Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Задачи оценивания коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 526–554

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:58:37

© 1999 г. ИБРАГИМОВ И. А.* , ХАСЬМИНСКИЙ Р. З.**

ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. II¹⁾

Как и в первой части (см. [25]), рассматривается задача оценивания функциональных параметров $a_k(t, x)$, $\theta(t, x)$ по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ стохастического уравнения в частных производных

$$du_\varepsilon(t) = \sum_{|k| \leq 2p} a_k D_x^k u_\varepsilon + \theta dt + \varepsilon dw(t),$$

$w(t)$ — винеровский процесс. Исследуются вопросы существования состоятельных оценок для θ и их скорость сходимости к θ в зависимости от свойств функционального класса Θ , которому априори принадлежит θ .

Ключевые слова и фразы: обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения, статистическое оценивание, непараметрические задачи оценивания.

II. Оценивание свободного члена. Состоятельные оценки. Скорость сходимости

Здесь мы продолжаем исследование задачи оценивания значения $\Phi(\theta)$ известной функции Φ в точке θ , которая определяется по наблюдению решения $u_\varepsilon(t, x)$ уравнения

$$du_\varepsilon(t) = Lu_\varepsilon(t) dt + \theta dt + \varepsilon dw_Q(t),$$

см. ч. I, [25], отказавшись от предположения, что $\Phi'(\theta)Q^{1/2}$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Конструкции оценок § 3 ч. I в этом случае

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия.

** Wayne State University, Detroit, USA.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке грантов ONR № 00014-95-1-0793, NSF DMS 9600245; первый автор получил также поддержку РФФИ, гранты 96-01-00684, 96-15-96199, и INTAS, грант 95-0099.

теряют смысл, даже если $\Phi(\theta)$ — линейный ограниченный оператор, и мы интересуемся здесь состоятельным оцениванием θ . Напомним, что нам заранее известно, что $\theta \in \Theta$, где Θ есть заданное множество функций.

Мы сохраняем введенные в ч. I обозначения для норм в пространствах $L_p(G)$ и $\mathcal{L}_p = L_p([0, T] \times G)$. Как и в ч. I, через c, C обозначаются константы, причем не обязательно одни и те же.

§ 4. Состоятельное оценивание и ε -энтропия множества Θ

4.1. В § 2 ч. I мы произвели формальное сведение нашей задачи к задаче оценивания сигнала в гауссовском аддитивном шуме. Там же мы описали запас статистик, указав, что все они символически записываются в виде

$$X(\varphi) = \int_0^T \langle \varphi, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle, \quad \varphi \in L_2(G).$$

Благодаря такому сведению, доказательства некоторых из приводимых ниже теорем по существу копируют доказательства соответствующих результатов авторов из [2], [3], посвященных оцениванию в гауссовском шуме, и потому в ряде случаев мы опускаем доказательства, ограничиваясь ссылкой на соответствующий результат из [2] или [3].

Мы увидим ниже, что существование состоятельных оценок и их скорость сходимости к $\Phi(\theta)$ зависят от массивности множества $\Phi(\Theta)$, которую в этом параграфе мы характеризуем ε -энтропией, точнее, ε -емкостью множества $\Phi(\Theta)$ (см. [1]).

Пусть $M \subseteq \mathcal{L}_2$ и (M, ρ) — метрическое пространство с метрикой ρ такой, что

1. $\rho(f, g) \geq k \|f - g\|, k > 0$;
2. $\rho(f, g) = 0 \leftrightarrow \|f - g\| = 0$.

Пусть $\Phi: \Theta \rightarrow M$. Назовем оценку Φ_ε M -состоятельной для $\Phi(\theta)$ в Θ , если

$$\sup_{\theta \in \Theta} P_\theta^{(\varepsilon)} \{ \rho(\Phi_\varepsilon, \Phi(\theta)) > \delta \} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

для любого $\delta > 0$ (ср. § 3, ч. I).

Теорема 4.1. Пусть множество $Q^{-1/2}\Theta$ ограничено в $\mathcal{L}_2$. M -состоятельные в Θ оценки для $\Phi(\theta)$ могут существовать, лишь если множество $\Phi(\Theta)$ компактно в M .

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 2.1 из [3]. Напомним сперва определение δ -емкости по Колмогорову множества Θ в M . Точки $x_1, \dots, x_n$ из Θ называются δ -различимыми (в (M, ρ)), если все расстояния $\rho(x_i, x_j) > \delta$. Положим $N_\delta(\Theta) = \max\{n: (x_1, \dots, x_n) \text{ — } \delta\text{-различимы}\}$. Логарифм этого числа $C_\delta(\Theta, (M, \rho)) = C_\delta(\Theta) = \ln N_\delta(\Theta)$ называется δ -емкостью Θ (см. [1]).

Свяжем с множеством Θ еще одну величину, определение которой заимствовано из теории информации. Предположим, что в уравнении

$$du_\varepsilon(t) = Lu_\varepsilon(t) dt + \theta dt + \varepsilon dw_Q(t) \quad (4.1)$$

θ есть случайная функция (t, x) , независимая с w_Q . В этом случае можно определить количество информации по Шеннону, которое содержится в u_ε относительно θ . Напомним, что если ξ, η — два случайных элемента с распределениями P_ξ, P_η и совместным распределением $P_{\xi\eta}$, то количество информации в ξ относительно η

$$I(\xi, \eta) = \mathbf{E} \left\{ \ln \frac{dP_{\xi\eta}}{dP_\xi \times dP_\eta}(\xi, \eta) \right\}$$

(см., например, [4]). Определим теперь пропускную способность «канала» (4.1) при ограничении Θ равенством (относительно определения пропускной способности в теории информации см., например, [5])

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) = \sup I(u_\varepsilon, \theta), \quad (4.2)$$

где верхняя грань берется по всем таким распределениям θ , для которых с вероятностью 1 $\theta \in \Theta$. Ниже мы рассматриваем $\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta)$ как характеристику различных возможных множеств Θ при фиксированном «канале» (4.1).

Лемма 4.1. *Пропускная способность $\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta)$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \sup_{\theta \in \Theta} \|Q^{-1/2}\theta\|^2. \quad (4.3)$$

Доказательство использует формулу (3.2), ч. I, для отношения правдоподобия и в дальнейшем развивается как в [2, с. 431].

Теорема 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\inf_{\hat{\Phi}} \sup_{\theta} \mathbf{P}_\theta \left\{ \rho(\hat{\Phi}, \Phi(\theta)) > \delta \right\} \geq 1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) + 1}{C_{2\delta}(\Phi(\Theta)) - 1}. \quad (4.4)$$

Здесь нижняя грань берется по всем возможным оценкам $\hat{\Phi}$ для $\Phi(\theta)$.

Доказательство см. в [3, теорема 2.2]. Ср. также [2, с. 469].

Теорема 4.1 есть немедленное следствие неравенств (4.3) и (4.4). Действительно, если $\Phi(\Theta)$ не есть компакт, то $C_{2\delta}(\Phi(\Theta)) = \infty$ для всех $\delta > 0$, и в силу (4.4) состоятельная оценка не существует.

З а м е ч а н и е 4.1. Ограниченность множества $Q^{-1/2}\Theta$ есть существенное требование. Действительно, параметр $\theta \in \mathbf{R}^1$ оценивается состоятельно по наблюдениям статистикой u_ε . Поэтому если параметрическое множество Θ состоит из всех функций $\theta(x) \equiv \theta$, то оценка $\langle u_\varepsilon(T), \mathbb{I}_G \rangle T^{-1}(\text{mes } G)^{-1}$ есть несмещенная оценка θ , имеющая дисперсию $\varepsilon^2 T^{-1}(\text{mes } G)^{-1}$ и, следовательно, состоятельная в $-\infty < \theta < \infty$.

4.2. Здесь мы приведем несколько теорем, в определенном смысле обратных результатам предыдущего пункта.

Теорема 4.3. Пусть B — нормированное пространство, а $\Phi: \mathcal{L}_2 \rightarrow B$ — это линейный вполне непрерывный оператор. Если множество Θ ограничено в $\mathcal{L}_2$, то существуют оценки Φ_ε такие, что для всех $\delta > 0$

$$\sup_{\theta} P_{\theta} \{ \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\|_B > \delta \} \rightarrow 0.$$

Доказательство см. в [3, теорема 2.3].

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.3, и пусть B — гильбертово пространство. Обозначим $s_1 \geq s_2 \geq \dots$ — s -числа оператора Φ . Тогда

$$\inf_{\Phi_\varepsilon} \sup_{\theta} E_{\theta} \{ \|\Phi_\varepsilon - \Phi(\theta)\| \} \leq \sup_{\theta} \inf_n \left(s_{n+1} \|\theta\| + \varepsilon \|Q^{1/2}\| \sum_1^n s_j^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство см. в [3], замечание к теореме 2.3.

Теорема 4.5. Пусть множество $Q^{-1/2}\Theta$ компактно в $\mathcal{L}_2$; пусть функция $\Phi: \Theta \rightarrow M$, где (M, ρ) — метрическое пространство, равномерно непрерывна в Θ . Тогда существуют M -состоятельные оценки для θ .

Доказательство сходно с доказательством теоремы 2.4 из [3].

Определим модуль непрерывности функции Φ равенством

$$\omega(\delta) = \sup \{ \rho(\Phi(\theta_1), \Phi(\theta_2)) : \theta_1, \theta_2 \in \Theta, \|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta \}.$$

В множестве $Q^{-1/2}\Theta$ выберем сеть из $n = \exp\{C_\delta(Q^{-1/2}\Theta)\}$ δ -различных точек $t_1 = Q^{-1/2}\theta_1, \dots, t_n = Q^{-1/2}\theta_n$. Точки $\{t_\nu\}$ образуют δ -сеть в $Q^{-1/2}\Theta$. Поэтому, если θ — произвольная точка из Θ и $t = Q^{-1/2}\theta$, найдется точка $t_j = Q^{-1/2}\theta_j$ такая, что $\|t - t_j\| \leq \delta$. Но тогда и

$$\|\theta - \theta_j\| \leq \|Q^{1/2}\| \|Q^{-1/2}\theta - Q^{-1/2}\theta_j\| \leq \delta \|Q^{1/2}\|.$$

Рассмотрим теперь статистики

$$\varphi_j(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left\langle Q^{-1/2}\theta_j, Q^{-1/2}(du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t)dt) \right\rangle - \frac{1}{2\varepsilon^2} \|Q^{-1/2}\theta_j\|^2,$$

представляющие собой $\ln(dP_{\theta_j}/dP_0)$, и определим оценку Φ_ε^* следующим образом:

$$\Phi_\varepsilon^* = \Phi(\theta_i), \quad \text{если } \max_j \varphi_j = \varphi_i$$

(если максимум достигается в нескольких точках, мы выбираем одну из них, безразлично какую).

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \mathbf{P}_{\theta} \{ \rho(\Phi_{\varepsilon}^*, \Phi(\theta)) > \omega(3 \|Q\|^{1/2} \delta) + \omega(\|Q\|^{1/2} \delta) \} \\ \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \exp \left\{ \frac{1}{2} C_{\delta}(Q^{-1/2} \Theta) - \frac{\delta^2}{16 \varepsilon^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Утверждение теоремы немедленно следует из (4.5). Само же неравенство (4.5) доказывается так же, как аналогичное ему неравенство (2.4) из [3], и мы опустим доказательство.

З а м е ч а н и е 4.2. Допустим, что оцениванию подлежит функция $\Phi = \theta$. Естественной мерой точности оценки Φ_{ε} служит величина $\|Q^{-1/2}(\Phi_{\varepsilon} - \theta)\|$. Из теорем 4.1 и 4.5 вытекает следующий результат.

Теорема 4.6. Пусть множество $Q^{-1/2}\Theta$ ограничено в $\mathcal{L}_2$. Тогда

$$\inf_{\Phi_{\varepsilon}} \sup_{\theta} \mathbf{P}_{\theta} \{ \|Q^{-1/2}(\Phi_{\varepsilon} - \theta)\| > \delta \} \rightarrow 0$$

для всех $\delta > 0$ в том и только том случае, если множество $Q^{-1/2}\Theta$ компактно в $\mathcal{L}_2$.

Действительно, эту задачу можно трактовать как задачу оценивания $\Phi(\theta) = Q^{-1/2}\theta$ в $\mathcal{L}_2$ -метрике. По теореме 4.1 множество $\Phi(\Theta)$ компактно. В силу же теоремы 4.5 состоятельное оценивание возможно, так как если $Q^{-1/2}\Theta$ — компакт, то функция $\Phi(\theta)$ равномерно непрерывна на Θ в метрике $\mathcal{L}_2$.

4.3. Неравенства (4.4) и (4.5), хотя и выглядят очень грубыми, в ряде случаев позволяют получить асимптотически точные результаты в отношении порядка сходимости оценок к $\Phi(\theta)$. В качестве примера рассмотрим задачу оценивания θ в $\mathcal{L}_2$ -норме в предположении, что оператор $Q^{-1/2}$ ограничен. Для простоты мы всюду ниже, не оговаривая этого особо, будем считать $Q = I$.

Пусть V — гильбертово пространство, $\{v_j\}$ — ортогональные элементы в нем и $a_j \uparrow$ — монотонная последовательность положительных чисел. Подмножества V вида

$$\Sigma = \Sigma\{\{a_n\}\} = \left\{ v: v \in V, v = \sum_1^{\infty} x_j v_j, \sum_1^{\infty} x_j^2 a_j^2 \leq 1 \right\}$$

будем называть эллипсоидами (a_j^{-1} — длины полуосей). Заметим, что $\{v_j\}$ не обязательно базис в V , так что Σ может быть и эллипсоидальным диском.

В определении эллипсоида допускаются значения $a_n = \infty$, причем $x_j^2 \cdot \infty = \infty$, $x_j > 0$, $0 \cdot \infty = 0$.

Теорема 4.7. Пусть $\Theta = \Theta\{\{a_n\}\}$ — эллипсоид в $\mathcal{L}_2$. Тогда

1) если $a_n \asymp n^\beta (\ln n)^\gamma$, $\beta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, то

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \asymp \varepsilon^{2\beta p/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\gamma p/(2\beta+1)},$$

2) если начиная с некоторого места $a_n = \infty$, то

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^p.$$

Доказательство. Покажем сначала оценку снизу.

Лемма 4.2. В условиях теоремы 4.1 имеет место неравенство

$$\mathbf{E}_\theta l(\rho(\Phi_\varepsilon, \Phi(\theta))) \geq \sup_{\delta > 0} l(\delta) \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(\Theta) + 1}{C_{2\delta}(\Theta) - 1} \right), \quad (4.6)$$

какова бы ни была неотрицательная монотонно неубывающая функция $l(y)$, определенная для $y > 0$.

Действительно, левая часть (4.6) не меньше

$$\int_{\{\rho > \delta\}} l(\rho(\Phi_\varepsilon, \Phi(\theta))) d\mathbf{P}_\theta \geq l(\delta) \mathbf{P}_\theta \{\rho(\Phi_\varepsilon, \Phi(\theta)) > \delta\},$$

и нам достаточно сослаться на (4.4).

Чтобы оценить емкости в (4.6), рассмотрим сперва n -мерный диск радиуса r в $\mathcal{L}_2$:

$$B_r = \left\{ h \in \mathcal{L}_2: h = \sum_1^n h_j v_j, \sum_1^n h_j^2 \leq r^2 \right\},$$

и оценим $C_\delta(B_r)$. Очевидно, $C_\delta(B_r)$ совпадает с δ -емкостью n -мерного евклидова шара радиуса r , который мы тоже обозначаем B_r . Если $x_1, \dots, x_m$ — δ -различимые точки из B_r , то шары радиуса δ с центрами в x_j покрывают B_r , и, значит, их суммарный объем больше объема B_r . Следовательно, $m\delta^n \geq r^n$ и $C_\delta(B_r) \geq n \ln(r/\delta)$. По лемме 4.1

$$\mathcal{C}_\varepsilon(B_r) \leq \frac{r^2}{2\varepsilon^2}.$$

Диск размерности n и радиуса $r = a_n^{-1}$:

$$B_r = \left\{ \theta: \theta = \sum_1^n c_j v_j, \sum_1^n c_j^2 \leq a_n^{-2} \right\} \subseteq \Theta.$$

Поэтому, какова бы ни была оценка θ_ε ,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p &\geq \sup_{\theta \in B_r} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \geq \delta^p \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(B_r) + 1}{C_{2\delta}(B_r) - 1} \right) \\ &\geq \delta^p \left(1 - \frac{r^2/2\varepsilon^2 + 1}{n \ln(r/\delta) - 1} \right). \end{aligned}$$

Выбирая здесь сперва $\delta = \frac{1}{2} a_n^{-1}$, а затем определяя N из соотношения

$$N = \min \left\{ n: \frac{2^{-1} a_n^{-2} \varepsilon^{-2} + 1}{n \ln 2 - 1} \leq \frac{1}{2} \right\},$$

получим $\Delta_\varepsilon(\Theta) \geq 4a_N^{-p}$. В частности, в условиях п. 1) теоремы $N \asymp \varepsilon^{-2/(2\beta+1)} (\ln(1/\varepsilon))^{-2\gamma/(2\beta+1)}$, и потому

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \geq c \varepsilon^{2\beta p/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\gamma p/(2\beta+1)},$$

где $c > 0$.

Оценка сверху. Известные результаты о поведении ε -энтропии эллипсоидов (см. [1]) дают, что в условиях п. 1) теоремы

$$C_\delta(\Theta) \asymp \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1/\beta} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{-\gamma/\beta}.$$

В силу неравенства (4.5) найдутся оценки θ_ε такие, что для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p &\leq (4\delta)^p + \int_{4\delta}^\infty y^p d\mathbf{P}_\theta \{ \|\theta_\varepsilon - \theta\| > y \} \\ &\leq (4\delta)^p + (4\delta)^{p-1/2} \sqrt{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{1}{2} C_{2\delta}(\Theta) - \frac{\delta^2}{16\varepsilon^2} \right\} \\ &\quad + p \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \int_{4\delta}^\infty y^{p-3/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} C_{2y}(\Theta) - \frac{y^2}{4^2\varepsilon^2} \right\} dy. \end{aligned}$$

Выбирая здесь $\delta \asymp \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} (\ln(1/\varepsilon))^{-\gamma/(2\beta+1)}$, найдем, что

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \leq c \varepsilon^{2\beta p/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\gamma p/(2\beta+1)},$$

где c — некоторая постоянная.

Первая часть теоремы доказана. Вторая часть ее очевидна. Более того, в условиях, когда $a_k = \infty$, $k > n$, оператор $\Phi'(\theta) P_H$ конечномерен, и возможно говорить об асимптотически эффективном оценивании. Асимптотически эффективной будет оценка

$$\theta_\varepsilon = \sum_1^n \int_0^T \langle v_j, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle \cdot v_j.$$

Пример 4.1. Пространства гладких функций. В этом примере мы полагаем, что G есть куб $[0, 1]^d$ и Θ состоит из функций $\theta(x)$, зависящих только от x , периодических с периодом 1 по каждому аргументу и обладающих определенной гладкостью в L_2 . Мы определим классы гладких функций, следуя работе Бабенко [6] (см. также [7], [8]).

Пусть $P(z)$ — полином от d переменных $z = (z_1, \dots, z_d)$. Положим

$$D = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_d} \right).$$

Определим класс W_2^P периодических функций как множество таких функций θ , что $|P(D)\theta|_2 \leq 1$. Разлагая функцию $\theta(x)$ в ряд Фурье

$$\theta(x) = \sum_j \theta_j \exp \{2\pi i(x, j)\},$$

найдем, что W_2^P состоит из функций θ таких, что

$$\sum_j |P(2\pi j)|^2 |\theta_j|^2 \leq 1,$$

и представляет собой эллипсоид в L_2 . Поскольку $P(z)$ может обращаться в нуль, эллипсоид может оказаться некомпактным; поэтому, определяя Θ через W_2^P , мы должны наложить дополнительные ограничения на те θ_j , для которых $P(2\pi j) = 0$. В частности, в этом пункте мы полагаем

$$\Theta = W_2^P \cap \{\theta: \theta_j = 0, \text{ если } P(2\pi j) = 0\}.$$

Конечно, ничего не изменится, если $\theta_j \neq 0$ для конечного множества j таких, что $P(2\pi j) = 0$.

Множество Θ есть эллипсоид, длины полуосей которого определяются требованием, что область $\{x: c < |P(2\pi x)| \leq a_n\}$, $c = c(P) > 0$, должна содержать n точек $(j_1, \dots, j_d)$ с целыми координатами. Поэтому во многих случаях асимптотическое поведение a_n вычисляется с помощью соотношений

$$n \sim \text{Vol} \{x: c < |P(2\pi x)| \leq a_n\} \sim \int_{c < |P(2\pi x)| \leq a_n} dx \quad (4.7)$$

(функция a_n определяется из соотношений, что область $\{x: c < |P(2\pi x)| \leq a_n\}$ должна содержать n целых точек j).

Рассмотрим два специальных примера.

1. Пусть полином

$$P(z) = \left(\sum_1^d c_j z_j^{\beta_j} \right)^k,$$

где все $c_j > 0$, β_j — целые четные, k — целое.

Если $\{\theta_j\}$ — коэффициенты Фурье функции θ , то множество Θ определяется как множество функций θ , для которых

$$\sum_{j=(j_1, \dots, j_d)} \left| \sum_{r=1}^d c_j |2\pi j_r|^{\beta_j} \right|^{2k} |\theta_j|^2 \leq 1. \quad (4.8)$$

При такой записи множество Θ корректно определено уже при произвольных $\beta_j > 0$, $k > 0$, и мы рассматриваем все такие множества Θ .

(В частности, при $k = \frac{1}{2}$ условие (4.8) означает, что $\theta(x)$ имеет в L_2 обобщенные производные по x_j порядка $\beta_j/2$.) Из формулы (4.7) следует, что

$$n \sim c(a(n))^{k-1} \sum_1^d \beta_r^{-1}, \quad a(n) \sim Cn^{k\beta}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \dots + \frac{1}{\beta_d}.$$

В силу теоремы 4.7, если Θ определено равенством (4.8), то

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} E_{\theta} |\theta_\varepsilon - \theta|_2^p \asymp \varepsilon^{2pk\beta/(2k\beta+1)}.$$

2. Пусть теперь полином $P(z) = z_1^{\beta_1} \dots z_d^{\beta_d}$. Множество Θ определяется неравенством

$$\sum |\theta_j|^2 |2\pi j_1|^{2\beta_1} \dots |2\pi j_d|^{2\beta_d} \leq 1 \quad (4.9)$$

и дополнительными условиями: $\theta_j = 0$, если какая-нибудь из компонент вектора j есть ноль. Как и выше, можно считать, что в определении (4.9) β_j — произвольные положительные числа, и (4.9) означает ограниченность в L_2 обобщенных смешанных производных порядка $(\beta_1, \dots, \beta_d)$. Чтобы выписать асимптотические формулы для полуосей эллипсоида Θ , расположим числа β_j в порядке возрастания. Пусть для определенности $\beta = \beta_1 = \dots = \beta_l < \beta_{l+1} \leq \dots \leq \beta_d$. Из (4.7) следует, что $n \sim c(a(n))^{1/\beta} (\ln a(n))^{l-1}$, $\beta = \min \beta_j$. Поэтому $a(n) \sim Cn^\beta (\ln n)^{-(l-1)\beta}$, и в силу теоремы 4.7

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^{2p\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{p\beta(l-1)/(2\beta+1)}.$$

§ 5. Состоятельные оценки и поперечники

5.1. Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Нам понадобится определение двух следующих поперечников множеств $\Sigma \subseteq B$ (подробнее об этих и других поперечниках см. [9], [10]).

1. Поперечники по Колмогорову $d_n(\Sigma)$, $n = 0, 1, \dots$, множества Σ в B определяются равенствами

$$d_n(\Sigma) = \inf \sup_{M_n} \inf_{x \in \Sigma} \inf_{y \in M_n} \|x - y\|,$$

где M_n пробегают все n -мерные линейные подмногообразия B .

2. Поперечники по Бернштейну $b_n(\Sigma)$, $n = 0, 1, \dots$, множества Σ в B определяются равенствами

$$b_n(\Sigma) = \sup_{M_{n+1}} \sup_{r>0} \{r: rO \cap M_{n+1} \subseteq \Sigma\},$$

где O обозначает единичный шар в B , а M_n пробегает все линейные n -мерные подмногообразия в B .

Ниже мы для простоты, не оговаривая это особо, рассматриваем поперечники лишь в гильбертовых пространствах L_2 и $\mathcal{L}_2$.

Теорема 5.1. *Существуют такие постоянные c_p , что*

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \leq c_p \inf_n \left((\varepsilon\sqrt{n})^p + (d_n(\Theta))^p \right), \quad (5.1)$$

где $d_n(\Theta)$ — n -й поперечник Колмогорова множества Θ в $\mathcal{L}_2$.

Доказательство. Фиксируем целое число n и подберем линейное многообразие M_n размерности n так, чтобы расстояние Θ от M_n не превышало $d_n(\Theta) + \gamma$, $\gamma \geq 0$. Без потери общности можно считать, что M_n есть подпространство в $\mathcal{L}_2$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ортонормальный базис в M_n . Определим оценки

$$\begin{aligned} \theta_n &= \sum_1^n \varphi_j \cdot \int_0^T \langle \varphi_j, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle \\ &= \sum_1^n \varphi_j(\varphi_j, \theta) + \varepsilon \sum_1^n \varphi_j \int_0^T \langle \varphi_j, dw_Q(t) \rangle. \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа есть проекция θ на M_n и

$$\left\| \theta - \sum_1^n \varphi_j(\varphi_j, \theta) \right\| \leq d_n(\Theta) + \gamma.$$

Далее, полагая $\xi_j = \int_0^T \langle \varphi_j, dw_Q(t) \rangle$, найдем, что

$$\left\| \sum_1^n \xi_j \varphi_j \right\|^2 = \sum_1^n \xi_j^2,$$

и потому для всех $p > 0$

$$\mathbf{E} \left\| \sum_1^n \xi_j \varphi_j \right\|^p \leq c_p \left(\sum_1^n \mathbf{E} \xi_j^2 \right)^{p/2} \leq c_p \left(\sum_1^n \|Q^{1/2} \varphi_j\|^2 \right)^{p/2}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_n - \theta\|^p &\leq 2^{p-1} \left((d_n(\Theta) + \gamma)^p + \varepsilon^p \mathbf{E} \left\| \sum_1^n \xi_j \varphi_j \right\|^p \right) \\ &\leq c_p \left((d_n(\Theta) + \gamma)^p + \varepsilon^p \left(\sum_1^n \|Q^{1/2} \varphi_j\|^2 \right)^{p/2} \right). \quad (5.2) \end{aligned}$$

Последняя сумма справа не больше $n\|Q\|$, и мы приходим к утверждению теоремы.

Замечание 5.1. Границу теоремы 5.1 можно слегка усилить следующим образом. Обозначим S_N множество всех операторов Гильберта–Шмидта $S: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ с нормой Гильберта–Шмидта

$|S_N|_2 \leq \sqrt{N}$. Определим поперечники $h_N(\Theta)$ равенством

$$h_N(\Theta) = \inf_M \sup_{\theta} \inf_{y \in M} \|\theta - y\|,$$

где M пробегает все подмножества $\mathcal{L}_2$, представимые в виде

$$M = S\mathcal{L}_2 + f, \quad S \in S_N, f \in \mathcal{L}_2.$$

Те же самые рассуждения, что были использованы при доказательстве теоремы 5.1, дают

$$\inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \leq c_p \inf_n \left((h_n(\Theta))^p + (\varepsilon \sqrt{n})^p \right). \quad (5.3)$$

Это неравенство сильнее, чем (5.1), так как $h_n(\Theta) \leq d_n(\Theta)$.

Неравенство (5.3) можно еще переписать следующим образом. Пусть $\Psi = \{\psi_j\}$ — полная ортонормальная система в $\mathcal{L}_2$, пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — числовая последовательность с $\sum \lambda_j^2 < \infty$. Рассмотрим всевозможные линейные оценки

$$l = \sum \lambda_j \int_0^T \langle \psi_j, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle.$$

Мы найдем тогда, что

$$\begin{aligned} \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p &\leq \inf_l \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|l - \theta\|^p \\ &\leq c_p \inf_{\Lambda, \Psi} \sup_{\theta} \left\{ \left(\sum_j (1 - \lambda_j)^2 (\theta, \psi_j)^2 \right)^{p/2} + \varepsilon^p \left(\sum_j \lambda_j^2 \right)^{p/2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В частности,

$$\inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2 \leq c \inf_{\Lambda, \Psi} \sup_{\theta} \left\{ (1 - \lambda_j)^2 (\theta, \psi_j)^2 + \varepsilon^2 \sum \lambda_j^2 \right\}. \quad (5.5)$$

5.2. Теорема 5.2. Пусть оператор Q^{-1} ограничен. Существуют такие положительные постоянные $C_p > 0$, что

$$\inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \geq C_p \varepsilon^p \left(\sup \left\{ n: \frac{b_n(\Theta)}{\varepsilon \sqrt{n+1}} \geq 1 \right\} \right)^{p/2}, \quad p \geq 1. \quad (5.6)$$

Доказательство. Ограничимся случаем $Q = I$, $p \geq 2$. Фиксируем целое число n и предположим для определенности, что шар $B_n \subseteq \Theta \cap M_{n+1}$ максимального радиуса b_n имеет своим центром начало координат. Очевидно,

$$\sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \geq \sup_{\theta \in B_n} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p.$$

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ — ортонормальный базис в M_{n+1} . Записывая $\theta \in B_n$ в виде $\theta = \sum \theta_j \varphi_j$, найдем

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(u_\varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_1^{n+1} \theta_j \int_0^T \langle \varphi_j, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle - \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_1^{n+1} \theta_j^2 \right\}.$$

Поэтому в задаче оценивания $\theta \in B_n$ статистики

$$X_j = \int_0^T \langle \varphi_j, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle$$

образуют семейство достаточных статистик, и нам достаточно рассматривать лишь оценки вида $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_{n+1})$.

Далее,

$$X_j = \theta_j + \varepsilon \int_0^T \langle \varphi_j, dw(t) \rangle = \theta_j + \varepsilon \xi_j,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ — независимые одинаково распределенные величины с параметрами $(0, 1)$. Куб $\Gamma_n = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) : |\theta_j| \leq b_n/\sqrt{n+1}\} \subseteq B_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in B_n} E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2 &\geq \sup_{\theta \in \Gamma_n} E_\theta |\theta - \theta_\varepsilon(X_1, \dots, X_{n+1})|^2 \\ &\geq (\text{mes } \Gamma_n)^{-1} \int_{\Gamma_n} E_\theta |\theta - \theta_\varepsilon(X_1, \dots, X_{n+1})|^2 d\theta. \end{aligned}$$

По теореме Ченцова [16] для всех θ_ε

$$\begin{aligned} &(\text{mes } \Gamma_n)^{-1} \int_{\Gamma_n} E_\theta |\theta - \theta_\varepsilon(X_1, \dots, X_{n+1})|^2 d\theta \\ &\geq \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon \sqrt{n+1}}{b_n} \text{th} \left(\frac{b_n}{\varepsilon \sqrt{n+1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Функция $\text{th } x/x < 1$ всюду, кроме точки $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{th } x/x) = 0$, следовательно,

$$\inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2 \geq \varepsilon^2 \inf_{x \geq 1} \left(1 - \frac{\text{th } x}{x} \right) \sup \left\{ n : \frac{b_n(\theta)}{\varepsilon \sqrt{n+1}} \geq 1 \right\},$$

что эквивалентно утверждению теоремы для $p = 2$. Если $p > 2$, то $E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^p \geq E_\theta^{p/2} \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2$. Случай $p < 2$ трактуется сходным образом, но уже требует отдельной оценки интеграла

$$\frac{1}{\text{mes } \Gamma_n} \int_{\Gamma_n} E |\theta_\varepsilon(X_1, \dots, X_{n+1}) - \theta| d\theta.$$

5.3. Примеры. Пусть Θ есть эллипсоид $\Theta(a_1, \dots)$. Тогда $d_n(\Theta) = b_n(\Theta) = a_{n+1}^{-1}$. Впрочем, нам будет достаточно и совсем очевидных неравенств $d_n \leq a_{n+1}^{-1}$ и $b_n \leq a_{n+1}^{-1}$. Допустим, что при $n \rightarrow \infty$ $a_n \asymp n^\beta (\ln n)^\gamma$. Тогда из теоремы 5.1 следует, что

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \leq c \min_x \left((x^{-\beta} (\ln x)^{-\gamma})^p + \varepsilon^p x^{p/2} \right) = c \varepsilon^{2p\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-p\gamma/(2\beta+1)},$$

а из теоремы 5.2, что

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon(\Theta) &\leq c \left(\varepsilon^2 \sup_x \left\{ x: x^{\beta+1/2} \ln^\gamma x \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\} \right)^{p/2} \\ &= c \varepsilon^{2p\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-p\gamma/(2\beta+1)}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы снова пришли к теореме 4.7: если $a_n \asymp n^\beta (\ln n)^\gamma$, то

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^{2p\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-p\gamma/(2\beta+1)}.$$

Теорема 5.3. Пусть оператор Q^{-1} ограничен. Пусть $\Theta = \Theta(\{a_n\})$ есть эллипсоид с $\ln a_n \asymp n^\gamma$. Тогда

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^p \ln^{p/(2\gamma)} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Доказательство. В условиях теоремы $d_n(\Theta) \leq 2^{-c_1 n^\gamma}$, $c_1 > 0$. Полагая в (5.1) $n \asymp (\ln \varepsilon^{-1})^{1/2}$, найдем, что $\Delta_\varepsilon(\Theta) \leq c \varepsilon^p (\ln \varepsilon^{-1})^{p/(2\gamma)}$. Далее, в условиях теоремы $b_n(\Theta) \geq 2^{-c_2 n^\gamma}$, и, выбирая в (5.6) $n \sim (\ln \varepsilon^{-1})^{1/\gamma}$, мы придем к утверждению теоремы.

Пример 5.1. Пусть оператор Q^{-1} ограничен. Пусть, как в примере 4.1, множество $G = [0, 1]^d$, а Θ состоит из функций $\theta(x)$, периодических с периодом 1 по каждому аргументу. Запишем $\theta(x)$ в виде

$$\psi(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_d}) = \sum_j \theta_j e^{2\pi i (x, j)}$$

и предположим, что функция $\psi(z_1, \dots, z_d)$ аналитична в области $\{1 - \alpha_1 < |z_1| < 1 + \beta_1, \dots, 1 - \alpha_d < |z_d| < 1 + \beta_d\}$, где $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ — заданные числа, и ограничены там некоторой постоянной C . Легко видеть, что в этом случае Θ содержится в некотором эллипсоиде в L_2 с логарифмами полуосей $\ln a_n \leq C n^{1/d}$ и содержит эллипсоид с $\ln a_n \geq c n^{1/d}$, $c > 0$. Из доказательства теоремы 5.3 легко следует, что

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^p \left| \ln^{dp/2} \frac{1}{\varepsilon} \right|.$$

Пример 5.2. Рассмотрим следующие классы гладких функций, являющиеся аналогами классов функций из примера 4.1. Допустим,

что G — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$ с границей, удовлетворяющей условию конуса (см. [12]). Пусть R — самосопряженный неотрицательный оператор с областью определения $D(R) \subseteq L_2(G)$, порожденный формально самосопряженным равномерно эллиптическим оператором $A = \sum_{|j| \leq \nu} \alpha_j D^j$ с постоянными коэффициентами. Пусть $\Theta = \{\theta \in D(R) : (R\theta, \theta) \leq 1\}$. В работе [13] доказано, что поперечники Колмогорова

$$d_n(\Theta) = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\nu/(2d)} (1 + o(1)),$$

где

$$\lambda = (2\pi)^{-d} \text{mes } G \text{mes } \{\xi : 0 < \sum \alpha_j \xi^j < 1\}.$$

Поэтому $\Delta_\varepsilon(\Theta) \asymp \varepsilon^{2p\beta/(2\beta+1)}$, где число $\beta = \nu/(2d)$.

5.4. Пусть оператор $Q = I$, а множество Θ есть эллипсоид $\Theta\{\{a_n\}\}$. В работе Пинскера [14] для задач оценивания в гауссовском белом шуме была развита теория, позволяющая для эллипсоидальных параметрических множеств устанавливать в ряде случаев точное асимптотическое поведение функций риска $\mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2$. Позднее в работах Левита и Голубева (см., например, [15]) были найдены более простые подходы к доказательству результатов Пинскера. Следуя [15], можно установить, что в предположениях этого примера при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Delta_\varepsilon^{(2)}(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \kappa a_n)_+, \quad (5.7)$$

а число κ определяется из соотношений

$$\kappa = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \kappa a_n)_+.$$

В тех случаях, когда $a_n \sim an^\beta (\ln n)^\gamma$ или $a_n \sim c_1 e^{c_2 n}$, из (5.7) можно вывести асимптотические формулы вида

$$\Delta_\varepsilon^{(2)}(\Theta) \sim c(\beta, \gamma, a) \varepsilon^{4\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2\gamma/(2\beta+1)},$$

$$\Delta_\varepsilon^{(2)}(\Theta) \sim c(c_1, c_2) \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Точные асимптотические формулы для $\Delta_\varepsilon^p(\Theta)$ и $p \neq 2$ неизвестны.

Заметим еще, что роль поперечников в задачах оценивания впервые была понята Н. Н. Ченцовым [11]; ε -энтропия, ε -емкость и пропускная способность при решении задач оценивания, по-видимому, впервые были использованы авторами в [17].

§ 6. Оценивание в L_p - и $\mathcal{L}_p$ -нормах

6.1. В этом параграфе мы продолжаем рассматривать примеры оценивания $\theta \in \Theta$, когда Θ есть класс гладких функций типа рассмотренного в § 5, но когда близость оценки к θ меряется в L_p - или $\mathcal{L}_p$ -нормах, $p \neq 2$. Всюду в этом параграфе оператор $Q = I$. Пусть вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j = r_j + \alpha_j$, где $r_j \geq 0$ — целые числа, а $0 < \alpha_j \leq 1$. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Обозначим $H_p^\beta A(\Omega)$ класс функций $f(y_1, \dots, y_n)$ таких, что $f \in L_p(\Omega)$, имеет там производные $\partial^{r_j} f / \partial y_j^{r_j}$ и, в случае $p < \infty$, производная $\partial^{r_j} f / \partial y_j^{r_j}$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\int_{\Omega} |f_{y_j}^{(r_j)}(y_1, \dots, y_j + h, \dots, y_n) - f_{y_j}^{(r_j)}(y_1, \dots, y_n)|^p dy_1 \cdots dy_n \right)^{1/p} \leq A |h|^{\alpha_j}. \quad (6.1)$$

Если $p = \infty$, последнее неравенство заменяется неравенством

$$\sup_x |f_{x_j}^{(r_j)}(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_{x_j}^{(r_j)}(x_1, \dots, x_n)| \leq A |h|^{\alpha_j}. \quad (6.2)$$

Нормированное пространство функций на G с нормой

$$\|f\| = \|f\|_p + \sup_h \frac{1}{|h|^{\alpha_0}} \left\| \Delta_{th} \frac{\partial^{r_0} f}{\partial t^{r_0}} \right\|_p + \sum_{j=1}^d \sup_h \frac{1}{|h|^{\alpha_j}} \left\| \Delta_{x_j h} \frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}} \right\|_p,$$

где

$$\Delta_{x_j h} g = g(\dots, x_{j-1}, x_j + h, \dots) - g(\dots, x_{j-1}, x_j, \dots)$$

— пространство Никольского (см. [18]) — обозначается $H_p^\beta([0, T] \times G)$.

В этом параграфе мы хотим доказать ряд результатов, которые означают, вообще говоря, что для областей G с гладкой границей и для $\Theta = H_p^\beta([0, T] \times G) A$

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_\varepsilon - \theta\|_p \asymp \begin{cases} \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}, & 2 \leq p < \infty, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \dots + \frac{1}{\beta_d}, \\ \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta/(2\beta+1)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Чтобы упростить конструкцию оценок для θ и избавиться от трудностей, связанных с оценкой значений $\theta(x)$ для x , близких к границе G , мы будем на самом деле доказывать неравенства, несколько более слабые. Именно, пусть открытое множество $g \subset \bar{g}_1 \subset G$, где g_1 — тоже открытое множество. Вместо $\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta)$ будем оценивать выражение

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta; g) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|_{L_p((0, T) \times g)},$$

причем всякий раз, когда это не может вызвать недоразумения, мы пишем $|\cdot|_p, \|\cdot\|_p$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(g)}, \|\cdot\|_{L_p((0, T) \times g)}$.

Теорема 6.1. Пусть g, g_1 — два открытых множества и $g \subset \bar{g}_1 \subset G$. Пусть $\Theta = H_p^\beta([0, T] \times G)$. Тогда

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta; g) \asymp \begin{cases} \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}, & 2 \leq p < \infty, \\ \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta/(2\beta+1)}, & p = \infty. \end{cases} \quad (6.3)$$

В этом пункте мы построим оценки θ_ε , на которых достигается (6.3); в следующем п. 6.2 будут указаны границы снизу для Δ_ε .

Можно предложить следующий общий метод построения оценок θ_ε . Пусть $A_\delta: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2, \delta > 0$, — семейство операторов Гильберта–Шмидта такое, что

$$\sup_{\theta} \|A_\delta \theta - \theta\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Тогда оценки $A_\delta(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)$ будут состоятельными оценками для $A_\delta \theta$ при фиксированном $\delta > 0$ (см. § 2), и, следовательно, при подходящем выборе $\delta = \delta(\varepsilon)$ оценки $\theta_\varepsilon = A_{\delta(\varepsilon)}(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)$ будут состоятельными оценками для θ . Остается оптимальным образом подобрать семейство $\{A_\delta\}$. Оператор A_δ — интегральный и допускает выражение

$$A_\delta \theta(t, x) = \int_0^T \int_G a_\delta(t, x; s, y) \theta(s, y) dy ds.$$

Поэтому оценки $A_\delta(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)$ будут ядерными оценками,

$$A_\delta(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)(t, x) = \int_0^T \langle a_\delta(t, x; s, \cdot), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle.$$

Очевидно,

$$A_\delta(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon)(t, x) = \int_0^T \int_G a_\delta(t, x; s, y) \theta(s, y) dy ds + \varepsilon \int_0^T \langle a_\delta, dw \rangle.$$

Поэтому величина, например, среднеквадратической погрешности $E_\theta |\theta_\varepsilon - \theta|^2$ складывается из погрешности аппроксимации

$$\left| \theta(t, x) - \int_0^T \int_G a_\delta(t, x; s, y) \theta(s, y) dy ds \right|^2 \quad (6.4)$$

функции $\theta(t, x)$ соответствующим интегралом и из дисперсии

$$\varepsilon^2 E \left| \int_0^T \langle a_\delta, dw \rangle \right|^2 = \varepsilon^2 \int_0^T \int_G a_\delta^2(t, x; s, y) dy ds, \quad (6.5)$$

и нужно построить ядра a_δ , минимизирующие сумму (6.4) и (6.5). Распространенный выбор ядер a для аппроксимации гладких функций

$\theta(t, x)$ состоит в следующем. Пусть $\varphi(y)$ — функция вещественной переменной y такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^j \varphi(y) dy = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|y|^{m+1} + 1) |\varphi(y)| dy < \infty.$$

Задавшись вектором $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_d)$, определим ядра a_δ равенством

$$a_\delta(t, x; s, y) = (\delta_0 \cdots \delta_d)^{-1} \varphi(\delta_0^{-1}(t-s)) \prod_{j=1}^d \varphi(\delta_j^{-1}(x_j - y_j)). \quad (6.7)$$

Свертки ядер $a_\delta * \theta$ хорошо приближают θ .

Лемма 6.1. Если $\theta \in H_p^\beta(\mathbf{R}^{d+1})$, то

$$\|a_\delta * \theta - \theta\|_p \leq C(A, p) \sum_0^d \delta_j^{\beta_j}.$$

Доказательство леммы мало отличается от доказательства теоремы 5.2.4 из [18], и мы его опустим, тем более что ниже нам будет достаточно этой теоремы.

Применение леммы 6.1 к оценке погрешности (6.4) наталкивается на ту трудность, что область G не совпадает со всем пространством и свертки $a_\delta * \theta$, вообще говоря, не будут определены. Можно предложить два способа, позволяющих избежать этого затруднения.

Первый способ состоит в следующем. Пусть функция $\varphi(y)$ в (6.6) финитна и, скажем, $\varphi(y) = 0$ для $|y| \geq 1$. Тогда свертка $a_\delta * \theta$ определена для всех (t, x) , удаленных от границы $[0, T] \times G$ на величину порядка $|\delta|$. В частности, при малых $|\delta|$ свертка $a_\delta * \theta$ будет определена для всех $x \in g$, где g — множество из теоремы 6.1.

Второй способ связан с продолжением функций за пределы множества G . Именно, пусть R — линейный ограниченный оператор временно из $H_p^\beta([0, T] \times G)$ в $H_p^\beta(\mathbf{R}^{d+1})$ и из $L_2([0, T] \times G)$ в $L_2(\mathbf{R}^{d+1})$. Обозначим R^* оператор, сопряженный R . Свертка $[R^* a_\delta] * \theta$ корректно определена, и по лемме 6.1

$$\|(R^* a_\delta) * \theta - \theta\|_p = \|a_\delta * (R\theta) - R\theta\|_p \leq C \sum \delta_j^{\beta_j}.$$

В то же время в силу (6.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \varepsilon \int_0^T \langle R^* a_\delta, dw \rangle \right|^2 &= \varepsilon^2 \int_0^T \int_G |R^* a_\delta|_2^2 dy ds \\ &\leq \varepsilon^2 \|R\|^2 \int_{\mathbf{R}^{d+1}} |a_\delta|^2 ds dy \leq C \varepsilon^2 \delta_0^{-1} \cdots \delta_d^{-1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Поэтому если такой оператор R существует, то, полагая $\delta_j = \varepsilon^{2\beta_j/(2\beta_j+1)}$, мы найдем, например, из (6.7) и (6.8) для $p = 2$ и оценки

$$\theta_\varepsilon = \int_0^T \langle R^* a_\delta, du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(t) dt \rangle,$$

что

$$\mathbf{E} \|\theta_\varepsilon - \theta\| \leq C \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}. \quad (6.9)$$

Величина постоянной C в неравенстве (6.9) при реальных расчетах, конечно, важна. Выбор ядра a_δ , на котором C достигает значения, близкого к минимальному, может зависеть от области G . Поскольку в настоящей работе мы ограничиваемся разысканием оценок, оптимальных лишь по порядку скорости сходимости функций риска к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, оставляя в стороне важную задачу исследования постоянных, мы предпочитаем иметь дело с универсальными ядрами a_δ . При этом, решая задачу приближения θ свертками $a_\delta * \theta$, мы будем опираться на готовые результаты теории приближений [18]. Речь идет о приближении целыми функциями конечной степени в пространствах $L_p(\mathbf{R}^d)$, $2 \leq p \leq \infty$.

Напомним, что функция $g(z_1, \dots, z_n)$ есть целая функция степени $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, если она есть целая функция по всем переменным и если для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $A_\varepsilon > 0$ такое, что

$$|g(z)| \leq A_\varepsilon \exp \left\{ \sum_1^n (\nu_j + \varepsilon) |z_j| \right\}.$$

Лемма 6.2 ([18, с. 150]). Если $1 \leq p < q \leq \infty$, то для целой функции $g \in L_p(\mathbf{R}^n)$ конечной степени $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ имеет место неравенство

$$\|g\|_q \leq 2^n (\nu_1 \cdots \nu_n)^{1/p-1/q} \|g\|_p. \quad (6.10)$$

Обозначим $E_\nu^{(p)}(f)$ величину наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$ целыми функциями g_ν степени ν : $E_\nu^{(p)}(f) = \inf_{g_\nu} \|f - g_\nu\|_p$.

Лемма 6.3 ([18, с. 226]). Пусть $f \in H_p^\beta(\mathbf{R}^n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Тогда

$$E_\nu^{(p)}(f) \leq C \sum_1^n \nu_j^{-\beta_j}. \quad (6.11)$$

Положим

$$V_N(t) = \frac{\cos Nt - \cos 2Nt}{\pi Nt^2}, \quad t \in \mathbf{R}^1.$$

Определим ядра Валле-Пуссена $V_\nu(x)$, $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_d)$, равенством

$$V_\nu(t, x) = V_{\nu_0}(t) \prod_1^d V_{\nu_j}(x_j).$$

Очевидно, V_ν и свертки $V_\nu * f$ суть целые функции степени $2N$.

Лемма 6.4 ([18, с. 350]). *Имеет место неравенство*

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^n} V_\nu(x-y) f(y) dy - f \right\|_p \leq (1+M) E_\nu^{(p)}(f), \quad (6.12)$$

где M — постоянная, зависящая только от размерности n .

Переходя к построению оценок θ_ε и следуя указанной выше схеме, определим операторы продолжения R и выберем в качестве ядер a_δ ядра R^*V_ν . Существуют различные конструкции операторов продолжения (см., например, [20, гл. VI], [21]); для доказательства теоремы 6.1, в которой функции риска суть нормы уклонения оценок от θ в $L_p(g)$ и $g \subset \bar{g}_1 \subset G$, такие операторы продолжения можно построить совсем просто (см. [18, с. 447]). Именно, пусть $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbf{R}^d$ функция такая, что $\varphi(x) = 1$ на g и $\varphi(x) = 0$ вне G . Определим оператор R_1 , продолжающий функции, определенные на g , до функций, определенных на $\mathbf{R}^d$, с помощью равенства $R_1 f(x) = \varphi(x) f(x)$. Очевидно, R_1 есть линейный ограниченный оператор и как оператор из $H_p^\beta(g)$ в $H_p^\beta(\mathbf{R}^d)$ и как оператор из $L_2(g)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Далее, если $f(t, x)$ есть функция, определенная на $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, то она может быть продолжена без труда до функции на $(-\infty, \infty) \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d+1}$ с помощью конструкции Хестенса, оператор продолжения R_2 ; например, для малых $|t|$ и $t < 0$ продолженная функция $\bar{f}(t, x) = \sum_{s=1}^k c_s f(-t \cdot 2^{-s}, x)$ при подходящем подборе чисел k, c_s (см. [20, с. 231], и цитируемую там литературу). Операторы продолжения R_2 — линейные ограниченные операторы в $H_p^\beta([0, T] \times g)$ и в $L_2([0, T] \times g)$, и мы можем, наконец, определить искомые операторы продолжения $R = R_2 R_1$.

Определим теперь оценки

$$\theta_\nu(t, x) = \int_0^T \langle R^*V_\nu(x - \cdot), du_\varepsilon(t) - Lu_\varepsilon(s) \rangle, \quad (6.13)$$

$\nu = (\nu_0, \dots, \nu_d)$, функции $\theta(t, x)$ и исследуем их свойства.

Лемма 6.5. *Имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} E \|\theta_\nu - \theta\|_p &\leq C(E_\nu^{(p)}(\theta) + \varepsilon(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2}), \quad 2 \leq p < \infty, \\ E \|\theta_\nu - \theta\|_\infty &\leq C(E_\nu^{(\infty)}(\theta) + \varepsilon(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} \ln(\nu_0 \cdots \nu_d)). \end{aligned}$$

Постоянные C зависят от p и областей g, g_1, G .

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned} \theta_\nu(t, x) - \theta(t, x) &= \left[\int_0^T \langle R^*V_\nu(t-s, x-y), \theta(s, y) \rangle ds - \theta(t, x) \right] \\ &\quad + \varepsilon \int_0^T \langle R^*V_\nu(t-s, x-y), dw(s) \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\|\theta_\nu - \theta\|_p \leq \left\| \int_0^T \langle R^* V_\nu, \theta \rangle ds - \theta \right\|_p + \varepsilon \mathbf{E} \left\| \int_0^T \langle R^* V_\nu, dw(s) \rangle \right\|_p. \quad (6.14)$$

Первое слагаемое в (6.14) легко оценивается с помощью лемм 6.3, 6.4. Именно, в силу (6.12)

$$\left\| \int_0^T \langle R^* V_\nu, \theta \rangle ds - \theta \right\|_p \leq \|V_\nu * R\theta - R\theta\|_{L_p(\mathbf{R}^{d+1})} \leq (1 + M) E_\nu^{(p)}(R\theta).$$

В силу же (6.11) для $\theta \in H_p^\beta([0, T] \times G)$ А отсюда следует, что

$$\left\| \int_0^T \langle R^* V_\nu, \theta \rangle ds - \theta \right\|_p \leq C \sum_0^d \nu_j^{-\beta_j}. \quad (6.15)$$

Осталось оценить второе слагаемое в (6.14), норму случайной функции

$$\xi(t, x) = \int_0^T \langle R^* V_\nu, dw(s) \rangle.$$

Это гауссовская функция с $\mathbf{E}\xi^2(t, x) \leq \|R^*\|_2^2 \|V_\nu\|^2 = C \|R\|_2^2 \nu_0 \cdots \nu_d$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\xi(t, x)|^p &= (\mathbf{E}\xi^2(t, x))^{p/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p e^{-x^2/2} dx \\ &\leq C^p \|R\|_2^p p^{p/2} (\nu_0 \cdots \nu_d)^{p/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для $p \leq 2 < \infty$ (множество g ограничено)

$$\mathbf{E}\|\xi\|_p \leq \mathbf{E}^{1/p} \|\xi\|_p^p \leq C \|R\|_2 \sqrt{p} (\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2}.$$

Чтобы оценить $\mathbf{E}\|\xi\|_\infty$, заметим сперва, что из неравенств для $\mathbf{E}\|\xi\|_p$ легко следует неравенство

$$\mathbf{E}\|\xi\|_p \leq C \|R\|_2 \mathbf{E} \left\| \int_0^T \langle V_\nu, dw(s) \rangle \right\|_p.$$

Функция $\eta(t, x) = \int_0^T \langle V_\nu, dw(s) \rangle$ есть целая функция степени 2ν . Выберем и зафиксируем малое положительное число $\delta > 0$ так, чтобы для $(t, x) \in [0, T] \times g$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sin \delta t}{\delta t} \prod_1^d \frac{\sin \delta x_j}{\delta x_j} \leq 1.$$

Тогда функция

$$\eta_\delta(t, x) = \eta(t, x) \cdot \frac{\sin \delta t}{\delta t} \prod_1^d \frac{\sin \delta x_j}{\delta x_j}$$

есть целая функция степени $(2\nu_0 + \delta, \dots, 2\nu_d + \delta)$. Ниже ν_j — большие числа, и можно считать, что η_δ есть функция степени 3ν .

По лемме 6.2 для $q > p$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|\xi\|_q &\leq C\|R\|_2\mathbf{E}\|\eta\|_q \leq C2^{d+1}\|R\|_2\mathbf{E}\|\eta_\delta\|_q \leq C2^{d+1}\|R\|_2\mathbf{E}\|\eta_\delta \mid \mathbf{R}^{d+1}\|_q \\ &\leq C2^{d+1}\|R\|_2(3\nu_0 \cdot 3\nu_1 \cdots 3\nu_d)^{1/p-1/q}\mathbf{E}\|\eta_\delta \mid \mathbf{R}^{d+1}\|_p \\ &\leq C(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2+1/p}\sqrt{p}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $q \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|\xi\|_q &\leq C(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} \min_{p \leq q} \left(\sqrt{q}, (\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/p} \sqrt{p} \right) \\ &\leq C(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} (\ln(\nu_0 \cdots \nu_d))^{1/2}. \end{aligned}$$

По лемме Фату

$$\mathbf{E}\|\xi\|_\infty = \mathbf{E} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \|\xi\|_p \right) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{E}\|\xi\|_p \leq C(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} (\ln(\nu_0 \cdots \nu_d))^{1/2}.$$

Лемма 6.5 доказана. Утверждение теоремы 6.1, касающееся верхних границ, немедленно следует из неравенства леммы 6.5. Действительно, в условиях теоремы $E_\nu^{(p)}(\theta) \leq C \sum_0^d \nu_j^{-\beta_j}$, и неравенства леммы 6.5 принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|\theta_\nu - \theta\|_p &\leq C \left(\sum_0^d \nu_j^{-\beta_j} + \varepsilon(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} \right), \quad 2 \leq p < \infty, \\ \mathbf{E}\|\theta_\nu - \theta\|_\infty &\leq C \left(\sum_0^d \nu_j^{-\beta_j} + \varepsilon(\nu_0 \cdots \nu_d)^{1/2} (\ln(\nu_0 \cdots \nu_d))^{1/2} \right), \end{aligned}$$

и в качестве оценки θ_ε можно выбрать оценку θ_ν , где $\nu = \nu(\varepsilon)$ определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \nu_j &\asymp \varepsilon^{-2\beta/[\beta_j(2\beta+1)]}, \quad p < \infty, \\ \nu_j &\asymp \varepsilon^{-2\beta/[\beta_j(2\beta+1)]} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\beta/[\beta_j(2\beta+1)]}, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Теорема 6.1 в отношении верхних границ доказана. Точнее, мы доказали следующий результат.

Теорема 6.2. Пусть $\Theta \subseteq H_p^\beta([0, T] \times G)$ А. Пусть g — ограниченное открытое множество, g_1 — открытое множество, и пусть $g \subset \bar{g}_1 \subset G$. Построенные выше ядерные оценки θ_ε удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \sup_\theta \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta \mid L_p([0, T] \times g)\|_p &\leq C (\text{mes } g \cdot T)^{1/p} \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}, \quad 2 \leq p < \infty, \\ \sup_\theta \mathbf{E}_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta \mid L_p([0, T] \times g)\|_\infty &\leq C \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta/(2\beta+1)}, \end{aligned}$$

где постоянные C зависят от A, β, p и оператора продолжения R .

З а м е ч а н и е 6.1. Основную роль в вычислении верхних границ точности оценивания играют неравенства леммы 6.5. Поскольку в этих неравенствах точность аппроксимации θ оценками θ_ν определяется величинами наилучших приближений, ясно, что вместо предположения, что Θ есть подмножество пространства Никольского H_p^β , можно было бы предположить, что Θ есть подмножество какого-либо пространства Соболева, или Бесова, или Лиувилля и т.д., для которых существуют хорошие оценки величины наилучшего приближения целыми функциями (см. [18]). Вообще же в неравенствах леммы 6.5 величина $E_\nu^{(p)}(\theta)$ играет ту же роль, что и поперечники Бернштейна в § 5.

З а м е ч а н и е 6.2. Предположим, что функция $\theta = \theta(x)$ зависит только от x . Естественно в этом случае вместо оценок θ_ν рассмотреть оценки

$$\tilde{\theta}_\nu(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \langle R_1^* V_\nu(x - \cdot), du_\varepsilon(s) - Lu_\varepsilon(s) ds \rangle,$$

где теперь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$. В этом случае дисперсия $E_\theta |\tilde{\theta}_\nu(x) - E\tilde{\theta}_\nu(x)|^2$ убывает как $\varepsilon^2 T^{-1}$, и мы приходим к следующему результату.

Теорема 6.3. Пусть в условиях теоремы 6.1 функции $\theta = \theta(x)$ зависят только от x . Тогда можно подобрать $\nu = \nu(\varepsilon, T)$ так, что для оценок $\theta_\varepsilon = \theta_\nu$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \sup_\theta E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|_p &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \right)^{2\beta/(2\beta+1)}, \quad 2 \leq p < \infty, \\ \sup_\theta E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|_\infty &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \right)^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon} \right)^{\beta/(2\beta+1)}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 6.3. Рассмотренные выше ядерные оценки решают также задачу оценивания значения $\theta(t, x)$ в точке (t, x) . При этом, конечно, нет необходимости вводить операторы продолжения. Достаточно рассмотреть оценки с ядрами типа (6.6), (6.7), равными $\Phi_\nu = (\nu_0 \cdots \nu_d) \varphi(\nu_0(t-s)) \prod_{j=1}^d \varphi(\nu_j(x_j - y_j))$, где дополнительно предполагается, что φ — финитная функция. При больших ν_j оценки

$$\theta_\nu(x) = \int_0^T \langle \Phi_\nu, du_\varepsilon(s) - Lu_\varepsilon(s) ds \rangle$$

корректно определены. Проведенные выше рассуждения позволяют доказать следующий результат:

если все $\theta \in H_\infty^\beta(\Lambda)$ Λ , где Λ — какая-нибудь окрестность точки x , то для $\theta_\varepsilon = \theta_{\nu(\varepsilon)}(x)$, $\nu_j(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-2\beta/(\beta_j(2\beta+1))}$,

$$\sup_\theta E_\theta |\theta_\varepsilon - \theta(x)|^r \leq C_r \varepsilon^{2\beta r/(2\beta+1)}.$$

6.2. В этом пункте мы приведем нижние границы точности оценивания в метриках L_p .

Теорема 6.4. Пусть $g \subset G$ — открытое множество. Если для каких-нибудь β, A $H_p^\beta([0, T] \times g) \cap A \subseteq \Theta$, то

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}, & 2 \leq p < \infty, \\ c\varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta/(2\beta+1)}, & p = \infty, \end{cases}$$

где, как и выше, $\beta^{-1} = \sum_0^d \beta_j^{-1}$, а c — положительные постоянные.

Доказательство. Мы будем опираться на неравенство (4.6). Без потери общности можно считать, что g есть куб $[0, 1]^d$ и что $T = 1$, $A = 1$. Пусть $\varphi(y) \geq 0$ есть бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне отрезка $[0, 1]$. Пусть $N = N(\varepsilon)$ — большое целое число, окончательный выбор которого мы уточним позднее. Пусть $\nu_0, \dots, \nu_d$ — целые числа, ближайšie к решению экстремальной задачи

$$z_0^{-\beta_0} + \dots + z_d^{-\beta_d} \longrightarrow \min, \quad z_0 \dots z_d = N, \quad z_j > 0.$$

Ясно, что $\nu_j \asymp N^{\beta/\beta_j}$.

Определим функции $\psi_i(t, x)$, $i = (i_0, \dots, i_d)$, $0 \leq i_j \leq \nu_j$, равенствами

$$\psi_i(t, x) = N^{-\beta} \varphi\left(\nu_0\left(t - \frac{i_0}{\nu_0}\right)\right) \prod_{j=1}^d \varphi\left(\nu_j\left(x_j - \frac{i_j}{\nu_j}\right)\right).$$

Очевидно, при разных k, l множества $\{(t, x): \psi_k(t, x) = 0\}$ и $\{(t, x): \psi_l(t, x) = 0\}$ не имеют общих точек. Определим, наконец, функции f_a равенствами

$$f_a(t, x) = \sum_i a(i) \psi_i(t, x),$$

где $a(i)$ принимает значения 0, 1, а суммирование ведется по всем векторам i .

Очевидно, $\mathcal{L}_2$ -норма f_a

$$\|f_a\| = N^{-\beta} (\nu_0 \dots \nu_d)^{-1/2} \left(\sum_i a^2(i) \right)^{1/2} \|\varphi\|_2^{d+1} \leq cN^{-\beta} = r,$$

так что все функции f_a принадлежат $\mathcal{L}_2$ -шару O_r радиуса r .

Далее, легко видеть, что функцию φ можно выбрать так, чтобы все функции $f_a \in H_p^\beta([0, T] \times g) \subseteq \Theta$ для нужного p , $2 \leq p \leq \infty$. Поэтому если мы обозначим F совокупность всех f_a , то $F \subseteq \Theta \cap O_r \subseteq \Theta$ и в силу (4.6)

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) = \inf_{\theta_\varepsilon} \sup_{\theta \in F} E_\theta \|\theta_\varepsilon - \theta\|_p \geq \sup_{\delta} \delta \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(F) + 1}{C_{2\delta}^{(p)}(F) - 1} \right), \quad (6.16)$$

где $C_{2\delta}^{(p)}(F)$ означает 2δ -емкость множества F в $\mathcal{L}_p$. Дальнейшие рассуждения для случаев $p < \infty$ и $p = \infty$ несколько различаются.

Пусть сперва $p < \infty$. В силу (4.3)

$$\mathcal{C}_\varepsilon(F) \leq \mathcal{C}_\varepsilon(O_r) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2 r^2}.$$

Обозначим $F_1 \subseteq F$ множество тех f_a , для которых если $f_a, f_{a'} \in F_1$, то

$$\sum_i |a(i) - a'(i)| > \frac{1}{4}(\nu_0 - 1) \cdots (\nu_d - 1).$$

Лемма 6.6. *Мощность множества F_1*

$$\text{card}(F_1) \geq \exp \left\{ \frac{1}{8}(\nu_0 - 1) \cdots (\nu_d - 1) \right\}.$$

Эта лемма в свою очередь вытекает из следующего результата, доказательство которого можно найти в [22] — лемма 7 этой работы (в [22] ошибочно указано, что функция $a(i)$ принимает значения ± 1 , а не $0, 1$).

Лемма 6.7. *Рассмотрим функцию $a(\omega)$, определенную на конечном множестве $\Omega = \{\omega\}$, $\text{card } \Omega = R$, и принимающую значения $0, 1$. Обозначим D множество тех функций a , при любых $a, a' \in D$*

$$\sum_{\omega} |a(\omega) - a'(\omega)| \geq \frac{R}{4}.$$

Тогда

$$\text{card } D \geq \left[2^{-R} \sum_{k=0}^{[R/4]} C_R^k \right]^{-1} \geq \exp \left\{ \frac{R}{8} \right\}.$$

Заметим, что первая часть последнего неравенства есть неравенство Гильберта или Варшамова–Гильберта из теории кодирования, см. [23]. Вторая же легко следует из элементарных теорем о больших отклонениях для испытаний Бернулли.

Пусть теперь $f_a, f_{a'}$ — какие-либо две функции из F_1 . Тогда

$$\begin{aligned} |f_a - f_{a'}|_p &= \left(\sum_i |a(i) - a'(i)| \int |\psi_i(t, x)|^p dt dx \right)^{1/p} \\ &= N^{-\beta} (\nu_0 \cdots \nu_d)^{-1/p} \|\varphi\|_p^{d+1} \left(\sum_i |a(i) - a'(i)| \right)^{1/p} \\ &\geq 8^{-p} \|\varphi\|_p^{d+1} N^{-\beta} = c N^{-\beta}, \end{aligned}$$

где постоянная $c > 0$. Обозначая правую часть последнего неравенства 2δ , найдем, что F_1 состоит из 2δ -различимых точек. При таком выборе δ

$$\frac{\mathcal{C}_\varepsilon(F) - 1}{C_{2\delta}^{(p)}(F) + 1} \leq c \frac{r^2}{\varepsilon^2 \ln \text{card}(F_1)} \leq c \varepsilon^{-2} N^{-2\beta-1} \leq \frac{1}{2},$$

если вдобавок N выбрано так, что $N \sim (4c)^{1/(2\beta+1)} \varepsilon^{-2/(2\beta+1)}$. В силу (6.16) $\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) \geq c \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}$.

Пусть теперь $p = \infty$. Обозначим F_2 множество f_a , отвечающих таким функциям a , что ровно одно из значений $a(i)$ равно 1, а остальные суть нули. Очевидно, $\text{card}(F_2) = \nu_0 \cdots \nu_d \sim N$. Далее, если $f_a, f_{a'} \in F_2$, то

$$\|f_a - f_{a'}\|_\infty = N^{-\beta} \|\varphi\|_\infty^{d+1}.$$

Наконец, если $f_a \in F_2$, то $\|f_a\| = N^{-\beta-1/2} \|\varphi\|_2^{d+1}$. Поэтому, полагая $2\delta = N^{-\beta} \|\varphi\|_\infty^{d+1}$ и выбирая $N \sim c\varepsilon^{-2/(1+2\beta)} (\ln \varepsilon^{-1})^{1/(1+2\beta)}$, где c — подходящая постоянная, найдем, что

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon^{(\infty)}(\Theta) &\geq \sup_\delta \delta \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(F_2) - 1}{C_{2\delta}(F_2) + 1} \right) \\ &\geq cN^{-\beta} \left(1 - c \frac{N^{-2\beta-1}}{\varepsilon^2 \ln N} \right) \geq c\varepsilon^{2\beta/(1+2\beta)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta/(1+2\beta)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 6.1 теперь есть очевидное следствие теорем 6.2 и 6.4.

6.3. В этом пункте мы продолжаем изучение границы $\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta)$ для того случая, когда Θ определяется границами L_2 -норм смешанных производных. Напомним, что случай $p = 2$ был рассмотрен выше, пример 4.1. Мы покажем здесь, что этот результат сохраняется для всех $p < \infty$. Для простоты ограничимся случаем периодических функций $\theta = \theta(x_1, \dots, x_d)$, считая их определенными на кубе $\Gamma = [-\pi, \pi]^d$ и периодическими с периодом 2π . Для функций $\theta \in L_p$ определен их ряд Фурье $\theta(x) \sim \sum_r \theta_r e^{i(x,r)}$, и ниже мы считаем, что для всех функций $\theta \in \Theta$ выполнено условие

$$\theta_r = 0, \quad \text{если } r_1 \cdots r_d = 0, \quad r = (r_1, \dots, r_d). \quad (6.17)$$

Обозначим $S_p(\beta, B)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, совокупность всех функций $f \in L_p(\Gamma)$, удовлетворяющих условию (6.17) и таких, что

$$\left\| \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_d}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_d^{\beta_d}} f \right\|_p \leq B.$$

Теорема 6.5. Пусть $\Theta \subseteq S_p(\beta, B)$, $p < \infty$. Тогда

$$\Delta_p^{(\varepsilon)}(\Theta) \leq c\varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta(l-1)/(2\beta+1)},$$

где $\beta = \min(\beta_1, \dots, \beta_d)$, а $l \geq 1$ есть количество β_j , совпадающих с β . Константа c зависит от p, β, B .

Доказательство следует принципиальной схеме п. 6.2 и в части, касающейся использования теории приближений, опирается на следующий результат Б.С. Митягина [7]:

Пусть

$$f(x) \sim \sum_r f_r e^{i(x,r)} \in S_p(1, \beta).$$

Пусть

$$T_R f = \sum_r \varphi \left(\frac{|r_1|^{\beta_1} \dots |r_d|^{\beta_d}}{R} \right) f_r e^{i(r, x)}, \quad (6.18)$$

где $\varphi(\lambda)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq \varphi \leq 1$ и

$$\varphi(\lambda) \equiv 1 \quad \text{в } |\lambda| \leq 1, \quad \varphi(\lambda) \equiv 0 \quad \text{в } |\lambda| \geq 2. \quad (6.19)$$

Тогда

$$|f - T_R f|_p \leq c_p |f|_p R^{-1}, \quad p < \infty. \quad (6.20)$$

Обозначим $\tilde{T}_R$ оператор, определяемый опять равенством (6.16), где функция $\tilde{\varphi}(\lambda)$ удовлетворяет (6.19) за одним исключением, именно, $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Очевидно, что для f , удовлетворяющих условию (6.17), $T_R f = \tilde{T}_R f$.

Оператор $\tilde{T}_R$ — это интегральный оператор с ядром $V_R(x - y)$, где $V_R(x)$ есть тригонометрический полином

$$(2\pi)^{-d} \sum \tilde{\varphi} \left(\frac{|r_1|^{\beta_1} \dots |r_d|^{\beta_d}}{R} \right) e^{i(r, x)}.$$

Оценим $\theta(x)$ посредством

$$\theta_R(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{T}_R(\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon) dt.$$

Как и выше (см. п. 6.3) и в силу равенства $T_R \theta = \tilde{T}_R \theta$

$$|\theta - \theta_R|_p \leq |\theta - T_R \theta|_p + \varepsilon \left| \frac{1}{T} \int_0^T \langle V_R(x - \cdot), dw(t) \rangle \right|_p.$$

Интеграл $(\varepsilon/T) \int_0^T \langle V_R, dw \rangle$ — это случайный тригонометрический полином

$$t_r(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \sum \tilde{\varphi} \left(\frac{|r_1|^{\beta_1} \dots |r_d|^{\beta_d}}{R} \right) e^{i(r, x)} \xi_r,$$

где ξ_r — независимые стандартные гауссовские величины. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |t_r|_p^p &\leq C^p p^{p/2} \left(\text{card} \{r = (r_1, \dots, r_d): |r_j| \geq 1, \right. \\ &\quad \left. |r_1^{\beta_1}| \dots |r_d^{\beta_d}| \leq 2R\} \right)^{p/2} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \right)^p. \end{aligned}$$

При больших R

$$\text{card} \{r: |r_j| \geq 1, |r_1^{\beta_1}| \dots |r_d^{\beta_d}| \leq 2R\} \sim c R^{1/\beta} (\ln R)^{l-1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} |t_r|_p \leq C \sqrt{p} \frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} R^{1/(2\beta)} (\ln R)^{(l-1)/2}. \quad (6.21)$$

Выбирая здесь $R = (\varepsilon/\sqrt{T})^{-2\beta/(2\beta+1)}(\ln(\sqrt{T}/\varepsilon))^{-(l-i)2\beta/(2\beta+1)}$, найдем из (6.20) и (6.21), что

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) \leq c \sqrt{p} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \right)^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon} \right)^{(l-1)\beta/(2\beta+1)}.$$

Перейдем к оценкам снизу. Они достигаются с помощью следующей теоремы.

Теорема 6.6. Пусть для какой-нибудь пары (β, B) $\Theta \supseteq S_p(B, \beta)$, $2 \leq p < \infty$. Тогда

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) \geq c_p \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{(l-1)\beta/(2\beta+1)}, \quad c_p > 0.$$

Доказательство следует идеям п. 6.2. Будем считать $\beta_1 = \dots = \beta_l = \beta < \beta_{l+1} \leq \dots \leq \beta_d$. Рассмотрим функции

$$\varphi_m(x) = \prod_{j=1}^l \cos m_j x_j \prod_{l+1}^d \cos x_j,$$

где вектор $m = (m_1, \dots, m_d)$ таков, что $m_j \geq 1$, а $m_1 \dots m_d \leq N$. Выбор большого числа N мы уточним позднее. Общее число таких функций $M \sim cN(\ln N)^{l-1}$. Рассмотрим теперь функции

$$f_\varepsilon(x) = \frac{N^{-\beta}}{\sqrt{M}} \sum_m \varepsilon_m \varphi_m(x),$$

где $\varepsilon_m = \pm 1$. Общее число функций f_ε есть 2^M . Покажем, что большая часть их лежит в $S_p(\cdot, \beta)$. С этой целью будем на некоторое время рассматривать коэффициенты $\{\varepsilon_m\}$ как одинаково распределенные независимые случайные величины, принимающие с равными вероятностями значения ± 1 .

По неравенству Хинчина (см., например, [24])

$$\mathbb{E} \left| \sum_m a_m \xi_m \right|^p \leq K^p p^{p/2} \left(\sum a_m^2 \right)^{p/2},$$

где K — постоянная. В частности,

$$\mathbb{E} \left| \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_d}}{\partial x_d^{\beta_d}} f_\varepsilon(x) \right|_p^p \leq K^p p^{p/2}$$

и, значит,

$$\mathbb{E} \left| \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_d}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}} f_\varepsilon \right|_p \leq K \sqrt{p}.$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_d}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_d^{\beta_d}} f_\varepsilon \right|_p > B \right\} \leq \frac{K \sqrt{p}}{B}.$$

Следовательно, умножая, если нужно, f_ε на множитель $\lambda = \lambda(B)$, можно добиться того, что $\mathbf{P}\{\lambda f_\varepsilon \in S_p(B, \beta)\} \geq \frac{1}{2}$. Последнее неравенство означает, что, по крайней мере, 2^{m-1} из 2^m функций λf_ε лежат в $S_p(B, \beta)$. Обозначим этот последний набор функций f_ε через F и будем для простоты считать $\lambda = 1$. Будем обозначать F также и множество соответствующих векторов ε . Если $\varepsilon, \varepsilon' \in F$, то для $p \geq 2$

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}|_p &\geq (2\pi)^{1/p-1/2} |f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}|_2 = (2\pi)^{1/p} \frac{N^{-\beta}}{\sqrt{M}} \left(\sum_m |\varepsilon_m - \varepsilon'_m|^2 \right)^{1/2} \\ &= (2\pi)^{1/p} \frac{N^{-\beta}}{\sqrt{M}} |\varepsilon - \varepsilon'|. \end{aligned}$$

Пусть ε^0 — фиксированный вектор из F . Число точек в шаре $U_\gamma = \{\varepsilon: |\varepsilon^0 - \varepsilon| \leq \gamma\sqrt{M}\}$: $\text{card } U_\gamma = \sum_{k \leq \gamma M/2} C_M^k$. Обозначим μ_M число успехов в серии из M испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Тогда

$$\text{card } U_\gamma = 2^M \sum_{k \leq \gamma M/2} 2^{-M} C_M^k = 2^M \mathbf{P}\left\{\mu_M < \frac{\gamma M}{2}\right\}.$$

Из элементарных теорем о больших отклонениях (неравенства Бернштейна или Хефдинга) следует, что найдется число $c < 1$ такое, что $\text{card } U_\gamma \leq 2^{cM}$. Поэтому в F найдется его подмножество $F_1 \subseteq F$, содержащее не менее $\frac{1}{2} 2^{M(1-c)}$ точек, такое, что для всех $f_\varepsilon, f_{\varepsilon'} \in F_1$

$$|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}|_p \geq (2\pi)^{1/p} \gamma N^{-\beta}.$$

Пусть теперь $\delta = \frac{1}{2} (2\pi)^{1/p} \gamma N^{-\beta}$. Тогда

$$\Delta_p^{(\varepsilon)}(\Theta) \geq \delta \left(1 - \frac{\mathcal{C}_\varepsilon(F_1) + 1}{C_{2\delta}(F_1) - 1} \right).$$

Мы видели, что $C_{2\delta}(F_1) \geq M(1-c) - 1$. В силу (4.3) $\mathcal{C}_\varepsilon(F_1) \geq \pi^d / (2N^{2\beta} \varepsilon^2)$. Поэтому выбирая $N \asymp \varepsilon^{-2/(2\beta+1)} (\ln(1/\varepsilon))^{-(l-1)/(2\beta+1)}$, придем к неравенству теоремы.

Соединив вместе неравенства двух предыдущих теорем, мы придем к теореме 6.7.

Теорема 6.7. Пусть $\Theta = S_p(B, \beta)$ для каких-нибудь B, β . Тогда

$$\Delta_\varepsilon^{(p)}(\Theta) \asymp \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta(l-1)/(2\beta+1)}, \quad 2 \leq p < \infty.$$

Заметим, что случай $p = \infty$ остался неразобраным. Можно ожидать, что $\Delta_\varepsilon^{(\infty)}(\Theta) \asymp \varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)} (\ln(1/\varepsilon))^{\beta/(2\beta+1)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах. — Успехи матем. наук, 1959, т. 14, в. 2, с. 3–86.

2. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
3. Ibragimov I., Khasminskii R. Some estimation problems in infinite dimensional Gaussian white noise. — In: Festschrift for L. Le Cam: Research papers in probability and statistics. Ed. by Pollard D. et al. New York: Springer-Verlag, 1997, p. 259–274.
4. Гельфанд И. М., Яглом А. М. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции. — Успехи матем. наук, 1957, т. 12, в. 1, с. 3–52.
5. Cover T., Thomas J. Information Theory. New York: Wiley, 1991.
6. Бабенко К. И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами. — Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 5, с. 982–985.
7. Митягин Б. С. Приближение функций в пространствах L^p и C и на торе. — Матем. сб., 1962, т. 58, № 4, с. 397–414.
8. Temljakov V. N. Approximation of Periodic Functions. New York: Nova Sci. Publ., 1993.
9. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. — Успехи матем. наук, 1960, т. 15, в. 3, с. 81–120.
10. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
11. Ченцов Н. Н. Оценка неизвестной плотности распределения по наблюдениям. — Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 1, с. 45–48.
12. Agmon S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1965, 291 p.
13. Jerome J. W. Asymptotic estimates of the n -widths in Hilbert space. — Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 33, № 2, p. 367–372.
14. Пинскер М. С. Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского шума. — Проблемы передачи информации, 1980, т. 16, № 2, с. 52–68.
15. Belitser E., Levit B. On minimax filtering over ellipsoids. Preprint 863. Utrecht: Dept. Math. Univ. Utrecht, 1994.
16. Ченцов Н. Н. Об оценке неизвестного среднего многомерного нормального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 619–634.
17. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Об оценке бесконечномерного параметра в гауссовском белом шуме. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1053–1055.
18. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
19. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
20. Стейн Е. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
21. Бесов О. В., Ильин В. П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения. — Матем. сб., 1968, т. 75, № 4, с. 483–495.
22. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Об оценке плотности распределения. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 98, с. 61–85.
23. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Советское радио, 1974.
24. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 575 с.
25. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Задачи оценивания коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 417–438.

Поступила в редакцию
9.XII.1997