Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Г. А. Фрейман, Ю. В. Якубович, Локальная предельная теорема для случайных разбиений натуральных чисел, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 506–525

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 05:44:20

© 1999 г.

ВЕРШИК А. М.*,
ФРЕЙМАН Г. А.**; ЯКУБОВИЧ Ю. В.*ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ
НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ¹⁾

Рассматривается множество разбиений натурального числа n на различные слагаемые, снабженное равномерным распределением. Помимо задачи о предельной форме типичного разбиения при $n \rightarrow \infty$, изучавшейся в [20], представляет интерес поведение флуктуаций разбиений около предельной формы. Переход на геометрический язык позволяет свести задачу к изучению предельного поведения случайных ступенчатых функций (диаграмм Юнга). В работе доказаны утверждения типа локальной предельной теоремы, из которых следует, что совместные распределения флуктуаций в нескольких точках локально асимптотически нормальны. Метод работы существенно использует понятие большого канонического ансамбля разбиений.

Ключевые слова и фразы: разбиение, диаграмма Юнга, большой ансамбль разбиений, предельная форма, локальная предельная теорема.

Создателем теории разбиений натуральных чисел был первый российский профессиональный математик Леонард Эйлер (1707–1783), прибывший в 1727 году в С.-Петербург по рекомендации братьев Бернулли в качестве адъюнкта только что образованной (1724 г.) Петром Первым Российской Академии наук и ставший впоследствии одним из самых выдающихся математиков своего века. Теорию разбиений и, более общо, аддитивные задачи теории чисел он называл «*Partitio Numerorum*» и с энтузиазмом занимался ею на протяжении многих лет.

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия.

**The Raymond and Beverly Sackler Faculty of Exact Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российским фондом фундаментальных исследований, грант 96-01-00676, первого и третьего авторов.

Он дал прежде всего классическую формулу для производящей функции числа разбиений:

$$\prod_{k=1} (1 - x^k)^{-1} = \sum_{n=0} p(n) x^n,$$

нашел первые нетривиальные тождества, связанные с разбиениями, — тождество Эйлера — предшественник тождеств Гаусса–Якоби, тождества с разбиениями на неравные слагаемые (именно этот предмет изучается и в настоящей статье) и т.д. В недавно вышедшей книге «Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел» [7] есть глава, посвященная неизвестным работам Эйлера по теории разбиений.

Дальнейший прогресс в этой теории был обязан, с одной стороны, мощным аналитическим методам (Харди, Рамануджан, Радемахер), а также глубоким связям с теорией модулярных форм, а с другой — применению разбиений и связанных с ними диаграмм Юнга в комбинаторике, теории представлений, геометрии и т.д. К настоящему времени эти связи и применения сделали теорию разбиений одной из самых популярных теорий.

Неудивительно, что в надлежащий момент (а именно, около двух десятилетий назад) появилась и вероятностная теория разбиений. При этом, она рождена была не из «обобщательских» соображений, а по причине естественного появления статистик на разбиениях, возникавших как в самой теории чисел, так и в теории представлений (случайные диаграммы Юнга), геометрии, и, что еще более удивительно, — из параллелей со статистической физикой.

В этой работе рассматривается наиболее естественная статистика на разбиениях с различными слагаемыми — равномерная, т.е. статистика Ферми. Исследованием асимптотик распределений тех или иных функционалов относительно этой статистики занималась школа Эрдеша в 40–60-х гг. В работах [20]–[22] задача ставилась по-новому, как задача об одновременном описании асимптотики всех однотипных функционалов или как задача о предельной форме разбиения и его диаграммы Юнга. Предельная форма для этого случая была найдена ранее, а в настоящей работе мы изучаем поведение флуктуаций около предельной формы.

1. Постановка задачи и основные результаты. В этой работе исследуется поведение флуктуаций числа слагаемых, больших данного, в случайном разбиении натурального числа на различные слагаемые относительно равномерного распределения на множестве всех таких разбиений.

Пусть n — натуральное число и $\mathcal{P}^d(n) = \mathcal{P}(n)$ — множество всех неупорядоченных разбиений числа n на различные слагаемые. Такое

разбиение λ однозначно определяется числами заполнения $\rho_k(\lambda)$ по правилу $\rho_k(\lambda) = 1$, если число k есть одно из слагаемых в разбиении λ , и $\rho_k(\lambda) = 0$ в противном случае; при этом $n = \sum_{k=1}^n k \rho_k$.

Снабдим $\mathcal{P}(n)$ равномерной мерой μ^n ; числа заполнения можно рассматривать как случайные величины на $(\mathcal{P}(n), \mu^n)$; при этом $\mu^n(\lambda) = (q(n))^{-1}$, $q(n) = \#\mathcal{P}(n)$; $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k)$ — известная производящая функция для чисел $\{q(n)\}$, см. [1].

Общая задача состоит в изучении асимптотического поведения чисел заполнения типичного разбиения при росте разбиваемого числа. Наиболее плодотворная постановка вопроса, предложенная в [20]–[22], такова. Сопоставим каждому разбиению $\lambda \in \mathcal{P}(\cdot)$ функцию

$$g_\lambda(t) = \sum_{k \geq t} \rho_k(\lambda).$$

Подграфик этой функции есть диаграмма Юнга, отвечающая этому разбиению. Таким образом, $g_\lambda(\cdot)$ есть кусочно-постоянная случайная (по $\lambda \in \mathcal{P}(n)$) функция.

Если нормировать эти функции следующим образом:

$$\tilde{g}_\lambda(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{3n}} g_\lambda \left(\frac{2\sqrt{3n}}{\pi} t \right)$$

(множитель $\pi/(2\sqrt{3})$ выбран для удобства), то, оказывается, имеет место следующий закон больших чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n \{ \lambda \in \mathcal{P}(n): |\tilde{g}_\lambda(t) - g(t)| < \varepsilon \} = 1,$$

где $g(t) = \ln(1 + e^{-t})$ (или $e^{g(t)} - e^{-t} = 1$), найденный в [20].

График функции $g(\cdot)$ есть предельная форма («limit shape»), при $n \rightarrow \infty$, случайных диаграмм Юнга, отвечающих разбиениям.

В работах [6] и [4] доказаны теоремы о больших отклонениях в той же задаче.

Целью данной работы является доказательство локальных теорем в той же постановке. Более точно, рассмотрим $\tilde{g}_\lambda(t)$ — нормированное число слагаемых разбиения λ , не меньших, чем $t\pi/(2\sqrt{3n})$. Из цитированного выше результата следует (мы передоказываем это ниже), что $\lim_{n \rightarrow \infty} E \tilde{g}_\lambda(t) = \ln(1 + e^{-t})$. Ставится вопрос о нахождении дисперсии $D \tilde{g}_\lambda(t)$ и о поведении $(\sqrt{D \tilde{g}_\lambda(t)})^{-1} (\tilde{g}_\lambda(t) - E \tilde{g}_\lambda(t))$. Мы доказываем нормальность предельного распределения:

Теорема 1. Пусть $t \geq 0$, $a > b$ — произвольные вещественные числа. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mu^n \left\{ \lambda \in \mathcal{P}(n): \frac{\tilde{g}_\lambda(t) - g(t)}{\sqrt{d(t)} \sigma} \in (a, b) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx (1 + O(\sqrt{\sigma})),$$

где $\sigma = \pi/(2\sqrt{3n})$, а

$$d(t) = \frac{1}{1+e^t} - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{t}{1+e^t} + \ln(1+e^{-t}) \right)^2.$$

В теореме 1 доказывается гауссовость флуктуаций соответствующим образом нормированной диаграммы Юнга в каждой точке, т.е. гауссовость одномерных распределений. Она следует из более сильной локальной предельной теоремы для флуктуаций диаграммы Юнга в нескольких точках:

Теорема 2. Пусть $d > 0$ — натуральное число. Рассмотрим d натуральных чисел $m_1, m_2, \dots, m_d$, зависящих от n так, что $m_i/\sqrt{n} \in [a, b]$, $0 < a < b < \infty$; обозначим $M = (m_1, m_2, \dots, m_d)$. Пусть $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d$ — вещественные числа; обозначим $\hat{g}_\lambda(t) = (g_\lambda(t_1/\sigma), \dots, g_\lambda(t_d/\sigma))$ и $g(t) = (g(t_1), \dots, g(t_d))$, где $\sigma = \pi/(2\sqrt{3n})$. Тогда при любых a и b

$$\begin{aligned} \mu^n \{ \lambda \in \mathcal{P}(n): \hat{g}_\lambda(t) = M \} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|D|}} \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \left\langle \frac{\sigma M - g(t)}{\sqrt{\sigma}}, D^{-1} \frac{\sigma M - g(t)}{\sqrt{\sigma}} \right\rangle \right) (1 + O(\sigma)), \end{aligned}$$

где матрица $D = (e_{ij})_{i,j=1}^d$ определяется следующим образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{1+e^{t_k}} - \frac{6}{\pi^2} h(t_i) h(t_j),$$

где $k = \max\{i, j\}$ и $h(t) = t/(1+e^t) + \ln(1+e^{-t})$.

Поясним обозначения, примененные в формулировке теоремы. Вектор $g(t)$ есть вектор математических ожиданий значений верхней границы нормированной диаграммы Юнга в точках $t_1, \dots, t_d$, а $\hat{g}_\lambda(t)$ есть вектор значений в тех же точках верхней границы диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ , сжатой в $1/\sigma$ раз вдоль оси абсцисс.

Следствие 1. При $s < t$ ковариация между случайными величинами $\sqrt{\sigma} g_\lambda(s/\sigma)$ и $\sqrt{\sigma} g_\lambda(t/\sigma)$ (по отношению к мере μ^n) при $n \rightarrow \infty$ есть

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{(n)} \left(\sqrt{\sigma} g_\lambda \left(\frac{s}{\sigma} \right), \sqrt{\sigma} g_\lambda \left(\frac{t}{\sigma} \right) \right) &= \left(\frac{1}{1+e^t} - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{s}{1+e^s} + \ln(1+e^{-s}) \right) \left(\frac{t}{1+e^t} + \ln(1+e^{-t}) \right) \right) \\ &\times (1 + O(\sqrt{\sigma})), \end{aligned}$$

где $\sigma = \pi/(2\sqrt{3n})$.

Особо интересна асимптотика этой ковариации при близких s и t . Простое вычисление показывает, что верно следующее утверждение.

Следствие 2. Дисперсия разности $\sqrt{\sigma}g_\lambda((t+\varepsilon)/\sigma) - \sqrt{\sigma}g_\lambda(t/\sigma)$ по отношению к мере μ^n при $n \rightarrow \infty$ может быть записана следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^{(n)}(\sqrt{\sigma}g_\lambda(t+\varepsilon) - \sqrt{\sigma}g_\lambda(t)) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Теорема 2 еще не дает возможности установить полный принцип инвариантности. Однако использование неполных преобразований Фурье дает возможность доказать многомерную предельную теорему. Она будет доказана в другой работе.

Прежде чем перейти к изложению методики и техники доказательства приведенных выше утверждений, напомним, что помимо непосредственного интереса описанные результаты имеют статфизическую интерпретацию: эти теоремы фактически описывают поведение распределения энергии идеального квантового Ферми-газа по импульсам, см. [21].

2. Большой и малый ансамбли разбиений. Доказательство теорем 1 и 2 основано на исследовании соотношения между мерами μ^n и гиббсовскими мерами μ_x , к определению которых мы переходим.

Пусть $\mathcal{P}^d = \mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(n)$ — множество разбиений всех ($\mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$) натуральных чисел. Будем называть множество $\mathcal{P}$ *большим ансамблем разбиений*, а $\mathcal{P}(n)$ — *малым ансамблем разбиений числа n* . Числа заполнения ρ_k можно рассматривать как функции на большом ансамбле $\mathcal{P}$, и каждую меру μ^n можно также рассматривать как меру на $\mathcal{P}$.

Рассмотрим семейство выпуклых комбинаций мер μ^n

$$\mu_x = \frac{1}{F(x)} \sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n \mu^n,$$

где $x \in (0, 1)$, $q(n) = \#\mathcal{P}(n)$ и $F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k)$. Меры μ_x обладают свойствами:

- (1) $\mu_x|_{\mathcal{P}(n)} = (q(n)x^n/F(x))\mu^n$, т.е. ограничение мер μ_x на $\mathcal{P}(n)$ при всех $x \in (0, 1)$ с точностью до множителя совпадает с мерами μ^n ;
- (2) числа заполнения $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы относительно мер μ_x при всех $x \in (0, 1)$.

Свойство (1) следует мгновенно из определения. Докажем свойство (2). Действительно, рассмотрим финитную последовательность $j_1, j_2, \dots$; $j_k \in \{0, 1\}$ и обозначим $n = \sum_k k j_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_x\{\rho_1 = j_1, \rho_2 = j_2, \dots\} &= \frac{1}{F(x)} q(n) x^n \mu^n\{\rho_1 = j_1, \rho_2 = j_2, \dots\} \\ &= \frac{1}{F(x)} q(n) x^{\sum k j_k} \frac{1}{q(n)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k j_k}}{1 + x^k}, \end{aligned}$$

что и означает независимость чисел заполнения.

Семейство мер $\{\mu^n\}$, для которого существует семейство μ_x , обладающее свойствами (1), (2), называют мультипликативным семейством [20]. Меры μ_x естественно назвать *гиббсовскими*. Из доказательства свойства (2) следует, что в нашем случае

$$\mu_x\{\lambda \in \mathcal{P}: \rho_k(\lambda) = 0\} = \frac{1}{1+x^k} \quad \text{и} \quad \mu_x\{\lambda \in \mathcal{P}: \rho_k(\lambda) = 1\} = \frac{x^k}{1+x^k}.$$

Заметим, что независимость не имеет места на $(\mathcal{P}(n), \mu^n)$. Независимость чисел заполнения относительно μ_x позволяет использовать стандартные методы теории вероятностей для нахождения асимптотики на большом ансамбле, а затем перенести полученные результаты на малый ансамбль разбиений. Тем самым, наш метод исследования асимптотики мер μ^n состоит в замене их мерами μ_x и в оправдании возможности такой замены. Этот метод имеет давнюю историю и разнообразные формулировки. В статистической механике он возник как способ обоснования эквивалентности большого и малого канонических ансамблей. Аналитическая его сторона обрела формулировку метода перевала (метода Дарвина–Фаулера) или ВКБ (см. [12] и [16]). С другой стороны, в анализе и теории чисел аналогичные комплексные методы систематически использовались для нахождения асимптотики коэффициентов ряда Тейлора. Независимо от этого в теории вероятностей к таким же проблемам приводит метод характеристических функций для доказательства локальных предельных теорем (теорема Г. Крамера). А. Я. Хинчин [13], [14] был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на это сходство и применил простейшие локальные теоремы для обоснования результатов квантовой статистической физики. В более поздних работах различные варианты теоретико-вероятностного подхода были использованы в теоретико-числовых (Г. А. Фрейман [8], [9], см. также указанную там литературу), комбинаторных (R. Arratia и S. Tavaré [2], В. Fristedt [11], Ю. В. Якубович [23]), геометрических (А. М. Вершик [22], Я. Г. Синай [18]) и других задачах. Близкие вероятностные задачи комбинаторного происхождения рассматривались в работах В. Ф. Колчина и В. П. Чистякова [15], В. Н. Сачкова [19] и др.

В этой работе мы доказываем утверждения о флуктуациях числа слагаемых, больших данного, аналогичные классическим локальным предельным теоремам, но несколько отличающиеся от последних и по постановке, и по методу доказательств. Мы используем технику большого канонического ансамбля и метод, аналогичный [9], и применяем их к задаче о флуктуации около предельной формы («limit shape») разбиения — см. [20]. Насколько нам известно, подобные постановки ранее не рассматривались. С другой стороны следует отметить, что хотя параллелизм между статфизическими, комплексными и вероятностными

методами (см. выше) очевиден, взаимоотношения между ними исследованы до сих пор недостаточно.

Мы будем использовать обозначения $E_x \xi$ и $D_x \xi$ для математического ожидания и матрицы ковариаций (дисперсии в одномерном случае) случайного вектора ξ , взятых по отношению к гиббсовской мере μ_x .

3. Доказательство теорем 1 и 2. Теорема 1 следует из утверждения теоремы 2 при $d = 1$: достаточно просуммировать $O(\sqrt{\sigma})$ асимптотических выражений для вероятности $\hat{g}_\lambda(t) = t$ при $t \in (a/\sqrt{\sigma}, b/\sqrt{\sigma})$. Сформулируем утверждение теоремы 2 в нужной нам форме. Мы используем обозначения, введенные в ее формулировке. Пусть, как и ранее, $\sigma = \pi/(2\sqrt{3n})$. Обозначим разбиваемое число (случайное по отношению к мере μ_x)

$$n(\lambda) = \int_0^\infty g_\lambda(t) dt = \sum_{k=0}^\infty k \rho_k(\lambda).$$

Интересующие нас меры μ^n и μ_x при всех $x \in (0, 1)$ связаны следующим соотношением, являющимся формулой для условной вероятности:

$$\mu^n \{ \lambda \in \mathcal{P}(n): \hat{g}_\lambda(t) = M \} = \frac{\mu_x \{ \lambda \in \mathcal{P}: n(\lambda) = n, \hat{g}_\lambda(t) = M \}}{\mu_x \{ \lambda \in \mathcal{P}: n(\lambda) = n \}}. \quad (1)$$

Если бы правая часть этого равенства не содержала σ , зависящего от n , то эти уравнения позволили бы нам сразу перейти к изучению мер μ_x вместо мер μ^n . Однако σ неявно содержится в правой части (1) (в определении $\hat{g}_\lambda(t)$), но мы можем заменить n на математическое ожидание разбиваемого числа $n(\lambda)$ и выбрать зависимость x от n таким образом, чтобы это математическое ожидание в точности равнялось n . В таком случае правая часть (1) формально не зависит от n , и мы можем исследовать соответствующие распределения. Мы собираемся применить локальную предельную теорему к правым частям (1), проверив, что она выполнена для соответствующих случайных величин. Как уже было отмечено выше, чтобы получить правильный результат, мы должны выбирать $x = x(n)$ таким, что

$$E_x n = E_x \sum_{k=1}^\infty k \rho_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{k x^k}{1 + x^k} = n. \quad (2)$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 мы должны найти асимптотику правой части соотношения (1). При этом мы применяем локальную предельную теорему в большом ансамбле разбиений, доказываемую в следующем пункте. Пока приведем лишь ее формулировку.

Теорема 3. Пусть $d \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $n \in \mathbf{N}$ и $M = M(x) = (m_1, \dots, m_d)$ есть d -мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами, зависящий от x так, что $m_i/|\ln x| \in [a, b]$, $0 < a <$

$b < \infty$. Обозначим $N = (n, M)$ и $\bar{N} = N - \mathbf{E}_x(n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t))$. Тогда при любых a и b

$$\left| \mu_x \{ \lambda \in \mathcal{P}: n(\lambda) = n, \hat{g}_\lambda(t) = M \} - \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} \sqrt{|D|}} \exp \left(- \frac{\langle \bar{N}, D^{-1} \bar{N} \rangle}{2} \right) \right| = O(|\ln x|)$$

при $x \rightarrow 1$, где $D = D_x(n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t))$ — матрица ковариаций случайного вектора $(n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t))$.

Ниже мы считаем, что рассматриваемая на $\mathcal{P}$ мера есть μ_x , если не оговорено противное. Следующая лемма объясняет асимптотику совместного распределения величин $(n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t))$.

Лемма 1. Пусть $x \in (0, 1)$. Тогда при $x \rightarrow 1 - 0$ верны следующие асимптотические формулы для математических ожиданий по отношению к мере μ_x :

$$\mathbf{E}_x n = \frac{\pi^2}{12\sigma^2}(1 + O(\sigma)); \quad \mathbf{E}_x g_\lambda(t/\sigma) = \frac{1}{\sigma} g(t)(1 + O(\sigma));$$

и для матрицы ковариаций:

$$D = D_x(n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^3} \frac{\pi^2}{6} & \frac{1}{\sigma^2} h(t_1) & \frac{1}{\sigma^2} h(t_2) & \cdots & \frac{1}{\sigma^2} h(t_d) \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_1) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_1}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \cdots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_2) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \cdots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_d) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} & \cdots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \end{pmatrix} (1 + O(\sigma)),$$

где $\sigma = -\ln x$ и $h(t) = t/(1+e^t) + \ln(1+e^{-t})$.

Доказательство. Мы детально проследим только за доказательством первого равенства, поскольку доказательства остальных отличаются от первого только тем, какие интегралы необходимо взять. Математическое ожидание n может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{E}_x n = \mathbf{E}_x \sum_{k=1}^{\infty} k \rho_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{E}_x \rho_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{1+x^k}.$$

Сделаем замену переменной $\sigma = -\ln x$; когда $x \rightarrow 1$ слева, то $\sigma \rightarrow 0$ справа. (Отметим, что σ здесь формально не связана с n , как это было выше и к чему мы еще вернемся.) С использованием этой новой переменной

выражение для $E_x n$ может быть переписано как

$$E_x n = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sigma e^{-k\sigma}}{1 + e^{-k\sigma}} = \underbrace{\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{[M/\sigma]} \frac{k\sigma e^{-k\sigma}}{1 + e^{-k\sigma}}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=[M/\sigma]+1}^{\infty} \frac{kx^k}{1 + x^k}}_{S_2} \quad (3)$$

при произвольной константе M . Нас интересует асимптотика этой суммы при $\sigma \rightarrow 0+$. Рассмотрим функцию $f(z) = ze^{-z}/(1 + e^{-z})$. Тогда $\sigma^2 S_1$ есть сумма Римана для интеграла

$$\int_0^M f(z) dz = -M \ln(1 + e^{-M}) + \int_{e^{-M}}^1 \frac{\ln(1 + z)}{z} dz.$$

Поскольку M — произвольно большое число, то этот интеграл может быть сделан сколь угодно близким к своему пределу при $M \rightarrow \infty$, а именно дилогарифму -1 , равному $-\text{Li}_2(-1) = \pi^2/12$. Сумма S_2 может быть, в свою очередь оценена (при больших M и $x \in (0, 1)$) следующим образом:

$$S_2 \leq \sum_{k=[M/\sigma]}^{\infty} kx^k = \frac{x^{[M/\sigma]}([M/\sigma](x-1) + x)}{(x-1)^2} \leq C \frac{Me^{-M}}{\sigma^2}.$$

Таким образом, в силу произвольности M , $E_x n = \pi^2(12\sigma^2)^{-1}(1 + O(\sigma))$.

Все остальные утверждения леммы проверяются совершенно аналогично, и детальная проверка оставляется читателю.

Теперь мы можем выяснить, как нужно выбирать зависимость x от n . Прежде всего заметим, что уравнение (2) всегда имеет единственное решение на $x \in (0, 1)$, поскольку $E_x n$ есть сумма строго возрастающих функций $kE_x \rho_k = kx^k/(1 + x^k)$ и, к тому же, неограниченно возрастает при $x \rightarrow 1$. Для получения асимптотики необязательно иметь точное решение, и, используя первое утверждение леммы 1, мы можем выбрать

$$\sigma = -\ln x = \frac{\pi}{2\sqrt{3n}}. \quad (4)$$

При таком выборе $x = x(n)$ уравнение (2) выполнено асимптотически; асимптотическая формула для точного решения есть $\ln x = -\pi/(2\sqrt{3n}) + O(1/n)$. До конца этого пункта мы будем предполагать, что соотношение (4) выполнено. (Заметим, что таким образом мы фиксируем зависимость x от n , а σ является параметром, введенным лишь для сокращения обозначений, и может быть выбрано зависящим как от x , так и от n). При $n \rightarrow \infty$ последовательность $x = x_n$ стремится к 1 слева. Поэтому общие результаты о поведении распределений случайных величин при произвольном стремлении x к 1 слева, в частности, теорема 3, верны и для последовательности $x = x_n$.

Рассматривая σ в (1) как функцию от x , мы можем применять локальную предельную теорему 3 к числителю и знаменателю правой части соотношения (1). Для упрощения получаемых формул нам потребуется следующее элементарное алгебраическое утверждение.

Лемма 2. Пусть $a, \tilde{a} \in \mathbf{R}$, $B, \tilde{B} \in \mathbf{R}^d$ (мы считаем B и $\tilde{B}$ векторами-столбцами) и $C, \tilde{C}$ — симметричные матрицы $d \times d$, где d — некоторое натуральное число, возможно 1. Пусть они связаны следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда: 1) если C обратима, то $\tilde{C}$ также обратима, и обратная к ней матрица может быть вычислена по формуле $\tilde{C}^{-1} = C - a^{-1}BB^T$;

2) определитель

$$\det \begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix} = a \det \left(C - \frac{1}{a} BB^T \right).$$

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Предположим, что C обратима. Рассмотрим $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}$, $y, \tilde{y} \in \mathbf{R}^d$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из системы (6) получаем $\tilde{x} = ax + B^T(C^{-1}\tilde{y} - Bx)$, или $\tilde{x} - B^TC^{-1}\tilde{y} = (a - B^TC^{-1}B)x$. Обозначим $r = a - B^TC^{-1}B$ и заметим, что r — число. Если $r = 0$, то нетрудно проверить, что $\det \begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix} = 0$, что

противоречит условию (5). Поэтому $r \neq 0$, и $x = r^{-1}\tilde{x} - r^{-1}B^TC^{-1}\tilde{y}$.

Выражая y из системы (6) и подставляя найденное выражение для x , получаем $y = C^{-1}(\tilde{y} - Bx) = C^{-1}\tilde{y} - r^{-1}C^{-1}B\tilde{x} + r^{-1}C^{-1}BB^TC^{-1}\tilde{y}$.

Поскольку $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — произвольный вектор в $\mathbf{R}^{d+1}$, это означает, что

$\tilde{C} = C^{-1}(I + r^{-1}BB^TC^{-1})$, где I — единичная матрица $d \times d$. Отсюда получаем $\tilde{C}^{-1} = (I + r^{-1}BB^TC^{-1})^{-1}C$. Теперь нам понадобится тождество $(I + fg^T)^{-1} = I - fg^T/(1 + g^Tf)$, справедливое для любых векторов f и g , которое легко проверить, перемножив левую и правую части. Используя его при $f = r^{-1}B$ и $g^T = B^TC^{-1}$, получаем

$$\tilde{C}^{-1} = C - \frac{r^{-1}BB^TC^{-1}C}{1 + r^{-1}B^TC^{-1}B} = C - \frac{BB^T}{a},$$

поскольку $r = a - B^TC^{-1}B$. Первая часть доказана.

Теперь докажем второе утверждение. Проведем следующие преобразования определителя. Пусть $B = (b_1, \dots, b_d)^T$. Рассмотрим первую строку матрицы $\begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$, домножим ее на b_i/a и вычтем результат из $(i+1)$ -й строки для всех $i = 1, \dots, d$. После этого мы получим матрицу $C - a^{-1}BB^T$ на месте C , а первый столбец заменится на $(a, 0, 0, \dots, 0)^T$. Разлагая полученный определитель по первому столбцу, получаем результат леммы.

Теперь мы готовы закончить доказательство теоремы 2. В силу теоремы 3 и равенства (4) знаменатель правой части соотношения (1) сокращается до $(\sqrt{2\pi} \mathbf{D}_x \mathbf{n})^{-1} (1 + O(\sigma))$. Проследим, как можно сократить числитель. Мы также заменяем его асимптотическим выражением, данным теоремой 3. Согласно теореме 3, с учетом соотношения (4), получим

$$\mu_x \{ \lambda \in \mathcal{P}: n(\lambda) = n, \hat{g}_\lambda(t) = M \} = \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} \sqrt{|D|}} \exp \left(-\frac{\langle \bar{N}, D^{-1} \bar{N} \rangle}{2} \right) (1 + O(\sigma)). \quad (8)$$

Используя лемму 1, видим, что $\bar{N} = (O(\sigma), m_1 - g(t_1)/\sigma + O(1), m_2 - g(t_2)/\sigma + O(1), \dots, m_d - g(t_d) + O(1))$. Обозначим

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = D^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \mathbf{n} & \text{Cov}[\mathbf{n}, \hat{g}(t)] \\ \text{Cov}[\mathbf{n}, \hat{g}(t)] & \mathbf{D}_x(\hat{g}(t)) \end{pmatrix}^{-1}$$

(здесь $a, \tilde{a}, B, \tilde{B}, C, \tilde{C}$ такие, как описано в формулировке леммы 2). Поэтому скалярное произведение в правой части (8) равняется

$$\langle M - \mathbf{E}_x \hat{g}_\lambda(t), \tilde{C}(M - \mathbf{E}_x \hat{g}_\lambda(t)) \rangle + O(\sigma).$$

Таким образом, показатель экспоненты в правой части (8) асимптотически совпадает с показателем экспоненты в плотности нормального распределения в $\mathbf{R}^2$ со средним $\sigma^{-1} \hat{g}(t)$ и матрицей ковариаций $\tilde{C}^{-1}$. Чтобы найти $\tilde{C}^{-1}$, мы применяем лемму 2, которая дает следующее выражение:

$$\tilde{C}^{-1} = C - \frac{1}{a} B B^T = \mathbf{D}_x \hat{g}_\lambda(t) - \frac{1}{\mathbf{D}_x \mathbf{n}} \text{Cov}[\mathbf{n}, \hat{g}_\lambda(t)] \text{Cov}[\mathbf{n}, \hat{g}_\lambda(t)]^T.$$

Теперь остается лишь подставить в (1) асимптотические выражения, найденные в лемме 1, и использовать разложение определителя $|D|$, полученное в лемме 2. Проведем эти вычисления:

$$\begin{aligned} \mu^n \{ \lambda \in \mathcal{P}(n): \hat{g}_\lambda(t) = M \} \\ = \frac{((2\pi)^{(d+1)/2} \sqrt{|D|})^{-1} \exp(-\langle \bar{N}, D^{-1} \bar{N} \rangle / 2) (1 + O(\sigma))}{(\sqrt{2\pi} \mathbf{D}_x \mathbf{n})^{-1} (1 + O(\sigma))} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|C - a^{-1}BB^T|}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left\langle M - \frac{1}{\sigma} g(t), \left(C - \frac{1}{a} BB^T \right)^{-1} \left(M - \frac{1}{\sigma} g(t) \right) \right\rangle \right).$$

Вычисляя $C - a^{-1}BB^T$ с использованием леммы 1, получаем утверждение теоремы 2.

4. Локальная предельная теорема в большом ансамбле разбиений. Докажем теперь теорему 3. Для того чтобы пояснить ее сходство с локальной предельной теоремой, переформулируем ее в других терминах. Будем рассматривать лишь меры μ_x на $\mathcal{P}$, $x \in (0, 1)$.

Пусть $d \in \mathbf{Z}_+$. Рассмотрим d неотрицательных вещественных чисел $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d < \infty$. Рассмотрим последовательность случайных $(d+1)$ -мерных векторов ξ_k , зависящих от разбиения $\lambda \in \mathcal{P}$:

$$\xi_k = \xi_k^t(\lambda) = (k \rho_k, \rho_k, \rho_k, \dots, \rho_k, \underset{0}{\underset{1}{\underset{2}{\dots}}}, \underset{\kappa}{\underset{\kappa+1}{\dots}}, \underset{d}{0}),$$

где $\kappa = \kappa(k)$ определено соотношением $k\sigma \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$, $\sigma = \sigma(x) = -\ln x$, и t_{d+1} предполагается равным $+\infty$. Таким образом, число компонент вектора ξ_k , которые не тождественно равны нулю, есть $\kappa + 1$, а κ есть число точек t_i , меньших, чем σk . (Таким образом, κ зависит от x и k и не убывает, когда $k \rightarrow \infty$ при фиксированном x .) Про случайные величины ρ_k мы предполагаем, что они имеют распределение, индуцированное мерой μ_x . Таким образом, при фиксированном наборе чисел $t_1, \dots, t_d$ распределение ξ_k полностью определяется числом x .

Сумма $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ имеет следующий смысл: ее первая компонента $\xi^{(0)}$ есть разбиаемое число, а компонента $\xi^{(j)}$, $j \geq 1$, — число слагаемых в разбиении (ρ_k) , не меньших t_j/σ . В обозначениях предыдущего пункта $\xi(\lambda) = (n(\lambda), \hat{g}_\lambda(t))$.

Рассмотрим матрицу ковариаций $D_x = D_x(t) = D_x \xi$ случайного вектора ξ . Лемма 1 утверждает, что при $x \rightarrow 1$

$$D_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^3} \frac{\pi^2}{6} & \frac{1}{\sigma^2} h(t_1) & \frac{1}{\sigma^2} h(t_2) & \dots & \frac{1}{\sigma^2} h(t_d) \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_1) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_1}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \dots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_2) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_2}} & \dots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sigma^2} h(t_d) & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} & \dots & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+e^{t_d}} \end{pmatrix} (1 + O(\sigma)),$$

где

$$\sigma = -\ln x \quad \text{и} \quad h(t) = \frac{t}{1+e^t} + \ln(1+e^{-t}).$$

Ниже мы докажем локальную предельную теорему для последовательности ξ_k при $x \rightarrow 1$. Приведем еще раз точную формулировку в новых терминах.

Теорема 3. Пусть $N = N(x) = (n, m_1, \dots, m_d)$ есть $(d+1)$ -мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами, зависящий от x так, что $n/\ln^2 x \in [a, b]$, $m_i/\ln x \in [a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Обозначим $\bar{N} = N - \mathbf{E}_x \xi$. Тогда при любых a и b

$$\left| \mu_x \{ \lambda \in \mathcal{P}: \xi(\lambda) = N \} - \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} \sqrt{|D_x|}} \exp \left(-\frac{\langle \bar{N}, D_x^{-1} \bar{N} \rangle}{2} \right) \right| = O(|\ln x|), \quad (9)$$

при $x \rightarrow 1$.

Доказательство. Прежде всего введем необходимые нам обозначения. Характеристическая функция случайной величины ρ_k будет обозначаться $\psi_k(\beta) = \mathbf{E}_x \exp\{i\beta\rho_k\}$, а характеристическая функция центрированной случайной величины $\bar{\rho}_k = \rho_k - \mathbf{E}_x \rho_k$ — тем же символом с чертой: $\bar{\psi}_k(\beta)$. Нетрудно проверить, что в нашем случае

$$\psi_k(\beta) = \frac{1 + x^k e^{ik\beta}}{1 + x^k} \quad \text{и} \quad \bar{\psi}_k(\beta) = \frac{1 + x^k e^{ik\beta}}{1 + x^k} e^{-ikx^k/(1+x^k)}.$$

Характеристическая функция случайного вектора ξ_k будет обозначаться $\varphi_k(\alpha_0, \dots, \alpha_d) = \mathbf{E}_x \exp\{i\langle \alpha, \xi_k \rangle\}$; центрированного случайного вектора $\bar{\xi}_k = \xi_k - \mathbf{E}_x \xi_k$ — тем же символом с чертой: $\bar{\varphi}_k(\alpha_0, \dots, \alpha_d)$. Мы пишем $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_d)$ для краткости. Простое вычисление показывает, что $\varphi_k(\alpha) = \psi_k(\beta_k(\alpha))$ и $\bar{\varphi}_k(\alpha) = \bar{\psi}_k(\beta_k(\alpha))$, где $\beta_k(\alpha) = k\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_x$, где x , как и прежде, определено соотношением $\sigma k \in [t_x, t_{x+1})$. Теорема умножения для характеристических функций показывает, что $\varphi(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha)$ и $\bar{\varphi}(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(\alpha)$.

Пусть B_x есть симметричная положительно определенная матрица такая, что $B_x^2 = D_x^{-1}$. Заметим, что $\sqrt{|D_x|} = |B_x^{-1}| = |B_x|^{-1}$, где $|\cdot|$ обозначает определитель.

Следующие символы будут обозначать подмножества $\mathbf{R}^{d+1}$:

- (1) $A^b = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: |\alpha_j| \leq b, j = 0, 1, \dots, d \}$,
- (2) $A^{b_0, b_1} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: |\alpha_0| \leq b_0, |\alpha_j| \leq b_1, j = 1, \dots, d \}$,
- (3) $A_a^b = A^b \setminus A^a$, где подразумевается $a < b$,
- (4) $A_{a_0, a_1}^{b_0, b_1} = A^{b_0, b_1} \setminus A^{a_0, a_1}$, где $a_0 < b_0, a_1 < b_1$;

и следующие — их прообразы при отображении $\alpha \mapsto B_x \alpha$:

- (1) $C^b = B_x^{-1} A^b = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: B_x \alpha \in A^b \}$,
- (2) $C^{b_0, b_1} = B_x^{-1} A^{b_0, b_1} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: B_x \alpha \in A^{b_0, b_1} \}$,
- (3) $C_a^b = B_x^{-1} A_a^b = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: B_x \alpha \in A_a^b \}$,
- (4) $C_{a_0, a_1}^{b_0, b_1} = B_x^{-1} A_{a_0, a_1}^{b_0, b_1} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^{d+1}: B_x \alpha \in A_{a_0, a_1}^{b_0, b_1} \}$.

Мы также пишем $d\alpha = d\alpha_0 d\alpha_1 \dots d\alpha_d$. Отметим, что ниже все интегралы относительно α берутся в $\mathbf{R}^{d+1}$.

В нашем доказательстве мы будем следовать, в целом, обычной схеме доказательства локальных предельных теорем, которая может быть найдена, в многомерном случае, в [5]. Положим

$$y = B_x(N - E_x \xi). \quad (10)$$

Обозначим левую часть (9) символом R_x , так что в новых обозначениях

$$\sqrt{|D_x|} R_x = \left| \sqrt{|D_x|} \mu_x \{B_x(\xi - E_x \xi) = y\} - \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2}} e^{-\langle y, y \rangle / 2} \right|.$$

По формуле обращения для характеристических функций имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{|D_x|} \mu_x \{\xi = N\} &= \sqrt{|D_x|} \mu_x \{B_x(\xi - E_x \xi) = y\} \\ &= \frac{\sqrt{|D_x|}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{A^\pi} \varphi(\alpha) e^{-i\langle \alpha, B_x^{-1}y + E_x \xi \rangle} d\alpha = \frac{\sqrt{|D_x|}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{A^\pi} \bar{\varphi}(\alpha) e^{-i\langle B_x^{-1}\alpha, y \rangle} d\alpha \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{C^\pi} \bar{\varphi}(B_x \alpha) e^{-i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя формулу преобразования Фурье нормального распределения, имеем также

$$\frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2}} e^{-\langle y, y \rangle / 2} = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbf{R}^{d+1}} e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2 - i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha. \quad (12)$$

Мы должны оценить модуль разности правых частей (11) и (12) при $x \rightarrow 1$ (или, другими словами, при $\sigma \rightarrow 0$).

Рассмотрим два числа, зависящих от x : $\varepsilon^0(x) = \sigma^{3/2} \ln^2 \sigma$ и $\varepsilon^1(x) = \sigma^{1/2} \ln^4 \sigma$ (где $\sigma = -\ln x$ в соответствии с уравнением (4)). Для краткости мы будем писать $\varepsilon_x^0 = \varepsilon^0(x)$ и $\varepsilon_x^1 = \varepsilon^1(x)$. Заметим, что и ε_x^0 , и ε_x^1 стремятся к нулю при $x \rightarrow 1$, хотя они имеют различные порядки. Мы предполагаем ниже, что x достаточно близко к 1, так что $\varepsilon_x^i < \pi$. В таком случае мы можем написать

$$\begin{aligned} (2\pi)^{d+1} \sqrt{|D_x|} R_x &= \left| \int_{C^\pi} \bar{\varphi}(B_x \alpha) e^{-i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha - \int_{\mathbf{R}^{d+1}} e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2 - i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha \right| \\ &\leq \left| \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}} (\bar{\varphi}(B_x \alpha) - e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2}) e^{-i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha \right| \\ &\quad + \left| \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}} \bar{\varphi}(B_x \alpha) e^{-i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha \right| \\ &\quad + \left| \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2 - i\langle \alpha, y \rangle} d\alpha \right| \leq \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}} |\bar{\varphi}(B_x \alpha) - e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2}| d\alpha \\ &\quad + \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}} |\bar{\varphi}(B_x \alpha)| d\alpha + \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2} d\alpha = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим по отдельности интегралы I_1 , I_2 и I_3 . Наиболее просто оценить I_3 :

$$I_3 = \int_{C_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha, \alpha \rangle / 2} d\alpha = \sqrt{|D_x|} \int_{A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha, D_x \alpha \rangle / 2} d\alpha.$$

Обозначим

$$D_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^3} a & \frac{1}{\sigma^2} B^T \\ \frac{1}{\sigma^2} B & \frac{1}{\sigma} C \end{pmatrix} (1 + O(\sigma)).$$

(Здесь $a \in \mathbf{R}$, $B \in \mathbf{R}^d$ и C — вещественная матрица $d \times d$, и они не зависят от σ .) Также введем обозначения: матрица $\hat{D}_x = \begin{pmatrix} a & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$

и матрица $\hat{B}_x$ — симметричная положительно определенная матрица такая, что $\hat{B}_x^2 = \hat{D}_x^{-1}$. Сделаем замену переменной $\alpha'_0 = \alpha_0 \sigma^{-3/2}$ и $\alpha'_j = \alpha_j \sigma^{-1/2}$ при $j = 1, \dots, d$. Как нетрудно проверить, $\langle \alpha, D_x \alpha \rangle = \langle \alpha', \hat{D}_x \alpha' \rangle$ и $|D_x| = \sigma^{-(d+3)} |\hat{D}_x|$. Поэтому в новых переменных можно записать

$$\begin{aligned} I_3 &= \sqrt{|\hat{D}_x|} \int_{A_{\ln^2 \sigma, \ln^4 \sigma}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha', \hat{D}_x \alpha' \rangle / 2} d\alpha' = \int_{\hat{C}_{\ln^2 \sigma, \ln^4 \sigma}^{\infty, \infty}} e^{-\langle \alpha', \alpha' \rangle / 2} d\alpha' \\ &\leq \int_{A_{c_1 \ln^2 \sigma}^{\infty}} e^{-\langle \alpha', \alpha' \rangle / 2} d\alpha' = \int_{\mathbf{R}^{d+1}} e^{-\langle \alpha', \alpha' \rangle / 2} d\alpha' - \int_{A_{c_1 \ln^2 \sigma}} e^{-\langle \alpha', \alpha' \rangle / 2} d\alpha' \\ &= (2\pi)^{(d+1)/2} - \left(\sqrt{2\pi} - \frac{2}{c_1 \ln^2 \sigma} e^{-(c_1^2 \ln^4 \sigma)/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^4 \sigma}\right) \right) \right)^{d+1} \\ &= (2\pi)^{d/2} \frac{2(d+1)}{c_1 \ln^2 \sigma} e^{-(c_1^2 \ln^4 \sigma)/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^4 \sigma}\right) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где, во-первых, множества $\hat{C}^b$, $\hat{C}_a^b$, $\hat{C}^{b_0, b_1}$ и $\hat{C}_{a_0, a_1}^{b_0, b_1}$ определяются так же, как и C^b , C_a^b , C^{b_0, b_1} и $C_{a_0, a_1}^{b_0, b_1}$ соответственно, но в определениях вместо B_x стоит $\hat{B}_x$, и, во-вторых, константа $c_1 > 0$ такова, что $A_{c_1 \ln^2 \sigma} \subset \hat{C}_{\ln^2 \sigma, \ln^4 \sigma}$. В предпоследней строчке (13) мы использовали асимптотическую формулу

$$\int_y^\infty e^{-\beta^2/2} d\beta = \frac{1}{y} e^{-y^2/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \right),$$

см., например, [17, § 5.2]. Заметим, что $\hat{D}_x$ и $\hat{B}_x$ были введены для того, чтобы избежать нахождения асимптотики матрицы B_x ; если бы она была известна, то интеграл I_3 можно было бы оценить еще проще.

Оценим теперь интеграл I_2 . Прежде всего, преобразуем его следующим образом:

$$I_2 = \int_{B_x^{-1} A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}} |\varphi(B_x \alpha)| d\alpha = \sqrt{|D_x|} \int_{A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}} |\varphi(\alpha)| d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{|D_x|} \int_{A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}} \left| \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha) \right| d\alpha \\
&\leq \sqrt{|D_x|} \int_{A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k(\alpha)|^2 - 1) \right) d\alpha. \quad (14)
\end{aligned}$$

Последняя строчка справедлива в силу неравенства $|z| \leq \exp\{\frac{1}{2}(|z|^2 - 1)\}$, выполненного при всех $z \in \mathbf{C}$. Вспомним теперь выражение для φ_k и преобразуем его к виду, удобному для использования в (14):

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(\alpha)|^2 - 1 &= |\psi_k(\beta_k(\alpha))|^2 - 1 = \frac{|1 + x^k e^{i\beta_k(\alpha)}|^2}{(1 + x^k)^2} - 1 \\
&= \frac{(1 + x^k \cos \beta_k(\alpha))^2 + x^k \sin^2 \beta_k(\alpha) - (1 + x^k)^2}{(1 + x^k)^2} \\
&= \frac{2x^k(\cos \beta_k(\alpha) - 1)}{(1 + x^k)^2} = \frac{-4x^k \sin^2 \frac{\beta_k(\alpha)}{2}}{(1 + x^k)^2}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Необходимо показать, что модуль суммы по k таких выражений достаточно велик при всех $\alpha \in A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}$. Для этого разобьем область $A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi}$ на две части, в зависимости от модуля α_0 , следующим образом: $I_2 = I_2' + I_2''$, где I_2' берется по области $A' = \{\alpha \in A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi} : |\alpha_0| \geq \varepsilon_x^0\} = \{\alpha \in \mathbf{R}^{d+1} : \varepsilon_x^0 \leq |\alpha_0| \leq \pi, |\alpha_j| \leq \pi, j = 1, \dots, d\}$, а I_2'' — по области $A'' = \{\alpha \in A_{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}^{\pi, \pi} : |\alpha_0| \leq \varepsilon_x^0\} = \{\alpha \in \mathbf{R} : |\alpha_0| \leq \varepsilon_x^0, \exists j \in \{1, \dots, d\} : \varepsilon_x^1 \leq |\alpha_j| \leq \pi\}$. Сперва получим оценку I_2' .

Множество A' распадается на две связных компоненты, в которых α_0 имеет различные знаки. Предположим, что $\alpha_0 > 0$; второй случай рассматривается аналогично. Фиксируем $\alpha \in A'$, $\alpha_0 > 0$, и выясним, при каких k выполняется неравенство $\sin^2(\beta_k(\alpha)/2) \geq \frac{1}{2}$. Для этого необходимо, чтобы

$$\beta_k(\alpha) \in \left[2\pi p + \frac{\pi}{2}, 2\pi p + \frac{3\pi}{2} \right]$$

при некотором целом числе p . Нетрудно проверить, что это так при k между $k^0(p) = [((4p+1)\pi/2 - \alpha_1 - \dots - \alpha_\kappa)/\alpha_0] + 1$ и $k^1(p) = [((4p+3)\pi/2 - \alpha_1 - \dots - \alpha_\kappa)/\alpha_0]$, где $[z]$ обозначает целую часть z , а $\kappa = \kappa(k)$ определено, как и выше, условием $k\sigma \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$. Заметим, что мы молчаливо предполагали, что $\kappa(k^0(p)) = \kappa(k^1(p))$. Это предположение определенно выполнено, когда k настолько велико, что $\kappa(k) = d$, или, другими словами, $k \geq t_d/\sigma$. Это, в свою очередь, верно, если $k^0(p) \leq k \leq k^1(p)$ при $p \geq t_d\alpha_0/(2\pi\sigma) + d/2$; мы обозначим множество всех таких $k \in \mathbf{N}$ символом K . Тем самым, сумма в последней строке

(14) отрицательна и по модулю не меньше чем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in K} \frac{4x^k}{(1+x^k)^2} \sin^2 \frac{\beta_k(\alpha)}{2} &\geq \sum_{k \in K} \frac{x^k}{2} = \sum_{p=t_d \alpha_0 / (2\pi\sigma) + d/2}^{\infty} \sum_{k=k^0(p)}^{k^1(p)} \frac{x^k}{2} \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum_{p=t_d \alpha_0 / (2\pi\sigma) + d/2}^{\infty} (k^1(p) - k^0(p)) x^{k^1(p)} \\
 &\geq C_1 \frac{\pi}{\alpha_0} \frac{x^{k^1(t_d \alpha_0 / (2\pi\sigma) + d/2)}}{1 - x^{2\pi/\alpha_0}} \\
 &\geq C_1 \frac{\pi}{\alpha_0} \frac{\exp(-\sigma(4(t_d \alpha_0 / (2\pi\sigma) + d/2 + 3)\pi/2 + d\pi))}{1 - \exp(2C_1 \pi \sigma / \alpha_0)} \\
 &= C_1 \frac{\pi}{\alpha_0} \frac{\exp(-t_d \alpha_0 - (2d + 3/2)\pi\sigma)}{1 - (1 - 2C_1 \pi \sigma / \alpha_0 + O(\sigma^2/\alpha_0^2))} \geq \frac{C_2}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы используем проверенное выше утверждение, что $\sin^2 \beta_k(\alpha)/2 \geq \frac{1}{2}$ при $k \in K$, оценки $k^1(p) - k^0(p) \geq C_1 \pi / \alpha_0$, $k^1(p+1) - k^1(p) \geq 2C_1 \pi / \alpha_0$ при некоторой положительной константе C_1 , неравенство $k^1(p) \leq (4(t_d \alpha_0 / (2\pi\sigma) + d/2 + 3)\pi/2 + d\pi)$ и утверждение, что при $\sigma \rightarrow 0$ $O(\sigma^2/\alpha_0)$ стремится к нулю для всех $\alpha \in A'$. Отсюда, используя (14), видим, что

$$I'_2 = O(e^{-1/\sigma}). \quad (16)$$

Слагаемое I''_2 отсутствует, если $d = 0$, но для случая $d > 0$ необходимо также получить оценку для I''_2 . Пусть $\alpha \in A''$, тогда найдется $j \in \{1, \dots, d\}$ такое, что $\varepsilon_x^1 \leq |\alpha_j| \leq \pi$. Пусть $\kappa_0 \geq 1$ есть минимальное число такое, что $|\alpha_{\kappa_0}| \geq \varepsilon_x^1 / 2^{d-\kappa_0}$. Тогда $\alpha_1 < \varepsilon_x^1 / 2^{d-1}, \dots, \alpha_{\kappa_0-1} < \varepsilon_x^1 / 2^{d+1-\kappa_0}$; $\pi \geq \alpha_{\kappa_0} \geq \varepsilon_x^1 / 2^{d-\kappa_0}$, и, суммируя эти неравенства, получаем

$$\pi + \frac{\varepsilon_x^1}{2^{d-\kappa_0}} \geq |\alpha_1 + \dots + \alpha_{\kappa_0}| \geq \frac{\varepsilon_x^1}{2^{d-1}}. \quad (17)$$

Обозначим k_0 минимальное число такое, что $\kappa(k_0) = \kappa_0$, или, иначе говоря, $k_0 = [t_{\kappa_0}/\sigma]$. Теперь нам следовало бы рассмотреть два случая: $\kappa_0 < d$ и $\kappa_0 = d$, но, чтобы избежать этого, введем также $t_{d+1} = 2t_d$, чтобы сделать оценки одинаковыми в обоих случаях. Рассмотрим $k_1 = [t_{\kappa_0+1}/\sigma]$. Используя уравнение (15) и вычисления, аналогичные (14) (с измененной областью интегрирования), получаем

$$\begin{aligned}
 I''_2 &\leq \int_{A''} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_k(\alpha)|^2 - 1)\right) d\alpha \\
 &\leq \int_{A''} \exp\left(-\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{2x^k}{(1+x^k)^2} \sin^2 \frac{\beta_k(\alpha)}{2}\right) d\alpha.
 \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим сумму в последней строке неравенства (18). Принимая во внимание (17), неравенства $\alpha_0 \leq \varepsilon_x^0$, $k_0 \leq k \leq k_1$, и замечая, что $\kappa(k) = \kappa_0$

при таких k , получаем следующие ограничения для $\beta_k(\alpha)$:

$$2^{-d}\sigma^{1/2}\ln^4\sigma \leq \beta_k(\alpha) \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (19)$$

Эти неравенства выполнены при σ , достаточно близких к нулю, таких, что $\ln^2\sigma \geq 2^d t_{\kappa_0+1}$. (Заметим, что существенным здесь является ограничение снизу.) При $k \leq k_1$ мы имеем оценку $x^k = e^{-k\sigma} \geq \exp(-t_{\kappa_0+1})$. Используя ее, неравенство (19), а также оценку

$$\frac{2x^k}{(1+x^k)^2} \sin \frac{\beta_k(\alpha)}{2} \geq \frac{x^k}{200} \beta_k(\alpha)^2,$$

получаем, что сумма в последней строке (18) не меньше, чем $(\exp(-t_{\kappa_0+1})/200) \cdot 2^{-2d}\sigma \ln^8\sigma \cdot (t_{\kappa_0+1} - t_{\kappa_0})/\sigma$. Таким образом, комбинируя эту оценку и (18), получаем

$$I_2'' \leq \int_{A''} \exp(-C_3 \ln^8\sigma) d\alpha \leq C_4 \sigma^{3/2} \ln^2\sigma \exp(-\ln^8\sigma). \quad (20)$$

Теперь осталось оценить интеграл I_1 . Прежде всего, преобразуем его:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B_x^{-1}A^{\epsilon_x^0, \epsilon_x^1}} |\overline{\varphi}(B_x\alpha) - e^{-\langle\alpha, \alpha\rangle/2}| d\alpha \\ &= \sqrt{|D_x|} \int_{A^{\epsilon_x^0, \epsilon_x^1}} |\overline{\varphi}(\alpha) - e^{-\langle\alpha, D_x\alpha\rangle/2}| d\alpha \\ &\leq \sqrt{|D_x|} \int_{A^{\epsilon_x^0, \epsilon_x^1}} |\overline{\varphi}(\alpha) e^{\langle\alpha, D_x\alpha\rangle/2} - 1| d\alpha \\ &= \sqrt{|D_x|} \int_{A^{\epsilon_x^0, \epsilon_x^1}} \left| \exp\left(\ln \overline{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2}\langle\alpha, D_x\alpha\rangle\right) - 1 \right| d\alpha \\ &\leq \sqrt{|D_x|} \int_{A^{\epsilon_x^0, \epsilon_x^1}} \left| \ln \overline{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2}\langle\alpha, D_x\alpha\rangle \right| \\ &\quad \times \exp\left|\ln \overline{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2}\langle\alpha, D_x\alpha\rangle\right| d\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$ при всех комплексных z . Используя разложения

$$\ln \overline{\varphi}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \overline{\varphi}_k(\alpha) \quad \text{и} \quad \langle\alpha, D_x\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \langle\alpha, \bar{\xi}_k\rangle^2,$$

получаем следующее неравенство:

$$\left| \ln \overline{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2}\langle\alpha, D_x\alpha\rangle \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \ln \overline{\varphi}_k(\alpha) + \frac{1}{2}\mathbf{E}_x \langle\alpha, \bar{\xi}_k\rangle^2 \right|. \quad (22)$$

Обозначим k -е слагаемое в правой части (22) символом T_k . Мы используем формулу $\overline{\varphi}_k(\alpha) = \overline{\psi}_k(\beta_k(\alpha))$ и следующее разложение $\overline{\psi}_k$:

$$\overline{\psi}_k(\beta) = \frac{1+x^k e^{i\beta}}{1+x^k} \exp\left(-\frac{i\beta x^k}{1+x^k}\right) = 1 - \frac{x^k}{(1+x^k)^2} \frac{\beta^2}{2} + \frac{x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3} O(\beta^3),$$

где $O(\cdot)$ может быть выбрано не зависящим от x и k . Мы предполагаем это для всех $O(\cdot)$, встречающихся ниже. Отсюда видим, что

$$\ln \bar{\varphi}_k(\alpha) = -\frac{x^k}{(1+x^k)^2} \frac{\beta_k(\alpha)^2}{2} + \frac{x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3} O(\beta_k(\alpha)^3).$$

Далее, $E_x \langle \alpha, \bar{\xi}_k \rangle^2 = \beta_k(\alpha)^2 E_x(\bar{\rho}_k^2) = x^k(1+x^k)^{-2} \beta_k(\alpha)^2$, и, значит,

$$T_k = \frac{x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3} O(\beta_k(\alpha)^3). \quad (23)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_k &\leq C_5 x^k \beta_k(\alpha)^3 \leq C_5 x^k \left(k^3 (\varepsilon_x^0)^3 + 3dk^2 (\varepsilon_x^0)^2 \varepsilon_x^1 + 3d^2 k \varepsilon_x^0 (\varepsilon_x^1)^2 + d^3 (\varepsilon_x^1)^3 \right) \\ &\leq C_5 e^{-\sigma k} \left((\sigma k)^3 + 3d(\sigma k)^2 + 3d^2 \sigma k + d^3 \right) \sigma^{3/2} \ln^{12} \sigma, \end{aligned}$$

где константа C_5 не зависит ни от x , ни от k . Суммируя последние неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T_k &\leq \sum_{k=1}^{\infty} C_5 e^{-\sigma k} \left((\sigma k)^3 + 3d(\sigma k)^2 + 3d^2 \sigma k + d^3 \right) \sigma^{3/2} \ln^{12} \sigma \\ &\leq C_6 \sigma^{1/2} \ln^{12} \sigma \int_0^{\infty} e^{-z} \left(z^3 + 3dz^2 + 3d^2 z + d^3 \right) dz \\ &= C_7(d) \sigma^{1/2} \ln^{12} \sigma. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что выражение $|\ln \bar{\varphi}(\alpha) + \frac{1}{2} \langle \alpha, D_x \alpha \rangle|$, стоящее в показателе экспоненты в (21), ограничено при $\sigma \rightarrow 0$ и $\alpha \in A^{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}$. Используя эту оценку, а также (21), (22) и (23), получаем неравенства

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_8 \sqrt{|D_x|} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A^{\varepsilon_x^0, \varepsilon_x^1}} T_k d\alpha \leq C_9 \sqrt{|D_x|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3} \int |\beta_k(\alpha)|^3 d\alpha \\ &\leq C_{10} \sqrt{|D_x|} \sum_{k=1}^{\infty} x^k (1-x^k) \\ &\quad \times \int_0^{\varepsilon_x^0} d\alpha_0 \int \cdots \int_{[0, \varepsilon_x^1]^d} (k\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_d)^3 d\alpha_1 \cdots d\alpha_d \\ &= \sqrt{|D_x|} \sum_{k=1}^{\infty} x^k (1-x^k) \int_0^{\varepsilon_x^0} \left(C_{10}(k\alpha_0)^3 (\varepsilon_x^1)^d + C_{11}(k\alpha_0)^2 (\varepsilon_x^1)^{d+1} \right. \\ &\quad \left. + C_{12}(k\alpha_0)(\varepsilon_x^1)^{d+2} + C_{13}(\varepsilon_x^1)^{d+3} \right) d\alpha_0 \\ &\leq C_{14} \sqrt{|D_x|} \sigma^{3+d/2} \ln^{14+4d} \sigma = O(\sigma). \end{aligned} \quad (24)$$

Комбинируя неравенства (13), (16), (20) и (24), мы получаем результат теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эндриус Дж. Теория разбиений. М.: Наука, 1982, 255 с.
2. Arratia R., Tavaré S. Independent process approximation for random combinatorial structures. — *Adv. Math.*, 1994, v. 4, № 1, p. 90–154.
3. Barany I. The limit shape of convex lattice polygons. — *Discrete Comput. Geom.*, 1995, v. 13, p. 279–295.
4. Блиновский В. М. Принцип больших уклонений для границы случайной диаграммы Юнга. — Проблемы передачи информации (в печати).
5. Bhattacharya R. N., Rao R. R. Normal Approximation and Asymptotic Expansions. New York: Wiley, 1976, 274 p.
6. Dembo A., Vershik A., Zeitouni O. Large deviations for integer partitions. — *Adv. Appl. Math.* (to appear).
7. Невская К. И. (ред.) Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. СПб.: Наука, 1997.
8. Freiman G. On extremal additive problems of Paul Erdős. — *Ars Combin.*, 1988, v. 26, p. 93–114.
9. Freiman G. Asymptotical Formula for a Partition Function $q(n)$. Technical Report 3–98. Tel Aviv: Tel Aviv University, 1998.
10. Freiman G., Pitman J. Partitions into distinct large parts. — *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1994, v. 57, № 3, p. 286–416.
11. Fristedt B. The structure of random partitions of large integers. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, v. 337, № 2, p. 703–735.
12. Хуанг К. Статистическая механика. М.: Мир, 1966.
13. Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. М.: Гостехиздат, 1943.
14. Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики. М.: Гостехиздат, 1951, 256 с.
15. Колчин В. Ф., Чистяков В. П. Комбинаторные задачи теории вероятностей. — Итоги науки и техники, сер. теор. вер., матем. статист., теор. киберн., 1974, т. 11, с. 5–45.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика (классическая и квантовая). М.-Л.: Гостехиздат, 1951.
17. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) М.: Наука, 1987.
18. Синай Я. Г. Вероятностный подход к анализу статистики выпуклых ломаных. — *Функц. анализ и его прил.*, 1994, т. 28, № 2, с. 41–48.
19. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 287 с.
20. Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений. — *Функц. анализ и его прил.*, 1996, т. 30, № 2, с. 19–39.
21. Вершик А. М. Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел. — *Успехи матем. наук*, 1997, т. 52, № 2, с. 139–146.
22. Vershik A. M. Asymptotic combinatorics and algebraic analysis. — *Proceedings of International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*. V. II. Ed. by S. D. Chatterji. Basel: Birkhäuser, 1995, p. 1384–1394.
23. Якубович Ю. В. Асимптотика случайных разбиений множеств. — *Записки науч. семин. ПОМИ*, 1995, т. 223, с. 227–250.

Поступила в редакцию
15.IX.1998