Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бородин, Распределение функционалов от некоторых немарковских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 481–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:44:45

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 44
Выпуск 3, 1999 год
июль, август, сентябрь

© 1999 г.

БОРОДИН А. Н.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ НЕКОТОРЫХ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Рассматривается проблема вычисления функционалов от немарковского процесса специального вида. Устанавливается, что производящая функция моментов для таких функционалов является решением некоторого семейства дифференциальных задач с необычными условиями на скачок производной. Доказывается, что такое решение единственно, указывается общий вид решения и приводятся примеры вычислений распределений конкретных функционалов.

Ключевые слова и фразы: распределение функционалов, броуновское движение, броуновское локальное время.

0. В работе предлагается метод вычисления распределений функционалов от немарковских процессов специального вида. Нет оснований полагать, что можно разработать эффективный метод вычисления распределений для широкого класса немарковских процессов, поэтому рассматриваются процессы с несущественным нарушением марковского свойства. В термин «несущественное нарушение» не вкладывается какой-либо строгий смысл, это просто субъективная оценка структуры рассматриваемого процесса.

Пусть $W(s)$, $s \geq 0$, — процесс броуновского движения. Локальным временем броуновского движения W называется процесс $\ell(t, y)$, $t \in [0, \infty)$, $y \in \mathbb{R}^1$, определяемый равенством

$$\ell(t, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(W(s)) ds. \quad (0.1)$$

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; e-mail: borodin@pdmi.gas.ru

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00672.

Предел (0.1) существует с вероятностью единица (см. [1]). Локальное время $\ell(t, y)$ непрерывно по (t, y) , возрастает по t , и точки роста содержатся в множестве $\{s: W(s) = y\}$.

Для произвольных $\alpha_k, r_k \in \mathbf{R}^1, k = 1, 2, \dots, m$, положим

$$\xi(s) = W(s) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \ell(s, r_k). \quad (0.2)$$

Процесс $\xi(s), s \geq 0$, не является марковским. Нас интересует вопрос о том, как вычислять совместные распределения интегральных функционалов $\int_0^t f(\xi(s)) ds$, функционалов инфимума и супремума $\inf_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$, $\sup_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$ и локального времени процесса $\xi(s)$, т.е. величины

$$L(t, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(\xi(s)) ds. \quad (0.3)$$

Процесс $\xi(s), s \geq 0$, является семимартингалом, поэтому предел (0.3) существует с вероятностью единица (см., например, [2, гл. VI]), и по формуле Танаки

$$L(t, y) = |\xi(t) - y| - |\xi(0) - y| - \int_0^t \text{sign}(\xi(s) - y) \left(dW(s) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \ell(ds, r_k) \right).$$

С помощью обратного преобразования Лапласа вычисление распределений функционалов, зависящих от параметра t , сводится к вычислению распределений функционалов, когда вместо t берется случайный момент времени τ , который не зависит от броуновского движения W и имеет экспоненциальное распределение $P\{\tau > t\} = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$. Предположим, что $f(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная неотрицательная функция и $\gamma \geq 0$ — некоторая константа. Поскольку распределение неотрицательной случайной величины однозначно определяется ее преобразованием Лапласа, то интересующий нас вопрос будет решен, если будет указан способ вычисления величины

$$E \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds - \gamma L(\tau, y) \right); a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\}.$$

Для любой случайной величины η и события A обозначение $E\{\eta; A\}$ служит компактной записью для $E\{\eta \mathbb{I}_A\}$. Будем обозначать P_x и E_x вероятность и математическое ожидание по процессу броуновского движения $W(s), s \geq 0$, при условии $W(0) = x$.

1. В этом пункте рассматривается частный случай процесса ξ , когда вместо линейной комбинации локальных времен берется лишь одно слагаемое, т.е. рассматривается процесс $\xi(s) = W(s) + \alpha \ell(s, r), s \geq 0$. Для произвольной ограниченной функции $F(x)$ и произвольных чисел a, b положим

$$Q_\tau(x) = E_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\}.$$

Это семейство функций зависит от параметра r . Нам важно выделить именно зависимость от параметра r , хотя эта функция зависит и от других параметров. Вопрос о вычислении функции $Q_r(x)$ может быть решен с помощью следующего результата.

Теорема 1.1. Пусть $F(x)$, $f(x)$, $x \in [a, b]$, — кусочно-непрерывные функции, $F(x)$ ограничена, а $f(x)$ неотрицательна. Тогда функция $Q_r(r)$, $r \in (a, b)$, дифференцируема, и при каждом $r \in (a, b)$ функция $Q_r(x)$, $x \in [a, b]$, является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}Q_r''(x) - (\lambda + f(x))Q_r(x) = -\lambda F(x), \quad x \neq r, \quad (1.1)$$

$$Q_r'(r+0) - Q_r'(r-0) = -2\alpha \frac{d}{dr} Q_r(r), \quad (1.2)$$

$$Q_r(a+0) = 0, \quad Q_r(b-0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\lim_{r \downarrow a} Q_r(r) = 0, \quad \lim_{r \uparrow b} Q_r(r) = 0. \quad (1.4)$$

З а м е ч а н и е 1.1. В случае $a = -\infty$ или $b = \infty$ соответствующее граничное условие из (1.3) должно быть заменено условием, что функция $Q_r(x)$ ограничена при x , стремящемся к $-\infty$ или ∞ . Аналогично соответствующее граничное условие (1.4) нужно заменить условием ограниченности функции $Q_r(r)$ на $-\infty$ или ∞ .

З а м е ч а н и е 1.2. Для кусочно-непрерывных функций F, f уравнение (1.1) должно трактоваться следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций F, f , а в точках разрыва функций F, f его решение непрерывно вместе с первой производной.

Аналогичные замечания относятся и ко всем последующим результатам, и мы не будем их повторять.

З а м е ч а н и е 1.3. При $\alpha = 0$ функция $Q_r(x)$ не зависит от r и будет единственным решением уравнения (1.1) при $x \in (a, b)$, удовлетворяющим граничным условиям (1.3). Это известный результат М. Каца [3]. При $\alpha \neq 0$ наличие условия (1.2) приводит к тому, что в точке r нам нужно склеить решения уравнения (1.1), взятые на интервалах (a, r) и (r, b) соответственно. Каждое из решений уравнения (1.1), (1.3) на интервалах (a, r) и (r, b) при отсутствии граничного условия в точке r зависит от свободного коэффициента, в который входит параметр r . Условие непрерывности $Q_r(x)$ в точке r приводит лишь к одному свободному коэффициенту, общему для этих двух решений. Условие же (1.2) на скачок производной приводит к дифференциальному уравнению первого порядка для свободного коэффициента как функции от r . Решение этого уравнения будет зависеть от одной произвольной постоянной. Эта постоянная однозначно определяется из условий (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1. Предположим сначала, что $a = -\infty$ и $b = \infty$. Тогда в определении функции $Q_r(x)$ ограничения

на инфимум и супремум отсутствуют. Непосредственно из определения $Q_r(x)$ следует, что она будет равномерно ограниченной функцией, и это соответствует утверждению замечания 1.1. Воспользуемся пространственной инвариантностью процесса броуновского движения: процесс $W(s)$, $s \geq 0$, при условии $W(0) = x$ совпадает по распределению с процессом $x + W(s)$, $s \geq 0$, где $W(0) = 0$. Поэтому функцию $Q_r(x)$ можно представить в виде

$$Q_r(x) = E_0 \left\{ F(x + W(\tau) + \alpha \ell(\tau, r - x)) \times \exp \left(- \int_0^\tau f(x + W(s) + \alpha \ell(s, r - x)) ds \right) \right\}.$$

Для изучения этой функции воспользуемся теоремой 7.1 из гл. 2 монографии [4]. Согласно этой теореме, функция

$$U(x, y) = E_0 \left\{ F(x + W(\tau) + \alpha(y + \ell(\tau, r - x))) \times \exp \left(- \int_0^\tau f(x + W(s) + \alpha(y + \ell(s, r - x))) ds \right) \right\} \quad (1.5)$$

при любом $y \in \mathbf{R}^1$ непрерывна по x и удовлетворяет уравнениям:

1) при любых $x_1 < x_2$ таких, что $r \notin (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x_2, y) - \frac{\partial}{\partial x} U(x_1, y) \right) - \int_{x_1}^{x_2} (\lambda + f(x + \alpha y)) U(x, y) dx \\ & = -\lambda \int_{x_1}^{x_2} F(x + \alpha y) dx, \end{aligned} \quad (1.6)$$

2) при любых $y_1 < y_2$

$$\frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} U(r - 0, y) - \frac{\partial}{\partial x} U(r + 0, y) \right) dy = U(r, y_2) - U(r, y_1). \quad (1.7)$$

В силу кусочной непрерывности функций f и F уравнение (1.6) можно продифференцировать по x_2 , что приводит к уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) - (\lambda + f(x + \alpha y)) U(x, y) = -\lambda F(x + \alpha y), \quad x \neq r, \quad (1.8)$$

которое в точках разрыва функций f и F следует трактовать согласно замечанию 1.2. Пусть $S(x)$ — частное ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{2} Y''(x) - (\lambda + f(x)) Y(x) = -\lambda F(x), \quad (1.9)$$

а $\varphi(x)$ — убывающее и $\psi(x)$ — возрастающее неотрицательные фундаментальные решения однородного уравнения

$$\frac{1}{2}\Phi''(x) - (\lambda + f(x))\Phi(x) = 0. \quad (1.10)$$

Величина $\Delta = \psi'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)\psi(x) > 0$ является постоянной и называется Вронскианом.

Тогда непрерывное по x ограниченное решение уравнения (1.8) можно представить в следующем виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} S(x + \alpha y) + C(r, y) \frac{\psi(x + \alpha y)}{\psi(r + \alpha y)}, & x \leq r, \\ S(x + \alpha y) + C(r, y) \frac{\varphi(x + \alpha y)}{\varphi(r + \alpha y)}, & r \leq x, \end{cases} \quad (1.11)$$

где $C(r, y)$ — некоторая функция, не зависящая от x .

Из определения (1.5) следует, что функция $U(x, y)$ зависит только от переменных $r - x$ и $x + \alpha y$, поэтому $C(r, y)$ может зависеть только от суммы $r - x + x + \alpha y = r + \alpha y$, т.е. $C(r, y) = C(r + \alpha y)$.

Тогда соотношение (1.7) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{C(r + \alpha y)}{2} \left(\frac{\psi'(r + \alpha y)}{\psi(r + \alpha y)} - \frac{\varphi'(r + \alpha y)}{\varphi(r + \alpha y)} \right) dy \\ = S(r + \alpha y_2) + C(r + \alpha y_2) - S(r + \alpha y_1) - C(r + \alpha y_1). \end{aligned}$$

Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\alpha S'(r) + \alpha C'(r) = \frac{C(r)\Delta}{2\varphi(r)\psi(r)}. \quad (1.12)$$

Полагая в (1.11) $y = 0$, получим, что для функции $Q_r(x)$ справедливо представление

$$Q_r(x) = U(x, 0) = \begin{cases} S(x) + C(r) \frac{\psi(x)}{\psi(r)}, & x \leq r, \\ S(x) + C(r) \frac{\varphi(x)}{\varphi(r)}, & r \leq x. \end{cases} \quad (1.13)$$

Соотношения (1.12), (1.13) эквивалентны утверждению, что функция $Q_r(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, является ограниченным непрерывным решением задачи (1.1), (1.2). Действительно, в силу определения $S(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функция $Q_r(x)$ удовлетворяет (1.1), она ограничена и непрерывна. Из (1.12), в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned} Q'_r(r+0) - Q'_r(r-0) &= C(r) \left(\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} - \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} \right) = -\frac{C(r)\Delta}{\varphi(r)\psi(r)} \\ &= -2\alpha(S'(r) + C'(r)) = -2\alpha \frac{d}{dr} Q_r(r). \end{aligned}$$

Тем самым теорема 1.1 для случая $a = -\infty$, $b = \infty$ доказана.

Теперь, опираясь на уже полученный результат, докажем теорему 1.1 для $a \neq -\infty$, $b \neq \infty$. Функции $F(x)$ и $f(x)$ можно продолжить на всю прямую $(-\infty, \infty)$, определив их при $x \leq a$ или $x \geq b$ равными нулю. Положим

$$Q_\tau^\gamma(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau (f(\xi(s)) + \gamma \mathbb{I}_{\mathbf{R}^1 \setminus (a,b)}(\xi(s))) ds \right) \right\}. \quad (1.14)$$

Тогда выполняется следующее почти очевидное соотношение: для всех $x \in (a, b)$

$$Q_\tau(x) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} Q_\tau^\gamma(x). \quad (1.15)$$

Объяснение аналогичному факту можно найти при доказательстве теоремы 2.2 гл. 2 в [4]. В силу определения (1.14) при $x < a$ и $x > b$ имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} Q_\tau^\gamma(x) = 0. \quad (1.16)$$

Это является следствием того, что значение интеграла под знаком экспоненты в (1.14) стремится к бесконечности при $\gamma \rightarrow \infty$. Соотношение (1.16) верно и при $x = a$ и $x = b$, поскольку процесс $\xi(s)$, начинаясь в исходный момент времени на границе интервала $[a, b]$, с вероятностью единица проводит ненулевое время вне интервала $[a, b]$ до момента τ . Указанный факт справедлив ввиду того, что он верен для броуновского движения $W(s)$, а локальное время $\ell(s, r)$ при $r \in (a, b)$ будет до некоторого момента равным нулю. Таким образом,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} Q_\tau^\gamma(a) = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} Q_\tau^\gamma(b) = 0. \quad (1.17)$$

Воспользуемся теоремой 1.1 для случая $a = -\infty$, $b = \infty$ и функции $f_\gamma(x) = f(x) + \gamma \mathbb{I}_{\mathbf{R}^1 \setminus (a,b)}(x)$ вместо $f(x)$. Согласно этому результату, функция $Q_\tau^\gamma(x)$ является непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2} (Q_\tau^\gamma(x))'' - (\lambda + f(x) + \gamma \mathbb{I}_{\mathbf{R}^1 \setminus (a,b)}(x)) Q_\tau^\gamma(x) = -\lambda F(x), \quad x \neq \tau, \quad (1.18)$$

$$(Q_\tau^\gamma(r+0))' - (Q_\tau^\gamma(r-0))' = -2\alpha \frac{d}{dr} Q_\tau^\gamma(r). \quad (1.19)$$

Положим

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \varphi(x) \psi(y) - \varphi(y) \psi(x), \\ \rho'_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y), \quad \rho'_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y). \end{aligned}$$

При $x \in [a, b]$ общее непрерывное в точке r решение уравнения (1.18) можно представить в виде

$$Q_r^\gamma(x) = \begin{cases} S(x) + A_\gamma(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(a, b)} + B_\gamma(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, b)} \\ \quad + C_\gamma(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ S(x) + A_\gamma(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(a, b)} + B_\gamma(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, b)} \\ \quad + C_\gamma(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(r, b)}, & r \leq x \leq b. \end{cases} \quad (1.20)$$

Поскольку (1.15) справедливо для всех x из (a, b) , то существуют пределы $A(r) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} A_\gamma(r)$, $B(r) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} B_\gamma(r)$, $C(r) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_\gamma(r)$. Более того, в точках a и b в силу выбранного нами представления (1.20)

$$Q_r^\gamma(a) = S(a) + A_\gamma(r), \quad Q_r^\gamma(b) = S(b) + B_\gamma(r),$$

и, следовательно, согласно (1.17), $A(r) = -S(a)$, $B(r) = -S(b)$. С учетом представления (1.20), соотношение (1.19) примет вид

$$C_\gamma(r) \left(\frac{\rho'_1(r, b)}{\rho(r, b)} - \frac{\rho'_2(a, r)}{\rho(a, r)} \right) = -2\alpha \left[S'(r) + \left((Q_r^\gamma(a) - S(a)) \frac{\rho(r, b)}{\rho(a, b)} + (Q_r^\gamma(b) - S(b)) \frac{\rho(a, r)}{\rho(a, b)} + C_\gamma(r) \right)' \right]. \quad (1.21)$$

Из (1.14) следует равномерная ограниченность функций $Q_r^\gamma(x)$. Тогда из представления (1.20) несложно вывести равномерную ограниченность функций $C_\gamma(r)$, $r \in (a, b)$. Поэтому в (1.21) можно перейти к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$, что приводит к соотношению

$$C(r) \left(\frac{\rho'_1(r, b)}{\rho(r, b)} - \frac{\rho'_2(a, r)}{\rho(a, r)} \right) = -2\alpha \left[S'(r) - S(a) \frac{\rho'_1(r, b)}{\rho(a, b)} - S(b) \frac{\rho'_2(a, r)}{\rho(a, b)} + C'(r) \right]. \quad (1.22)$$

Переход к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$ в (1.20) дает следующее представление:

$$Q_r(x) = \begin{cases} S_{a,b}(x) + C(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ S_{a,b}(x) + C(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.23)$$

где

$$S_{a,b}(x) = S(x) - S(a) \frac{\rho(x, b)}{\rho(a, b)} - S(b) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, b)}. \quad (1.24)$$

Полученные соотношения (1.22), (1.23) эквивалентны утверждению, что функция $Q_r(x)$, $x \in (a, b)$, является непрерывным решением задачи (1.1)–(1.3).

Отметим также, что справедливо равенство

$$S_{a,b}(x) = E_x \left\{ F(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(W(s)) ds \right); \right. \\ \left. a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} W(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} W(s) < b \right\}.$$

Это следует из того, что, согласно результату М. Каца [3], правая часть этого равенства является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2} S''(x) - (\lambda + f(x)) S(x) = -\lambda F(x), \quad x \in (a, b), \\ S(a+0) = 0, \quad S(b-0) = 0,$$

а функция $S_{a,b}(x)$, определенная формулой (1.24), тоже является решением этой задачи.

При $\alpha > 0$ общее решение дифференциального уравнения (1.22) можно представить в виде

$$C(r) = -S_{a,b}(r) + \frac{\Delta \rho(a, b)}{2\alpha} \left(\frac{\rho(a, r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \\ \times \left[c_1 + \int_r^b S_{a,b}(v) \frac{(\rho(v, b))^{1/2\alpha-1}}{(\rho(a, v))^{1/2\alpha+1}} dv \right], \quad (1.25)$$

где c_1 — произвольная постоянная. Заметим, что интеграл в правой части (1.25) при $\alpha > 0$ конечен. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся равенством

$$\frac{\Delta \rho(a, b)}{\rho(a, v) \rho(v, b)} = \frac{\rho'_2(a, v)}{\rho(a, v)} - \frac{\rho'_1(v, b)}{\rho(v, b)} = \left(\ln \left(\frac{\rho(a, v)}{\rho(v, b)} \right) \right)'. \quad (1.26)$$

Тогда

$$\frac{\Delta \rho(a, b)}{2\alpha} \int_r^b \frac{(\rho(v, b))^{1/2\alpha-1}}{(\rho(a, v))^{1/2\alpha+1}} dv \\ = \frac{1}{2\alpha} \int_r^b \exp \left(-\frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{\rho(a, v)}{\rho(v, b)} \right) \right) d \ln \left(\frac{\rho(a, v)}{\rho(v, b)} \right) = \left(\frac{\rho(r, b)}{\rho(a, r)} \right)^{1/2\alpha}. \quad (1.27)$$

Поскольку функция $S_{a,b}(v)$ ограничена, то интеграл в правой части (1.25) оценивается вышеприведенным интегралом. Функция $Q_r(x)$, в силу определения, ограничена той же константой, что и функция $F(x)$. Тогда из представления (1.23) следует, что функция $C(r)$ тоже является ограниченной. Учитывая это и очевидное соотношение $\rho(r, b) \sim \Delta(b-r)$

при $r \rightarrow b$, из (1.25) получаем, что $c_1 = 0$. Поэтому при $\alpha > 0$

$$C(r) = -S_{a,b}(r) + \frac{\Delta\rho(a,b)}{2\alpha} \left(\frac{\rho(a,r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \times \int_r^b S_{a,b}(v) \frac{(\rho(v,b))^{1/2\alpha-1}}{(\rho(a,v))^{1/2\alpha+1}} dv. \quad (1.28)$$

Аналогично при $\alpha < 0$

$$C(r) = -S_{a,b}(r) - \frac{\Delta\rho(a,b)}{2\alpha} \left(\frac{\rho(a,r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \times \int_a^r S_{a,b}(v) \frac{(\rho(v,b))^{1/2\alpha-1}}{(\rho(a,v))^{1/2\alpha+1}} dv. \quad (1.29)$$

Используя теорему о среднем, непрерывность функции $S_{a,b}(v)$ и принимая во внимание (1.27), из (1.28) получаем, что $\lim_{r \uparrow b} C(r) = 0$. Из (1.29) аналогично следует, что $\lim_{r \downarrow a} C(r) = 0$. Кроме того, из (1.24) имеем $\lim_{r \downarrow a} S_{a,b}(r) = \lim_{r \uparrow b} S_{a,b}(r) = 0$. Подставляя теперь эти предельные значения в (1.23), получаем граничные условия (1.4).

Выражениям (1.28), (1.29) можно придать более компактный вид, если воспользоваться равенством (1.26) и формулой интегрирования по частям. При $\alpha > 0$

$$C(r) = \left(\frac{\rho(a,r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b S'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho(v,b)}{\rho(a,v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (1.30)$$

а при $\alpha < 0$

$$C(r) = - \left(\frac{\rho(a,r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \int_a^r S'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho(v,b)}{\rho(a,v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (1.31)$$

Тем самым, мы убедились, что решение задачи (1.1)–(1.4) единственно. Более того, формулы (1.23), (1.30), (1.31) дают явное выражение для решения этой задачи в терминах $S(x)$ — частного ограниченного решения уравнения (1.9), и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — фундаментальных решений соответствующего однородного уравнения (1.10).

З а м е ч а н и е 1.4. При $a = -\infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) \leq b \right\} \\ &= \begin{cases} S_b(x) + C(r) \frac{\psi(x)}{\psi(r)}, & -\infty \leq x \leq r, \\ S_b(x) + C(r) \frac{\rho(x,b)}{\rho(r,b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$S_b(x) = S(x) - S(b) \frac{\psi(x)}{\psi(b)}. \quad (1.33)$$

При $\alpha > 0$

$$C(r) = \left(\frac{\psi(r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b S'_b(v) \left(\frac{\rho(v, b)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (1.34)$$

а при $\alpha < 0$

$$C(r) = - \left(\frac{\psi(r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r S'_b(v) \left(\frac{\rho(v, b)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (1.35)$$

З а м е ч а н и е 1.5. При $a = -\infty$, $b = \infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right) \right\} \\ &= \begin{cases} S(x) + C(r) \frac{\psi(x)}{\psi(r)}, & x \leq r, \\ S(x) + C(r) \frac{\varphi(x)}{\varphi(r)}, & r \leq x. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.36)$$

При $\alpha > 0$

$$C(r) = \left(\frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^\infty S'(v) \left(\frac{\varphi(v)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (1.37)$$

а при $\alpha < 0$

$$C(r) = - \left(\frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r S'(v) \left(\frac{\varphi(v)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (1.38)$$

В конечности интегралов (1.34), (1.35), (1.37), (1.38) можно убедиться следующим образом. Нужно воспользоваться формулой интегрирования по частям и прийти к виду, аналогичному (1.28), (1.29). Поскольку функции $S_b(v)$ и $S(v)$ являются ограниченными, а без них интегралы явно вычисляются (см. (1.27)), то это влечет требуемое утверждение.

2. Перейдем к рассмотрению общего случая, когда процесс $\xi(s)$ определяется соотношением (0.2). В этом случае семейство функций

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); \right. \\ \left. a \leq \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) \leq b \right\} \end{aligned}$$

зависит от векторного параметра $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$. Можно считать, что $r_1 < r_2 < \dots < r_n$. Вопрос о вычислении функции $Q_{\mathbf{r}}(x)$ может быть решен с помощью следующего результата.

Теорема 2.1. Пусть $F(x), f(x), x \in [a, b]$, — кусочно-непрерывные функции, $F(x)$ ограничена, а $f(x)$ неотрицательна. Тогда при любом $k = 1, 2, \dots, m$ функция $Q_{r_y}(r_k + y)$ дифференцируема по y в окрестности нуля, и при каждом $r \in (a, b)^m$ функция $Q_r(x), x \in [a, b]$, является непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}Q_r''(x) - (\lambda + f(x))Q_r(x) = -\lambda F(x), \quad x \neq r_1, r_2, \dots, r_m, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} &Q_r'(r_k + 0) - Q_r'(r_k - 0) \\ &= -2\alpha_k \frac{d}{dy} Q_{r_y}(r_k + y) \Big|_{y=0}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Q_r(a + 0) = 0, \quad Q_r(b - 0) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$r_y = (r_1 + y, r_2 + y, \dots, r_m + y).$$

Доказательство. Структура данного доказательства в значительной мере совпадает со структурой доказательства теоремы 1.1. Предположим сначала, как и при доказательстве теоремы 1.1, что $a = -\infty, b = \infty$. Положим

$$\begin{aligned} U(x, y) = E_0 \Bigg\{ &F\left(x + W(\tau) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(y_k + \ell(\tau, r_k - x))\right) \\ &\times \exp\left(-\int_0^\tau f\left(x + W(s) + \sum_{k=1}^m \alpha_k(y_k + \ell(s, r_k - x))\right) ds\right) \Bigg\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу теоремы 7.1 гл. 2 из [4] функция $U(x, y)$ при любом $y \in \mathbf{R}^k$ непрерывна по x и удовлетворяет уравнениям:

1) при любых $x_1 < x_2$ таких, что $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^1 \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x_2, y) - \frac{\partial}{\partial x} U(x_1, y) \right) - \int_{x_1}^{x_2} \left(\lambda + f\left(x + \sum_{k=1}^m \alpha_k y_k\right) \right) U(x, y) dx \\ &= -\lambda \int_{x_1}^{x_2} F\left(x + \sum_{k=1}^m \alpha_k y_k\right) dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

2) при любых $\alpha < \beta$ и любом $k = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x} U(r_k - 0, y) - \frac{\partial}{\partial x} U(r_k + 0, y) \right) dy_k \\ &= U(r_k, y) \Big|_{y_k=\beta} - U(r_k, y) \Big|_{y_k=\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку функция $U(x, y)$ зависит от y только через переменную $y = \sum_{k=1}^m \alpha_k y_k$, то, делая замену переменных и принимая во внимание

кусочную непрерывность функций f и F , вместо (2.5) можно написать уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) - (\lambda + f(x + y)) U(x, y) \\ = -\lambda F(x + y), \quad x \neq r_1, r_2, \dots, r_m. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Непрерывное ограниченное решение уравнения (2.7) можно представить в виде

$$U(x, y) = \begin{cases} S(x + y) + C_1(r_y) \frac{\psi(x + y)}{\psi(r_1 + y)}, & x \leq r_1, \\ \dots \dots \dots \\ S(x + y) + C_{k+1}(r_y) \frac{\rho(r_k + y, x + y)}{\rho(r_k + y, r_{k+1} + y)} \\ \quad + C_k(r_y) \frac{\rho(x + y, r_{k+1} + y)}{\rho(r_k + y, r_{k+1} + y)}, & r_k \leq x \leq r_{k+1}, \\ \dots \dots \dots \\ S(x + y) + C_m(r_y) \frac{\varphi(x + y)}{\varphi(r_m + y)}, & r_m \leq x. \end{cases}$$

Здесь мы учли тот факт, что функция $U(x, y)$ зависит только от переменных $r_k - x$ и $x + y$. Поэтому неизвестные коэффициенты $C_k, k = 1, \dots, m$, могут зависеть лишь от переменных $r_k + y$, т.е. от r_y . Соотношение (2.6) переходит в следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_k, k = 1, 2, \dots, m$, как функций переменной y :

$$\begin{aligned} C_{k+1}(r_y) \frac{\rho'_2(r_k + y, r_k + y)}{\rho(r_k + y, r_{k+1} + y)} + C_k(r_y) \frac{\rho'_1(r_k + y, r_{k+1} + y)}{\rho(r_k + y, r_{k+1} + y)} \\ - C_k(r_y) \frac{\rho'_2(r_{k-1} + y, r_k + y)}{\rho(r_{k-1} + y, r_k + y)} - C_{k-1}(r_y) \frac{\rho'_1(r_k + y, r_k + y)}{\rho(r_{k-1} + y, r_k + y)} \\ = -2\alpha_k \left(S'(r_k + y) + \frac{d}{dy} C_k(r_y) \right), \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где полагаем

$$C_0(r_y) = 0, \quad C_{m+1}(r_y) = 0,$$

и

$$\frac{\rho'_2(r_0 + y, r_1 + y)}{\rho(r_0 + y, r_1 + y)} = \frac{\psi'(r_1 + y)}{\psi(r_1 + y)}, \quad \frac{\rho'_1(r_m + y, r_{m+1} + y)}{\rho(r_m + y, r_{m+1} + y)} = \frac{\varphi'(r_m + y)}{\varphi(r_m + y)}.$$

В силу (1.15) существуют пределы

$$A(\mathbf{r}) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} A_\gamma(\mathbf{r}), \quad B(\mathbf{r}) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} B_\gamma(\mathbf{r}), \quad C_k(\mathbf{r}) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_k^\gamma(\mathbf{r}),$$

при этом $A(\mathbf{r}) = -S(a)$, $B(\mathbf{r}) = -S(b)$, поскольку выполняется (1.17). Ввиду представления (2.12) условия (2.11) на скачок производной выражаются через коэффициенты $C_k^\gamma(\mathbf{r})$ равенствами, совпадающими с (2.8), если в них S, C_k заменить на S_γ, C_k^γ и положить $y = 0$. В этих равенствах можно перейти к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$, что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} & C_{k+1}(\mathbf{r}) \frac{\rho'_2(r_k, r_{k+1})}{\rho(r_k, r_{k+1})} \\ & + C_k(\mathbf{r}) \left(\frac{\rho'_1(r_k, r_{k+1})}{\rho(r_k, r_{k+1})} - \frac{\rho'_2(r_{k-1}, r_k)}{\rho(r_{k-1}, r_k)} \right) - C_{k-1}(\mathbf{r}) \frac{\rho'_1(r_{k-1}, r_k)}{\rho(r_{k-1}, r_k)} \\ & = -2\alpha_k \left(S'(r_k) + \frac{d}{dy} C_k(\mathbf{r}_y) \Big|_{y=0} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где полагаем $C_0(\mathbf{r}) = 0$, $C_{m+1}(\mathbf{r}) = 0$, $r_0 = a$, $r_{m+1} = b$. Переход к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$ в (2.12) дает следующее представление:

$$Q_{\mathbf{r}}(x) = \begin{cases} S_{a,b}(x) + C_1(\mathbf{r}) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, r_1)}, & a \leq x \leq r_1, \\ \dots \dots \dots \\ S_{a,b}(x) + C_{k+1}(\mathbf{r}) \frac{\rho(r_k, x)}{\rho(r_k, r_{k+1})} \\ \quad + C_k(\mathbf{r}) \frac{\rho(x, r_{k+1})}{\rho(r_k, r_{k+1})}, & r_k \leq x \leq r_{k+1}, \\ \dots \dots \dots \\ S_{a,b}(x) + C_m(\mathbf{r}) \frac{\rho(x, b)}{\rho(r_m, b)}, & r_m \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.14)$$

В силу соотношений (2.13), (2.14) функция $Q_{\mathbf{r}}(x)$ при $x \in (a, b)$ является непрерывным решением задачи (2.1)–(2.3).

3. Рассмотрим задачу о вычислении распределений функционалов от процесса при условии, что конец траектории процесса фиксирован. Результат этого пункта (теорема 3.1) позволяет решать такую задачу для процесса $\xi(s) = W(s) + \alpha \ell(s, r)$.

Положим

$$\begin{aligned} G_{z,r}(x) = \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \right. \\ \left. \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b, \xi(\tau) < z \right\}. \end{aligned}$$

Существование производной по z будет гарантироваться наличием предела у последовательности функций

$$Q_r^\varepsilon(x) = E_x \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[z, z+\varepsilon)}(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); \right. \\ \left. a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\},$$

т.е. $G_{z,r}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q_r^\varepsilon(x)$. Существование же самого предела будет установлено в ходе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$, — кусочно-непрерывная неотрицательная функция. Тогда функция $G_{z,r}(r)$, $r \in (a, b)$, непрерывна, дифференцируема при $r \neq z$, и при любых r и z из (a, b) функция $G_{z,r}(x)$, $x \in (a, b)$, является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2} G_{z,r}''(x) - (\lambda + f(x)) G_{z,r}(x) = 0, \quad x \neq z, r, \quad (3.1)$$

$$G'_{z,r}(z+0) - G'_{z,r}(z-0) = -2\lambda, \quad (3.2)$$

$$G'_{z,r}(r+0) - G'_{z,r}(r-0) = -2\alpha \frac{d}{dr} G_{z,r}(r), \quad r \neq z, \quad (3.3)$$

$$G_{z,r}(a+0) = 0, \quad G_{z,r}(b-0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\lim_{r \downarrow a} G_{z,r}(r) = 0, \quad \lim_{r \uparrow b} G_{z,r}(r) = 0. \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Функция $G_{z,r}(x)$ является функцией Грина задачи (1.1)–(1.4), поскольку из определения функций $Q_r(x)$ и $G_{z,r}(x)$ следует, что $Q_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z) G_{z,r}(x) dz$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. Пусть a и b конечны. Для функции $Q_r^\varepsilon(x)$ справедливы представления (1.23), (1.30), (1.31). Таким образом,

$$Q_r^\varepsilon(x) = \begin{cases} S_{a,b}^\varepsilon(x) + C_\varepsilon(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ S_{a,b}^\varepsilon(x) + C_\varepsilon(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.6)$$

где

$$S_{a,b}^\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x) - S_\varepsilon(a) \frac{\rho(x, b)}{\rho(a, b)} - S_\varepsilon(b) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, b)},$$

а функция $S_\varepsilon(x)$ является единственным непрерывным ограниченным на всей прямой решением уравнения

$$\frac{1}{2} S_\varepsilon''(x) - (\lambda + f(x)) S_\varepsilon(x) = -\lambda \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[z, z+\varepsilon)}(x).$$

При $\alpha > 0$, согласно (1.30),

$$C_\varepsilon(r) = \left(\frac{\rho(a, r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b (S_{a,b}^\varepsilon(v))' \left(\frac{\rho(v, b)}{\rho(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (3.7)$$

При $\alpha < 0$ в силу (1.31)

$$C_\varepsilon(r) = - \left(\frac{\rho(a, r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_a^r (S_{a,b}^\varepsilon(v))' \left(\frac{\rho(v, b)}{\rho(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (3.8)$$

Согласно результату Фейнмана-Каца для броуновского движения (см., например, теорему 2.2 гл. 2 из [4]), функция $S_\varepsilon(x)$ имеет следующее вероятностное представление:

$$S_\varepsilon(x) = \mathbf{E}_x \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[z, z+\varepsilon)}(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(W(s)) ds \right) \right\},$$

Поскольку случайная величина $W(\tau)$ имеет плотность распределения, то функция $S_\varepsilon(x)$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к функции

$$G_z(x) = \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(W(s)) ds \right); W(\tau) < z \right\}.$$

Из доказательства теорем 2.2, 2.3 гл. 2 из [4] можно извлечь, что производная $S'_\varepsilon(x)$ равномерно ограничена, и $S'_\varepsilon(x) \rightarrow G'_z(x)$ равномерно на любом компакте, не содержащем точку z . Следовательно,

$$S_{a,b}^\varepsilon(x) \rightarrow V_{a,b}(x),$$

где $V_{a,b}(x) = G_z(x) - G_z(a) \rho(x, b) / \rho(a, b) - G_z(b) \rho(a, x) / \rho(a, b)$, и

$$(S_{a,b}^\varepsilon(x))' \rightarrow V'_{a,b}(x)$$

равномерно по x на любом подынтервале (a, b) , не содержащем точку z . Поэтому в соотношениях (3.6)–(3.8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, что приводит к соотношениям

$$G_{z,r}(x) = \begin{cases} V_{a,b}(x) + C_z(r) \frac{\rho(a, x)}{\rho(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ V_{a,b}(x) + C_z(r) \frac{\rho(x, b)}{\rho(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.9)$$

где при $\alpha > 0$

$$C_z(r) = \left(\frac{\rho(a, r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b V'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho(v, b)}{\rho(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (3.10)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_z(r) = - \left(\frac{\rho(a, r)}{\rho(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_a^r V'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho(v, b)}{\rho(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (3.11)$$

Поскольку (см., например, доказательство теоремы 2.3 гл. 2 из [4])

$$G_z(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\Delta} \varphi(z)\psi(x), & x \leq z, \\ \frac{2\lambda}{\Delta} \varphi(x)\psi(z), & z \leq x, \end{cases} \quad (3.12)$$

то

$$V_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda\rho(a,x)\rho(z,b)}{\Delta\rho(a,b)}, & a \leq x \leq z, \\ \frac{2\lambda\rho(a,z)\rho(x,b)}{\Delta\rho(a,b)}, & z \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.13)$$

Вероятностное выражение для функции $V_{a,b}(x)$ следующее:

$$V_{a,b}(x) = \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(W(s)) ds \right); a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} W(s), \right. \\ \left. \sup_{0 \leq s \leq \tau} W(s) < b, W(\tau) < z \right\}.$$

Формулы (3.9)–(3.13) дают явное решение задачи (3.1)–(3.5) в терминах фундаментальных решений $\varphi(x)$, $\psi(x)$ уравнения (1.10).

З а м е ч а н и е 3.2. При $a = -\infty$ справедливо представление

$$\frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b, \xi(\tau) < z \right\} \\ = \begin{cases} V_b(x) + C_z(r) \frac{\psi(x)}{\psi(r)}, & -\infty < x \leq r, \\ V_b(x) + C_z(r) \frac{\rho(x,b)}{\rho(r,b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.14)$$

где

$$V_b(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda\psi(x)\rho(z,b)}{\Delta\psi(b)}, & -\infty < x \leq z, \\ \frac{2\lambda\psi(z)\rho(x,b)}{\Delta\psi(b)}, & z \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.15)$$

При $\alpha > 0$

$$C_z(r) = \left(\frac{\psi(r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b V'_b(v) \left(\frac{\rho(v,b)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (3.16)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_z(r) = - \left(\frac{\psi(r)}{\rho(r,b)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r V'_b(v) \left(\frac{\rho(v,b)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (3.17)$$

З а м е ч а н и е 3.3. При $a = -\infty$, $b = \infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds \right); \xi(\tau) < z \right\} \\ = \begin{cases} G_z(x) + C_z(r) \frac{\psi(x)}{\psi(r)}, & x \leq r, \\ G_z(x) + C_z(r) \frac{\varphi(x)}{\varphi(r)}, & r \leq x. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

При $\alpha > 0$

$$C_z(r) = \left(\frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^\infty G'_z(v) \left(\frac{\varphi(v)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (3.19)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_z(r) = - \left(\frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r G'_z(v) \left(\frac{\varphi(v)}{\psi(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (3.20)$$

4. В дополнение к интегральным функционалам от процесса $\xi(s) = W(s) + \alpha \ell(s, r)$ и функционалам инфимума и супремума рассмотрим локальное время $L(t, y)$ процесса ξ . Пусть, как и ранее, τ — экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ момент времени, не зависящий от броуновского движения W . Положим

$$\begin{aligned} Q_\tau^\varepsilon(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau (f(\xi(s)) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(\xi(s))) ds \right); \right. \\ \left. a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\}. \end{aligned}$$

При доказательстве теоремы 4.1 будет установлено, что существует предел

$$D_\tau(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q_\tau^\varepsilon(x).$$

Отсюда, в частности, в силу произвольности параметров γ и λ следует существование предела (0.3) в смысле сходимости по распределению. Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned} D_\tau(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(\xi(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds - \gamma L(\tau, y) \right); \right. \\ \left. a < \inf_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$, — кусочно-непрерывная неотрицательная функция. Тогда функция $D_\tau(r)$, $r \in (a, b)$, непрерывна.

дифференцируема при $r \neq y$, и при любых r и y из (a, b) функция $D_r(x)$, $x \in (a, b)$, является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2} D_r''(x) - (\lambda + f(x)) D_r(x) = -\lambda F(x), \quad x \neq y, r, \quad (4.1)$$

$$D_r'(y+0) - D_r'(y-0) = 2\gamma D_r(y), \quad (4.2)$$

$$D_r'(r+0) - D_r'(r-0) = -2\alpha \frac{d}{dr} D_r(r), \quad r \neq y, \quad (4.3)$$

$$D_r(a+0) = 0, \quad D_r(b-0) = 0, \quad (4.4)$$

$$\lim_{r \downarrow a} D_r(r) = 0, \quad \lim_{r \uparrow b} D_r(r) = 0. \quad (4.5)$$

Доказательство. Предположим сначала, что a и b конечны. Воспользуемся теоремой 1.1. Пусть $\varphi_\varepsilon(x)$ — убывающее и $\psi_\varepsilon(x)$ — возрастающее неотрицательные фундаментальные решения однородного уравнения

$$\frac{1}{2} \Phi_\varepsilon''(x) - (\lambda + f(x) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(x)) \Phi_\varepsilon(x) = 0.$$

Тогда нетрудно установить (см. доказательство аналогичного утверждения в теореме 2.2 гл. 2 из [4]), что при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi_0(x), \quad \psi_\varepsilon(x) \rightarrow \psi_0(x). \quad (4.6)$$

При этом $\varphi_0(x)$ — убывающее и $\psi_0(x)$ — возрастающее неотрицательные фундаментальные решения задачи

$$\frac{1}{2} \Phi_0''(x) - (\lambda + f(x)) \Phi_0(x) = 0, \quad x \neq y, \quad (4.7)$$

$$\Phi_0'(y+0) - \Phi_0'(y-0) = 2\gamma \Phi_0(y). \quad (4.8)$$

Легко убедиться, что

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} + \frac{2\gamma}{\Delta} \rho(x, y), & x \leq y, \\ \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}, & y \leq x, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{\psi(y)}, & x \leq y, \\ \frac{\psi(x)}{\psi(y)} + \frac{2\gamma}{\Delta} \rho(y, x), & y \leq x. \end{cases} \quad (4.10)$$

Положим $\rho_0(x, z) = \varphi_0(x) \psi_0(z) - \varphi_0(z) \psi_0(x)$. Для функции $Q_r^\varepsilon(x)$ справедливы представления (1.23), (1.30), (1.31), в которых вместо функции

$f(x)$ нужно взять функцию $f(x) + (\gamma/\varepsilon) \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(x)$. Таким образом,

$$Q_r^\varepsilon(x) = \begin{cases} S_{a,b}^\varepsilon(x) + C_\varepsilon(r) \frac{\rho_\varepsilon(a, x)}{\rho_\varepsilon(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ S_{a,b}^\varepsilon(x) + C_\varepsilon(r) \frac{\rho_\varepsilon(x, b)}{\rho_\varepsilon(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (4.11)$$

где $\rho_\varepsilon(x, z) = \varphi_\varepsilon(x) \psi_\varepsilon(z) - \varphi_\varepsilon(z) \psi_\varepsilon(x)$,

$$S_{a,b}^\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x) - S_\varepsilon(a) \frac{\rho_\varepsilon(x, b)}{\rho_\varepsilon(a, b)} - S_\varepsilon(b) \frac{\rho_\varepsilon(a, x)}{\rho_\varepsilon(a, b)}, \quad (4.12)$$

а функция $S_\varepsilon(x)$ является единственным непрерывным ограниченным на всей прямой решением уравнения

$$\frac{1}{2} S_\varepsilon''(x) - \left(\lambda + f(x) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(x) \right) S_\varepsilon(x) = -\lambda F(x).$$

При $\alpha > 0$ в силу (1.30)

$$C_\varepsilon(r) = \left(\frac{\rho_\varepsilon(a, r)}{\rho_\varepsilon(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b (S_{a,b}^\varepsilon(v))' \left(\frac{\rho_\varepsilon(v, b)}{\rho_\varepsilon(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (4.13)$$

При $\alpha < 0$, согласно (1.31),

$$C_\varepsilon(r) = - \left(\frac{\rho_\varepsilon(a, r)}{\rho_\varepsilon(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_a^r (S_{a,b}^\varepsilon(v))' \left(\frac{\rho_\varepsilon(v, b)}{\rho_\varepsilon(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (4.14)$$

Согласно результату Фейнмана–Каца для броуновского движения (см. теорему 2.2 гл. 2 из [4]), функция $S_\varepsilon(x)$ имеет следующее вероятностное представление:

$$S_\varepsilon(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau \left(f(W(s)) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[y, y+\varepsilon)}(W(s)) \right) ds \right) \right\}.$$

Пусть

$$S_0(x) = \mathbf{E}_x \left\{ F(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(W(s)) ds - \gamma \ell(\tau, y) \right) \right\}.$$

При доказательстве теоремы 2.2 гл. 2 из [4] устанавливается, что $S_\varepsilon(x) \rightarrow S_0(x)$ равномерно по x из любого конечного интервала и что производная $S'_\varepsilon(x)$ равномерно ограничена на любом конечном интервале и $S'_\varepsilon(x) \rightarrow S'_0(x)$ равномерно по x из любого конечного интервала, не содержащего точку y . Кроме того, согласно теореме 2.2 гл. 2 из [4], функция $S_0(x)$ является единственным непрерывным ограниченным решением следующей задачи:

$$-\frac{1}{2} S_0(x)'' - (\lambda + f(x)) S_0(x) = -\lambda F(x), \quad x \neq y, \quad (4.15)$$

$$S'_0(y+0) - S'_0(y-0) = 2\gamma S_0(y). \quad (4.16)$$

Принимая во внимание (4.6), можно в соотношениях (4.11)–(4.14) перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, что приводит к соотношениям

$$D_\tau(x) = \begin{cases} M_{a,b}(x) + C_0(r) \frac{\rho_0(a, x)}{\rho_0(a, r)}, & a \leq x \leq r, \\ M_{a,b}(x) + C_0(r) \frac{\rho_0(x, b)}{\rho_0(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \quad (4.17)$$

где

$$M_{a,b}(x) = S_0(x) - S_0(a) \frac{\rho_0(x, b)}{\rho_0(a, b)} - S_0(b) \frac{\rho_0(a, x)}{\rho_0(a, b)}, \quad (4.18)$$

и при $\alpha > 0$

$$C_0(r) = \left(\frac{\rho_0(a, r)}{\rho_0(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b M'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho_0(v, b)}{\rho_0(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (4.19)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_0(r) = - \left(\frac{\rho_0(a, r)}{\rho_0(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_a^r M'_{a,b}(v) \left(\frac{\rho_0(v, b)}{\rho_0(a, v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (4.20)$$

Формулы (4.17)–(4.20) дают явное решение задачи (4.1)–(4.5) в терминах ограниченного решения $S_0(x)$ задачи (4.15), (4.16) и фундаментальных решений $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ задачи (4.7), (4.8).

З а м е ч а н и е 4.1. При $a = -\infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left\{ F(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds - \gamma L(\tau, y) \right); \sup_{0 \leq s \leq \tau} \xi(s) < b \right\} \\ &= \begin{cases} M_b(x) + C_0(r) \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(r)}, & -\infty < x \leq r, \\ M_b(x) + C_0(r) \frac{\rho_0(x, b)}{\rho_0(r, b)}, & r \leq x \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$M_b(x) = S_0(x) - S_0(b) \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(b)}. \quad (4.22)$$

При $\alpha > 0$

$$C_0(r) = \left(\frac{\psi_0(r)}{\rho_0(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^b M'_b(v) \left(\frac{\rho_0(v, b)}{\psi_0(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (4.23)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_0(r) = - \left(\frac{\psi_0(r)}{\rho_0(r, b)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r M'_b(v) \left(\frac{\rho_0(v, b)}{\psi_0(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (4.24)$$

З а м е ч а н и е 4.2. При $a = -\infty$, $b = \infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x \left\{ F(W(\tau)) \exp \left(- \int_0^\tau f(\xi(s)) ds - \gamma L(\tau, y) \right) \right\} \\ &= \begin{cases} S_0(x) + C_0(r) \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(r)}, & x \leq r, \\ S_0(x) + C_0(r) \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(r)}, & r \leq x. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25)$$

При $\alpha > 0$

$$C_0(r) = \left(\frac{\psi_0(r)}{\varphi_0(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_r^\infty S'_0(v) \left(\frac{\varphi_0(v)}{\psi_0(v)} \right)^{1/2\alpha} dv, \quad (4.26)$$

а при $\alpha < 0$

$$C_0(r) = - \left(\frac{\psi_0(r)}{\varphi_0(r)} \right)^{1/2\alpha} \int_{-\infty}^r S'_0(v) \left(\frac{\varphi_0(v)}{\psi_0(v)} \right)^{1/2\alpha} dv. \quad (4.27)$$

5. Этот пункт посвящен примерам применения теорем 1.1, 3.1 и 4.1 для вычисления распределений некоторых функционалов.

П р и м е р 5.1. Вычислим вероятность

$$Q_\tau(x) = \mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \tau} (W(s) - \ell(s, r)) \leq b \right\}.$$

Применим теорему 1.1 для $F(x) = 1$, $f(x) = 0$, $\alpha = -1$, $a = -\infty$. Воспользуемся сразу замечанием 1.4. Частное решение $S(x)$ уравнения (1.9) имеет вид $S(x) = 1$. Фундаментальными решениями уравнения (1.10) являются

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x\sqrt{2\lambda}}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x\sqrt{2\lambda}}.$$

Тогда $\rho(x, y) = \text{sh}((y-x)\sqrt{2\lambda})$, и, согласно (1.32),

$$Q_\tau(x) = \begin{cases} 1 - e^{(x-b)\sqrt{2\lambda}} + C(r) e^{(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & -\infty < x \leq r, \\ 1 - e^{(x-b)\sqrt{2\lambda}} + C(r) \frac{\text{sh}((b-x)\sqrt{2\lambda})}{\text{sh}((b-r)\sqrt{2\lambda})}, & r \leq x \leq b. \end{cases}$$

В силу (1.35)

$$\begin{aligned} C(r) &= - \left(\frac{\text{sh}((b-r)\sqrt{2\lambda})}{e^{(r-b)\sqrt{2\lambda}}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^r (-\sqrt{2\lambda}) e^{(v-b)\sqrt{2\lambda}} \left(\frac{e^{(v-b)\sqrt{2\lambda}}}{\text{sh}((b-v)\sqrt{2\lambda})} \right)^{1/2} dv \\ &= (e^{2(b-r)\sqrt{2\lambda}} - 1)^{1/2} - e^{(b-r)\sqrt{2\lambda}} + e^{(r-b)\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_x \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \tau} (W(s) - \ell(s, r)) \leq b \right\} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{(b+x-2r)\sqrt{2\lambda}} + (e^{2(b-r)\sqrt{2\lambda}} - 1)^{1/2} e^{(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & -\infty < x \leq r, \\ 1 - e^{(b-x)\sqrt{2\lambda}} \\ \quad + (e^{2(b-r)\sqrt{2\lambda}} - 1)^{1/2} \frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\lambda})}{\operatorname{sh}((b-r)\sqrt{2\lambda})}, & r \leq x \leq b. \end{cases} \quad (5.2) \end{aligned}$$

Пример 5.2. Вычислим плотность вероятности распределения величины $\xi(t) = W(t) + \alpha \ell(t, r)$. Сначала применим теорему 3.1 для вычисления величины

$$G_{z,r}(x) = \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x \{W(\tau) + \alpha \ell(\tau, r) < z\}.$$

Для этого положим $f(x) = 0$, $a = -\infty$, $b = \infty$ и воспользуемся замечанием 3.3. Уравнение (1.10) и, следовательно, функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют тот же вид, что и в примере 5.1. Тогда в силу (3.12) и (3.18)

$$G_{z,r}(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda}} + C_z(r) e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda}}. \quad (5.3)$$

При $\alpha > 0$, согласно (3.19),

$$C_z(r) = e^{r\sqrt{2\lambda}/\alpha} \int_r^\infty \lambda \operatorname{sign}(z-v) e^{-|v-z|\sqrt{2\lambda}} e^{-v\sqrt{2\lambda}/\alpha} dv.$$

Для $z \leq r$

$$C_z(r) = -\lambda e^{(r-z)\sqrt{2\lambda}/\alpha} \int_r^\infty e^{-(v-z)\sqrt{2\lambda}(1+1/\alpha)} dv = -\frac{\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}(\alpha+1)} e^{-(r-z)\sqrt{2\lambda}}.$$

Для $z \geq r$

$$\begin{aligned} C_z(r) &= \lambda e^{(r-z)\sqrt{2\lambda}/\alpha} \left(\int_r^z e^{(v-z)\sqrt{2\lambda}(1-1/\alpha)} dv - \int_z^\infty e^{-(v-z)\sqrt{2\lambda}(1+1/\alpha)} dv \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} e^{(r-z)\sqrt{2\lambda}} + \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} e^{(r-z)\sqrt{2\lambda}/\alpha} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x \{W(\tau) + \alpha \ell(\tau, r) < z\} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda}} \\ &- \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda}} \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+1} e^{-|r-z|\sqrt{2\lambda}}, & z \leq r, \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-|r-z|\sqrt{2\lambda}} \\ \quad + \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} e^{-|r-z|\sqrt{2\lambda}/\alpha}, & r \leq z. \end{cases} \quad (5.4) \end{aligned}$$

Деля правую часть (5.4) на λ и обращая преобразование Лапласа по λ , окончательно находим, что при $\alpha > 0$

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}_x \{W(t) + \alpha \ell(t, r) < z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(z-x)^2/2t} - \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha+1)\sqrt{2\pi t}} e^{-(|x-r|+|r-z|)^2/2t}, & z \leq r, \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{2\pi t}} e^{-(|x-r|+|r-z|)^2/2t} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)\sqrt{2\pi t}} e^{-(|x-r|+|r-z|/\alpha)^2/2t}, & r \leq z. \end{cases} \quad (5.5)$$

Выражение для плотности распределения при $\alpha < 0$ несложно вывести из (5.5), если воспользоваться свойством симметрии броуновского движения: процесс $-W(t)$ является снова броуновским движением.

Пример 5.3. Вычислим преобразование Лапласа локального времени процесса $\xi(s) = W(s) - \ell(s, r)$ в точке y , т.е. величину

$$D_r(x) = \mathbf{E}_x \exp(-\gamma L(\tau, y)).$$

Воспользуемся замечанием 4.2 при $F(x) = 1$, $f(x) = 0$. Поскольку $S_0(x) = \mathbf{E}_x \exp(-\gamma \ell(\tau, y))$, то решение задачи (4.15), (4.16) в этом случае имеет вид (см., например, формулу 1.1.3.1 в [5])

$$S_0(x) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{2\lambda}} e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda}}.$$

Функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, определяемые по формулам (4.9), (4.10), равны

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}} + \frac{2\gamma}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sh}((y-x)\sqrt{2\lambda}), & x \leq y, \\ e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}}, & y \leq x, \end{cases}$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} e^{(x-y)\sqrt{2\lambda}}, & x \leq y, \\ e^{(x-y)\sqrt{2\lambda}} + \frac{2\gamma}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sh}((x-y)\sqrt{2\lambda}), & y \leq x. \end{cases}$$

Ограничимся лишь рассмотрением случая $r \leq y$. Противоположный случай рассматривается аналогично. Из (4.25) следует, что

$$\mathbf{E}_x \exp(-\gamma L(\tau, y)) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{2\lambda}} e^{-|x-y|\sqrt{2\lambda}} + C_0(r) \begin{cases} e^{(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & x \leq r, \\ \frac{\sqrt{2\lambda} e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}} + 2\gamma \operatorname{sh}((y-x)\sqrt{2\lambda})}{\sqrt{2\lambda} e^{(y-r)\sqrt{2\lambda}} + 2\gamma \operatorname{sh}((y-r)\sqrt{2\lambda})}, & r \leq x \leq y, \\ \frac{\sqrt{2\lambda} e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\lambda} e^{(y-r)\sqrt{2\lambda}} + 2\gamma \operatorname{sh}((y-r)\sqrt{2\lambda})}, & y \leq x. \end{cases} \quad (5.6)$$

В силу (4.27)

$$\begin{aligned} C_0(r) &= e^{(y-r)\sqrt{2\lambda}} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda}} (1 - e^{-2(y-r)\sqrt{2\lambda}}) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \frac{\gamma\sqrt{2\lambda}}{\gamma + \sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^r e^{2(v-y)\sqrt{2\lambda}} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda}} (1 - e^{2(v-y)\sqrt{2\lambda}}) \right)^{-1/2} dv \\ &= \frac{e^{(y-r)\sqrt{2\lambda}}}{\gamma + \sqrt{2\lambda}} \left[(\sqrt{2\lambda} + \gamma)^{1/2} (\sqrt{2\lambda} + \gamma(1 - e^{2(r-y)\sqrt{2\lambda}}))^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2\lambda} - \gamma(1 - e^{2(r-y)\sqrt{2\lambda}}) \right]. \end{aligned}$$

Переходя в (5.6) к пределу при $\gamma \rightarrow \infty$, получим, что предел $C_0(r)$ совпадает с (5.1) при $b = y$, и, следовательно,

$$P_x\{L(\tau, y) = 0\} = \begin{cases} 1 - e^{(y+x-2r)\sqrt{2\lambda}} + (e^{2(y-r)\sqrt{2\lambda}} - 1)^{1/2} e^{(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & -\infty < x \leq r, \\ 1 - e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}} + (e^{2(y-r)\sqrt{2\lambda}} - 1)^{1/2} \frac{\text{sh}((y-x)\sqrt{2\lambda})}{\text{sh}((y-r)\sqrt{2\lambda})}, & r \leq x \leq y, \\ 1 - e^{(y-x)\sqrt{2\lambda}}, & y \leq x. \end{cases}$$

Сравнивая это выражение с (5.2), получаем, что при $r \leq y$ и $x \leq y$

$$P_x\{L(\tau, y) = 0\} = P_x\left\{\sup_{0 \leq s \leq \tau} (W(s) - \ell(s, r)) \leq y\right\}.$$

Кроме того, при $r \leq y \leq x$

$$P_x\{L(\tau, y) = 0\} = P_x\left\{y \leq \inf_{0 \leq s \leq \tau} W(s)\right\}.$$

В силу этого локальное время $L(t, y)$ обладает следующим свойством, аналогичным свойству броуновского локального времени: как только процесс $\xi(s) = W(s) - \ell(s, r)$ пересекает уровень y , сразу же возникает ненулевое локальное время на этом уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lévy P. Sur certains processus stochastiques homogènes. — *Compositio Math.*, 1939, v. 7, № 2, p. 283–339.
2. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 533 p.
3. Кас М. On distribution of certain Wiener functionals. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, v. 65, № 1, p. 1–13.
4. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий. СПб.: Наука, 1994. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 195.
5. Borodin A. N., Salminen P. Handbook of Brownian Motion—Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 1996. 462 p.

Поступила в редакцию
27.XII.1996