(s)|.$$

Нетрудно видеть, что ϱ является метрикой в пространстве $H(D)$, индуцирующей его топологию.

Пусть $M_l > 0$. Тогда неравенство Чебышёва влечет за собой неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_{N,n}(s)| > M_l \right\} \leq \frac{1}{(N+1) M_l} \sum_{m=0}^N \sup_{s \in K_l} |\varphi_n(s + imh)|. \quad (5)$$

Ряд Дирихле для $\varphi(s)$ абсолютно сходится в D , поэтому он сходится равномерно на компактных подмножествах области D . Следовательно, существует число $R_l < \infty$, $l \in \mathbf{N}$, такое, что

$$\sup_{n \geq 1} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N \sup_{s \in K_l} |\varphi_n(s + imh)| < R_l. \quad (6)$$

Пусть ε — произвольное положительное число, а $M_l = R_l 2^l / \varepsilon$. Тогда, принимая во внимание (5) и (6), получаем, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_{N,n}(s)| > M_l \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию $u: H(D) \rightarrow \mathbf{R}$, заданную формулой $u(f) = \sup_{s \in K_l} |f(s)|$, $f \in H(D)$. Очевидно, что функция u непрерывна, поэтому в силу (4)

$$\sup_{s \in K_l} |X_{N,n}(s)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sup_{s \in K_l} |X_n(s)|.$$

Отсюда и из (7) получаем, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_n(s)| > M_l \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \quad (8)$$

Теперь определим

$$H_\varepsilon = \left\{ f \in H(D): \sup_{s \in K_l} |f(s)| \leq M_l, l \geq 1 \right\}.$$

Семейство функций H_ε является равномерно ограниченным на каждом компакте $K \subset D$. Поэтому, ввиду принципа компактности, H_ε компактно. Кроме того, в силу (8) для всех $n \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P} \left\{ X_n(s) \in H_\varepsilon \right\} \geq 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon.$$

Однако P_n — распределение случайного элемента X_n . Таким образом, для всех $n \in \mathbf{N}$

$$P_n(H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Это означает, что семейство вероятностных мер $\{P_n\}$ является плотным.

Теперь для $\omega_h \in \Omega_h$ определим

$$\hat{P}_N(A) = \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Теорема 5. Вероятностные меры P_N и $\hat{P}_N$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к одной и той же мере.

Доказательство. По определению $\varphi_n(s)$ при $\sigma > \alpha + \beta + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s),$$

причем сходимость равномерна на компактных подмножествах области D . Отсюда находим, что для $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\varrho(\varphi_n(s + imh), \varphi(s + imh)) > \varepsilon) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{m=0}^N \varrho(\varphi_n(s + imh), \varphi(s + imh)) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь пусть $X_N(s) = \varphi(s + i\theta_N)$. Тогда (9) показывает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P\{\varrho(X_{N,n}(s), X_N(s)) \geq \varepsilon\} = 0. \quad (10)$$

Ввиду леммы 3 и теоремы Прохорова [14] (см. также [11]) имеем, что семейство вероятностных мер $\{P_n\}$ является относительно компактным. Поэтому существует подпоследовательность $\{P_{n_1}\}$ такая, что меры P_{n_1} при $n_1 \rightarrow \infty$ слабо сходятся к некоторой мере P . Отсюда

$$X_{n_1} \xrightarrow[n_1 \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (11)$$

Пространство $H(D)$ сепарабельно. Соотношения (4), (10) и (11) показывают, что условия теоремы 4.2 из [11] выполнены, и мы имеем, что

$$X_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (12)$$

Последнее соотношение показывает, что на $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ существует вероятностная мера P такая, что P_N при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся к P . Кроме того, ввиду (12) и хорошо известных свойств слабой сходимости имеем, что мера P не зависит от выбора подпоследовательности $\{P_{n_1}\}$. Так как семейство $\{P_n\}$ относительно компактно, отсюда получаем слабую сходимость при $n \rightarrow \infty$ мер P_n к мере P .

Те же самые аргументы могут быть применены к случайным элементам

$$\hat{X}_{N,n}(s, \omega_h) = \varphi_n(s + i\theta_N, \omega_h) \quad \text{и} \quad \hat{X}_N(s, \omega_h) = \varphi(s + i\theta_N, \omega_h).$$

Теперь, используя теорему 4 и соотношение $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} P$, получаем, что меры $\hat{P}_N$ при $N \rightarrow \infty$ слабо сходятся также к мере P . Теорема доказана.

Чтобы доказать теорему 2, остается показать, что $P = P_{\varphi_h}$. Для этого напомним теорему Биркгофа (см., например, [15]). Через $\mathbf{E}\xi$ обозначим математическое ожидание элемента ξ .

Лемма 4. Пусть T — измеримое, сохраняющее меру эргодическое преобразование пространства $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$. Тогда для всякой функции $f \in L^1(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$ и почти всех $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \hat{\omega}) = \mathbf{E}f.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть A — множество непрерывности меры P . Тогда в силу теоремы 5

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A) = P(A). \quad (13)$$

Теперь фиксируем множество A и на $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hN})$ определяем случайный элемент η формулой

$$\eta(\omega_h) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(s, \omega_h) \in A, \\ 0, & \text{если } \varphi(s, \omega_h) \notin A. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{E}\eta = \int_{\Omega_h} \eta dm_{hN} = m_{hN}(\omega_h \in \Omega_h: \varphi(s, \omega_h) \in A) = P_{\varphi_h}(A). \quad (14)$$

В силу лемм 2 и 4 для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N \eta(f_h^m(\omega_h)) = \mathbf{E}\eta. \quad (15)$$

Кроме того, определения η и f_h дают

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N \eta(f_h^m(\omega_h)) = \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A). \quad (16)$$

Соотношения (14)–(16) показывают, что для почти всех ω_h

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A) = P_{\varphi_h}(A).$$

Отсюда ввиду (13) $P(A) = P_{\varphi_h}(A)$ для всякого множества непрерывности A меры P . Так как все множества непрерывности образуют определяющий класс [11], отсюда имеем, что $P(A) = P_{\varphi_h}(A)$ для всех $A \in \mathcal{B}(H(D))$, и теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matsumoto K. Value-distribution of zeta-functions. — Lecture Notes in Math., 1990, v. 1434, p. 178–187.
2. Matsumoto K. On the magnitude of asymptotic probability measures of Dedekind zeta-functions and other Euler products. — Acta Arith., 1991, v. 60, № 2, p. 125–147.
3. Matsumoto K. Asymptotic probability measures of Euler products. — Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989). Salerno: Univ. Salerno, 1992, p. 295–313.
4. Laurinćikas A. Limit theorems for the Matsumoto zeta-function. — J. Théorie Nombres Bordeaux, 1996, v. 8, № 1, p. 143–158.
5. Лауринчикас А. О предельном распределении дзета-функции Матсумото. II. — Liet. Matem. Rink., 1996, т. 36, с. 464–485.
6. Laurinćikas A. On limit distribution of the Matsumoto zeta-function. — Acta Arith., 1997, v. 79, № 1, p. 31–39.
7. Laurinćikas A. On the Matsumoto zeta-function. — Acta Arith., 1998, v. 84, № 1, p. 1–16.
8. Качинская П. Дискретная предельная теорема для дзета-функции Матсумото на комплексной плоскости. — Liet. Matem. Rink., 2000, т. 40, № 4, с. 475–492.
9. Качинская П. Дискретная предельная теорема для дзета-функции Матсумото в пространстве аналитических функций. — Liet. Matem. Rink., 2001, т. 41, № 4, с. 441–448.
10. Качинская П. Дискретная предельная теорема для дзета-функции Матсумото в пространстве мероморфных функций. — Liet. Matem. Rink., 2002, т. 42, № 1, с. 46–67.

11. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
12. Laurinćikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Dordrecht: Kluwer, 1996, 297 p.
13. Conway J. B. Functions of One Complex Variable. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 313 p.
14. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
15. Темпельман А. А. Эргодические теоремы на группах. Вильнюс: Мокслас, 1986, 225 с.

Поступила в редакцию
9.XI.2004

© 2007 г.

СЕНАТОВ В. В.*

ОБ ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧЕБЫШЁВА¹⁾

Предложены аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита для многомерных пространств. Эти многочлены являются полилинейными функционалами, которые получаются дифференцированием по Фреше функций, связанных с плотностями нормальных законов. Показано, как с помощью этих многочленов можно строить асимптотические разложения в центральной предельной теореме в многомерном случае.

Ключевые слова и фразы: многочлены Чебышёва–Эрмита, полилинейные функционалы, асимптотические разложения, центральная предельная теорема, многомерные распределения.

Пусть $p(x)$, $-\infty < x < \infty$, — плотность распределения случайной величины X , у которой существуют все моменты, причем среднее равно нулю, а дисперсия — единице. Хорошо известно разложение

$$p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta_l}{l!} H_l(x) \varphi(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\theta_l}{l!} H_l(x) \varphi(x), \quad (1)$$

предложенное П. Л. Чебышёвым в 1859 г. (см., например, [1]). Здесь $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального закона, $H_l(x) = (-1)^l \varphi^{(l)}(x)/\varphi(x)$ — многочлены Чебышёва–Эрмита,

$$\theta_l = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) p(x) dx$$

— числа, которые мы называем моментами Чебышёва–Эрмита. При наложенных ограничениях все величины θ_l существуют и $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Приведем явные выражения для первых пяти многочленов Чебышёва–Эрмита:

$$\begin{aligned} H_0(x) &\equiv 1, & H_1(x) &= x, & H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, & H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что для многочленов Чебышёва–Эрмита справедливы равенства

$$H'_l(x) = l H_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots,$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: semenova@greatbook.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-00600, 05-01-00583).