Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Махно, Сходимость решений одномерных стохастических уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 555–572

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:56:18

© 1999 г.

МАХНО С. Я.*

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

Рассматриваются одномерные стохастические уравнения, коэффициенты которых зависят от малого параметра нерегулярным образом. Получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости их решений к решению стохастического уравнения в терминах коэффициентов. Приведены примеры.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения, предельные теоремы, необходимые условия сходимости, достаточные условия сходимости.

0. Введение. В работе рассматриваются решения одномерных однородных стохастических уравнений, зависящих от малого параметра ε , и изучается их слабая сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом не предполагается ни равномерная ограниченность по параметру коэффициента сноса, ни существование пределов у коэффициентов уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельный процесс также будет решением стохастического уравнения. Получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости решений стохастических уравнений в терминах их коэффициентов.

Близкая по постановке проблема рассматривалась в работе [4]. Однако там исследовалась слабая сходимость преобразований от решений уравнений, уничтожающих снос.

Работа построена по следующему плану. В этом пункте вводятся предположения и формулируется теорема, содержащая основные результаты статьи. Доказательство теоремы проводится по частям в пп. 1 и 2. Вспомогательные результаты доказываются в п. 3, в п. 4 рассмотрены конкретные классы случайных процессов и исследуется их поведение, основываясь на полученных результатах.

Обозначим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ основное вероятностное пространство с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, E_1 — одномерное евклидово пространство,

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, ул. Р. Люксембург, 74, 340114 Донецк, Украина; e-mail: makhno@iamm.ac.donetsk.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 94-0378.

Е-символ математического ожидания. Рассматриваемые решения стохастических уравнений будут марковскими процессами. Поэтому будет использоваться обычная символика теории марковских процессов. Производная функции $f(x)$ будет обозначаться $\dot{f}(x)$. Через C, K, k, N будут обозначаться различные постоянные, с индексами, если это необходимо, $\chi(A)$ — индикатор множества A .

Пусть

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) = x + \int_0^t [b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))] ds \\ + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (0.1)$$

В уравнении (0.1) $(w(t), \mathcal{F}_t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс, ε — малый параметр. Пусть λ, Λ — постоянные такие, что $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Будем говорить, что пара функций $(f(x), g(x))$ принадлежит классу $\mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, если эти функции измеримы и выполнены неравенства $|f(x)| \leq \Lambda, \lambda \leq g(x) \leq \Lambda$.

Обозначим $a_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon^2(x)$ и введем условие (I).

У с л о в и е (I). I₁. При любом $\varepsilon > 0$ функции $b_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x), \sigma_\varepsilon(x)$ измеримы, решение уравнения (0.1) единственно в слабом смысле.

I₂. Пара $(g_\varepsilon, a_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

I₃. Для любого $x \in E_1$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right| \leq \Lambda.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\}, \quad f_\varepsilon(x) = \int_0^x F_\varepsilon(y) dy, \\ \beta_\varepsilon(x) &= 2 \int_0^x F_\varepsilon(y) \left[\int_0^y \frac{b(z) - b_\varepsilon(z)}{F_\varepsilon(z) a_\varepsilon(z)} dz + \beta \right] dy, \\ \alpha_\varepsilon(x) &= \int_0^x \frac{a(y) - a_\varepsilon(y)(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(y))^2}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy, \\ \gamma_\varepsilon(x) &= \int_0^x \frac{g(y) - g_\varepsilon(y)(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(y))}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy. \end{aligned}$$

С введенными функциями свяжем следующие условия.

У с л о в и е (β). Существуют измеримая ограниченная функция $b(x)$ и постоянная β такие, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(x) = 0$ для любого $x \in E_1$.

У с л о в и е (α). Существует измеримая функция $a(x)$ такая, что $\lambda \leq a(x) \leq \Lambda$ и для любого $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(x) = 0.$$

У с л о в и е (γ) . Существует измеримая ограниченная функция $g(x)$ такая, что для любого $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon(x) = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Условиями $(\beta), (\alpha), (\gamma)$ функции $b(x), a(x), g(x)$ и постоянная β определяются однозначно (лемма 2 из п. 3).

Обозначим через $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_t, t \in [0, T])$ пространство функций $f(t)$, непрерывных на интервале $[0, T]$, $C_0^\infty(E_1)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Пусть μ_ε — мера на $\mathcal{C}[0, T]$, соответствующая процессу ξ_ε . Будет изучаться слабая сходимость мер μ_ε . Этот тип сходимости обозначим $\Rightarrow$. Предельная мера μ будет соответствовать процессу $\xi(t)$ — решению уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t B(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (0.2)$$

Положим $a(x) = \sigma^2(x)$ и введем условие (II).

У с л о в и е (II). Пара функций $(B, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

Сформулируем основные результаты работы

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть выполнены условия (I), $(\beta), (\alpha)$ и (γ) . Тогда $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ и процесс $\xi(t)$ является решением уравнения (0.2) с функцией $B(x) = b(x) + g(x)$.

2. Пусть $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, выполнены условия (I), (II) и существует измеримая ограниченная функция $G(x)$ такая, что при каждом $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x G(y) dy.$$

Тогда выполнено условие (β) с функцией $b(x) = B(x) - a(x)G(x)$ и некоторой постоянной β , выполнено условие (α) и выполнено условие (γ) с функцией $g(x) = a(x)G(x)$.

3. Пусть $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, выполнены условия (I), (II) и существует измеримая ограниченная функция $V(x)$ такая, что для любого $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x V(y) dy.$$

Тогда выполнено условие (β) с функцией $b(x) = a(x)V(x)$ и некоторой постоянной β , выполнено условие (α) , выполнено условие (γ) с функцией $g(x) = B(x) - a(x)V(x)$.

Следствие 1. Пусть в уравнении (0.1) функция $g_\varepsilon(x) \equiv 0$. Для сходимости $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (β) с некоторой постоянной β и функцией $b(x) = B(x)$ и условие (α) .

Следствие 2. Пусть в уравнении (0.1) функция $b_\varepsilon(x) \equiv 0$. Для сходимости $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (α) и условие (γ) с функцией $g(x) = B(x)$ (в этом случае $\beta = 0$, $b(x) \equiv 0$).

З а м е ч а н и е 2. Ниже будет доказано, что при условиях пп. 2 и 3 теоремы 1 существует дифференцируемая функция $f(x)$ такая, что при каждом $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x).$$

Постоянная β из условия (β) определяется равенством $(2\beta + 1)f(0) = 1$.

1. Достаточные условия сходимости. В этом пункте доказывается утверждение 1 сформулированной выше теоремы 1. Разобьем доказательство на несколько этапов.

а) Докажем слабую компактность семейства мер μ_ε на пространстве $\mathcal{C}[0, T]$. Применим формулу Ито к функции $\beta_\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) &= \beta_\varepsilon(x) + \int_0^t \left[b(\xi_\varepsilon(s)) - b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \end{aligned}$$

Прибавляя это соотношение к уравнению (1), получим

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) + \beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) &= x + \beta_\varepsilon(x) + \int_0^t \left[b(\xi_\varepsilon(s)) + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \right] (\sigma_\varepsilon(s)) dw(s). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Обозначим $\eta_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon(t) + \beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))$. Из отмеченных в лемме 3 (см. п. 3) свойств функций $\beta_\varepsilon(x)$ вытекает, что существует постоянная K такая, что

$$|b(x) + \dot{\beta}_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x)| + |\sigma_\varepsilon(x) (1 + \dot{\beta}_\varepsilon(x))| \leq K(1 + |x|).$$

Используя эти оценки, оценки для процесса $\xi_\varepsilon(t)$ леммы 5, из (1.1) стандартно получаем [3, с. 120], что

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} |\eta_\varepsilon(t)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad \mathbf{E} |\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| \leq |t - s|^2.$$

Поэтому [2, лемма 2, с. 355] семейство мер, порожденное процессами η_ε , слабо компактно на пространстве $\mathcal{C}[0, T]$. В силу леммы 6

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 = 0. \quad (1.2)$$

Тогда семейство мер, порожденных процессами $\eta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) = \xi_\varepsilon(t)$, на $\mathcal{C}[0, T]$ также слабо компактно.

б) Пусть $\Phi(x) \in C_0^\infty(E_1)$, $\phi_s(x)$ — непрерывный ограниченный C_s -измеримый функционал. Применяя формулу Ито к процессу $\eta_\varepsilon(t)$ из (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \left[\Phi(\eta_\varepsilon(t)) - \Phi(\eta_\varepsilon(s)) \right. \\ \left. - \int_s^t \left\{ \dot{\Phi}(\eta_\varepsilon(v)) \left(b(\xi_\varepsilon(v)) + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(\eta_\varepsilon(v)) a_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \left(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right)^2 \right\} dv \right] = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это соотношение следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \left[\Phi(\xi_\varepsilon(t)) - \Phi(\xi_\varepsilon(s)) \right. \\ \left. - \int_s^t \left\{ \dot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) \left[b(\xi_\varepsilon(v)) + g(\xi_\varepsilon(v)) \right] + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) a(\xi_\varepsilon(v)) \right\} dv \right] \\ = I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 + I_\varepsilon^3 + I_\varepsilon^4. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В равенстве (1.3)

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^1 &= \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \left[\Phi(\xi_\varepsilon(t)) - \Phi(\eta_\varepsilon(t)) - \Phi(\xi_\varepsilon(s)) + \Phi(\eta_\varepsilon(s)) \right], \\ I_\varepsilon^2 &= \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \int_s^t \left[\left(\dot{\Phi}(\eta_\varepsilon(v)) - \dot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) \right) \left(b(\xi_\varepsilon(v)) + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\ddot{\Phi}(\eta_\varepsilon(v)) - \ddot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) \right) a_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \left(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right)^2 \right] dv, \\ I_\varepsilon^3 &= \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \int_s^t \dot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) \left[\left(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) - g(\xi_\varepsilon(v)) \right] dv, \\ I_\varepsilon^4 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \int_s^t \ddot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) \left[a_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \left(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right)^2 - a(\xi_\varepsilon(v)) \right] dv. \end{aligned}$$

с) Покажем, что предел правой части в (1.3) равен нулю. В силу (1.2) и оценок леммы 5, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^2 = 0. \quad (1.4)$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^3 = 0. \quad (1.5)$$

Для этого в силу леммы 8 достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \left| \int_s^t \left[g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \left(1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \right) - g(\xi(v)) \right] dv \right| = 0. \quad (1.6)$$

Обозначим

$$\lambda_\varepsilon(x) = 2 \int_0^x F_\varepsilon(y) \gamma_\varepsilon(y) dy.$$

Очевидно, что с некоторой постоянной K справедливы следующие неравенства:

$$|\lambda_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^3), \quad |\dot{\lambda}_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^2), \quad (1.7)$$

и для любого $N < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |\lambda_\varepsilon(x)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |\dot{\lambda}_\varepsilon(x)| = 0. \quad (1.8)$$

Применяя формулу Ито, получим

$$\begin{aligned} \int_s^t \left[g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) (1 + \dot{\beta}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v))) - g(\xi_\varepsilon(v)) \right] dv &= \lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) - \lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) \\ &+ \int_s^t \dot{\lambda}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) dv + \int_s^t \dot{\lambda}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(v)) dw. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Оценим слагаемые в правой части (1.9). Используя (1.7), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))| &\leq \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))| \chi \left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| \leq K \right) \\ &+ \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))| \chi \left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| > K \right) \leq \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))| \\ &\times \chi \left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| \leq K \right) + \frac{1}{K} \left(1 + \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)|^6 \right)^{1/2} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)|. \end{aligned}$$

Используя (1.8) и оценки леммы 5, перейдем к пределу в этом неравенстве вначале при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $K \rightarrow \infty$. Получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\lambda_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))| = 0. \quad (1.10)$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\dot{\lambda}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 = 0. \quad (1.11)$$

Из соотношений (1.9)–(1.11) легко следует (1.6), а значит, и (1.5).

Аналогично доказывается равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^4 = 0. \quad (1.12)$$

Для этого необходимо применить формулу Ито к функции $\hat{\lambda}_\varepsilon(x) = 2 \int_0^x F_\varepsilon(y) \alpha_\varepsilon(y) dy$.

d) Из (1.3), используя соотношения (1.4), (1.5) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \phi_s(\xi_\varepsilon) \left[\Phi(\xi_\varepsilon(t)) - \Phi(\xi_\varepsilon(s)) \right. \\ \left. - \int_s^t \left\{ \dot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) [b(\xi_\varepsilon(v)) + g(\xi_\varepsilon(v))] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(\xi_\varepsilon(v)) a(\xi_\varepsilon(v)) \right\} dv \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Обозначим через μ одну из предельных точек последовательности μ_ε и через E^μ — усреднение по мере μ . Если бы функции $b(x)$, $g(x)$, $a(x)$ были непрерывны, то обоснование предельного перехода в (1.13) не вызывало бы трудностей. Для лишь измеримых функций предельный переход обосновывается как в [3, с. 127], с использованием оценки Крылова (лемма 7). Таким образом, из (1.13) имеем

$$E^\mu \phi_s(x) \left[\Phi(x(t)) - \Phi(x(s)) - \int_s^t \left\{ \dot{\Phi}(x(v)) [b(x(v)) + g(x(v))] + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(x(v)) a(x(v)) \right\} dv \right] = 0.$$

То есть мера μ есть решение проблемы мартингалов для коэффициента сноса, равного $b(x) + g(x)$, и коэффициента диффузии, равного $a(x)$. Согласно [1], существует единственное решение проблемы мартингалов для указанных коэффициентов. Следовательно, $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ и мера μ соответствует решению стохастического уравнения (0.2) с функциями $B(x) = b(x) + g(x)$, $\sigma(x) = \sqrt{a(x)}$. Утверждение 1 теоремы доказано.

2. Необходимые условия сходимости. В этом пункте доказываются необходимые условия сходимости решений стохастических уравнений, сформулированные в теореме 1.

Пусть $h(x)$ — некоторая функция. Обозначим

$$M(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{h(y)}{a(y)} dy \right\}$$

и введем условие (III).

У с л о в и е (III). Существует постоянная k такая, что для любого $x \in E_1$:

$$(III_1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x F_\varepsilon(y) dy = k \int_0^x M(y) dy,$$

$$(III_2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{dy}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} = \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dy}{M(y) a(y)}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (I), (III) и пара $(h, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$. Пусть, кроме того, существует измеримая ограниченная функция $G(x)$ такая, что для каждого $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x G(y) dy.$$

Справедливы следующие утверждения:

- 1) выполнено условие (β) с функцией $b(x) = h(x)$ и постоянной β такой, что $(2\beta + 1)k = 1$;
- 2) выполнено условие (α) ;
- 3) выполнено условие (γ) с функцией $g(x) = a(x)G(x)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Используя условие (III), находим

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 \int_0^x F_\varepsilon(y) \int_0^y \frac{h(z)}{F_\varepsilon(z) a_\varepsilon(z)} dz dy + (2\beta + 1) \int_0^x F_\varepsilon(y) dy - x \right] \\ &= 2 \int_0^x M(y) \int_0^y \frac{h(z)}{M(z) a(z)} dz dy + (2\beta + 1) \int_0^x M(y) dy - x \\ &= [(2\beta + 1)k - 1] \int_0^x M(y) dy = 0.\end{aligned}$$

Условие (β) выполнено. Проверим условие (α) . Имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^x \frac{a(y)}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x F_\varepsilon(y) \left(2 \int_0^y \frac{h(z)}{F_\varepsilon(z) a_\varepsilon(z)} dz + \frac{1}{k} \right)^2 dy \right] \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dy}{M(y)} - k \int_0^x M(y) \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{M(y)} - 1 \right) + \frac{1}{k} \right)^2 dy = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение 2) справедливо. Проверим условие (γ) :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^x \frac{a(y) G(y)}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy - \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} \left(2 \int_0^y \frac{h(z)}{F_\varepsilon(z) a_\varepsilon(z)} dz + \frac{1}{k} \right) dy \right] \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x \frac{G(y)}{M(y)} dy - \int_0^x \left[\frac{2}{k} \int_0^y \frac{h(z)}{M(z) a(z)} dz + \frac{1}{k} \right] G(y) dy = 0.\end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

Положим

$$\begin{aligned}F(x) &= \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{B(y)}{a(y)} dy \right\}, \\ Q(x) &= \exp \left\{ -2 \int_0^x \left(\frac{B(y)}{a(y)} - G(y) \right) dy \right\}.\end{aligned}$$

Доказательство утверждения 2 теоремы 1. Обозначим

$$Z_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y) + g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\}, \quad z_\varepsilon(x) = \int_0^x Z_\varepsilon(y) dy.$$

Согласно лемме 10, (п. 3) существует подпоследовательность этих функций (выделим ее индексом $\hat{\varepsilon}$) и постоянная k такие, что

$$\begin{aligned}\lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} \int_0^x F_{\hat{\varepsilon}}(y) dy &= \lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} \int_0^x Z_{\hat{\varepsilon}}(y) \exp \left\{ 2 \int_0^y \frac{g_{\hat{\varepsilon}}(z)}{a_{\hat{\varepsilon}}(z)} dz \right\} dy \\ &= k \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^y \frac{B(z) - a(z) G(z)}{a(z)} dz \right\} dy \\ &= k \int_0^x Q(y) dy.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Вновь используя лемму 10, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{dy}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{a_\varepsilon(y) Z_\varepsilon(y)} \exp \left\{ -2 \int_0^y \frac{g_\varepsilon(z)}{a_\varepsilon(z)} dz \right\} dy = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x \frac{1}{a(y)} \exp \left\{ 2 \int_0^y \frac{B(z) - G(z) a(z)}{a(z)} dz \right\} dy \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dy}{a(y) Q(y)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Докажем, что постоянная k в (2.1), (2.2) не зависит от выбора указанных подпоследовательностей. Пусть по одной подпоследовательности равенства (2.1), (2.2) выполняются с постоянной k_1 , по другой — с постоянной k_2 . Тогда условие (III) выполнено по одной подпоследовательности с функцией $h(x) = B(x) - a(x) G(x)$ и постоянной k_1 , а по другой подпоследовательности оно выполнено с той же функцией $h(x)$ и постоянной k_2 . В силу теоремы 2 это означает, что условие (β) выполняется с функцией $b(x) = B(x) - a(x) G(x)$ и двумя постоянными β_1 и β_2 . Согласно лемме 2, (п. 3) $\beta_1 = \beta_2$, а следовательно, и $k_1 = k_2$. Доказываемое утверждение следует из теоремы 2. Эта часть теоремы 1 доказана.

Доказательство утверждения 3 теоремы 1. Положим

$$r_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy.$$

Поскольку $|\dot{r}_\varepsilon(x)| \leq \lambda^{-1} \Lambda$, то семейство функций $r_\varepsilon(x)$ относительно компактно, и, следовательно, существует подпоследовательность $r_{\varepsilon}(x)$ и непрерывная функция $r(x)$ такие, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_{\varepsilon}(x) = r(x)$. Но тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_{\varepsilon}(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^y V(z) dz - 2r(y) \right\} dy.$$

С другой стороны, согласно лемме 10, для некоторой постоянной k справедливо равенство

$$-2 \int_0^x V(y) dy - 2r(x) = -2 \int_0^x \frac{B(y)}{a(y)} dy + \ln k.$$

Так как $r(0) = 0$, то $k = 1$ и

$$r(x) = \int_0^x \frac{B(y) - V(y) a(y)}{a(y)} dy.$$

То есть выполнены условия утверждения 2 теоремы 1 с функцией

$$G(x) = \frac{B(x) - V(x) a(x)}{a(x)}.$$

Поэтому утверждение 3 следует из утверждения 2. Теорема доказана.

3. Вспомогательные утверждения. В этом пункте собраны утверждения, использованные выше при доказательстве основных результатов.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (I), $l(x)$ — измеримая ограниченная функция, δ — постоянная, $u_\varepsilon(x)$ — решение уравнения

$$\frac{1}{2}a_\varepsilon(x)\ddot{u}_\varepsilon(x) + b_\varepsilon(x)\dot{u}_\varepsilon(x) = l(x), \quad (3.1)$$

$$u_\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{u}_\varepsilon(0) = \delta.$$

Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 0$ при каждом $x \in E_1$, то $\delta = 0$ и почти всюду $l(x) = 0$.

Доказательство. Решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x F_\varepsilon(y) \left[2 \int_0^y \frac{l(z)}{F_\varepsilon(z)a_\varepsilon(z)} dz + \delta \right] dy. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$L_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{dy}{F_\varepsilon(y)a_\varepsilon(y)}.$$

При условии (I) имеем с некоторой постоянной K :

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| + |L_\varepsilon(x) - L_\varepsilon(y)| \leq K|x - y|.$$

Следовательно, существуют непрерывные функции $f(x)$, $L(x)$, имеющие почти всюду ограниченные производные $\dot{f}(x)$, $\dot{L}(x)$, а также подпоследовательности $f_{\hat{\varepsilon}}(x)$, $L_{\hat{\varepsilon}}(x)$ такие, что равномерно на компактах

$$\lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} f_{\hat{\varepsilon}}(x) = f(x) = \int_0^x \dot{f}(y) dy, \quad \lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} L_{\hat{\varepsilon}}(x) = L(x) = \int_0^x \dot{L}(y) dy. \quad (3.3)$$

Используя (3.3), перейдем в (3.2) к пределу по указанным подпоследовательностям. Получим, что для любого $x \in E_1$

$$\int_0^x \dot{f}(y) \left[2 \int_0^y \dot{L}(z) l(z) dz + \delta \right] dy = 0.$$

Так как функции $f(x)$ и $L(x)$ монотонно возрастают, то $\dot{f}(x) > 0$, $\dot{L}(x) > 0$. В силу непрерывности функции в квадратных скобках имеем для любого $y \in E_1$:

$$2 \int_0^y \dot{L}(z) l(z) dz + \delta = 0.$$

Отсюда, положив $y = 0$, получим, что $\delta = 0$, а затем и $l(x) = 0$ почти всюду. Лемма доказана.

Лемма 2. Условиями (β) , (α) , (γ) функции $b(x)$, $a(x)$, $g(x)$ и постоянная β определяются однозначно.

Доказательство. Пусть условие (β) выполняется для функций $b_1(x), b_2(x)$ с постоянными β_1, β_2 соответственно. Положим

$$\beta_\varepsilon^i(x) = 2 \int_0^x F_\varepsilon(y) \left[\int_0^y \frac{b_i(z) - b_\varepsilon(z)}{F_\varepsilon(z) a_\varepsilon(z)} dz + \beta_i \right] dy.$$

Тогда функция $\beta_\varepsilon^1(x) - \beta_\varepsilon^2(x)$ является решением уравнения (3.1) с функцией $l(x) = b_1(x) - b_2(x)$ и постоянной $\delta = 2(\beta_1 - \beta_2)$. В силу леммы 1 получим, что $\beta_1 = \beta_2$ и почти всюду $b_1(x) = b_2(x)$.

Пусть условие (α) выполняется с функциями $a_1(x)$ и $a_2(x)$. Определим функции

$$\alpha_\varepsilon^i(x) = \int_0^x \frac{a_i(y) - \alpha_\varepsilon(y) (1 + \dot{\beta}_\varepsilon(y))^2}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy.$$

Из условия (α) и (3.3) получим, что для любого $x \in E_1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\alpha_\varepsilon^1(x) - \alpha_\varepsilon^2(x)) = \int_0^x \dot{L}(y) (a_1(y) - a_2(y)) dy = 0.$$

Таким образом, $a_1(x) = a_2(x)$ почти всюду.

Аналогично рассматривается условие (γ) . Лемма доказана.

Утверждения следующей леммы вытекают из сделанных предположений.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (I), (β) , (α) и (γ) . Существует постоянная K такая, что справедливы следующие неравенства:

- а) $|\beta_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^2)$, $|\dot{\beta}_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|)$;
- б) $|\alpha_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^3)$, $|\dot{\alpha}_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^2)$;
- в) $|\gamma_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|^2)$, $|\dot{\gamma}_\varepsilon(x)| \leq K(1 + |x|)$.

Кроме того, для любого $N < \infty$

д) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |\beta_\varepsilon(x)| = 0$;

е) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |\alpha_\varepsilon(x)| = 0$;

ф) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |\gamma_\varepsilon(x)| = 0$.

Поскольку функция $f_\varepsilon(x)$ при каждом ε монотонно возрастает, то она имеет обратную функцию, которую обозначим $\phi_\varepsilon(x)$.

Лемма 4. При условии (I) справедливы следующие неравенства:

- а) $\exp\{-2\Lambda\} \leq F_\varepsilon(x) \leq \exp\{2\Lambda\}$;
- б) $|f_\varepsilon(x)| \leq \exp\{2\Lambda\}|x|$;
- в) $\exp\{-2\Lambda\} \leq \phi_\varepsilon(x) \leq \exp\{2\Lambda\}$;
- д) $|\phi_\varepsilon(x)| \leq \exp\{2\Lambda\}|x|$.

Доказательство. Неравенства а), б) есть следствия предположений. Далее,

$$\dot{\phi}_\varepsilon(x) = \frac{1}{f_\varepsilon(\phi_\varepsilon(x))} = \frac{1}{F_\varepsilon(\phi_\varepsilon(x))}.$$

Отсюда и из а) следует утверждение с). Очевидно, что $\phi_\varepsilon(0) = 0$. Используя с), получим $|\phi_\varepsilon(x)| = |\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(0)| \leq \exp\{2L\} |x|$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполнено условие (I). Для любого m существует постоянная K_m такая, что

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(s)|^m \leq K_m(1 + |x|^m).$$

Для любых $0 \leq s \leq t \leq T$ существует постоянная K такая, что

$$\mathbf{E} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)|^4 \leq K|t - s|^2.$$

Доказательство. Применяя формулу Ито, получим

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) &= f_\varepsilon(x) + \int_0^t \dot{f}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \dot{f}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \end{aligned} \quad (3.4)$$

При сделанных предположениях подынтегральные функции в (3.4) равномерно ограничены. Стандартно [3, с. 120] доказываются следующие оценки:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^m \leq K_m(1 + |x|^m),$$

$$\mathbf{E} |f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)) - f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))|^4 \leq K|t - s|^2.$$

Используя свойства функций $f_\varepsilon(x)$, $\phi_\varepsilon(x)$ из леммы 4, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)|^m &= \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\phi_\varepsilon(f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)))|^m \\ &\leq \exp\{2m\Lambda\} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^m \leq K_m(1 + |x|^m). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и второе утверждение леммы.

Лемма 6. Пусть выполнены условия (I) и (β). Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 = 0.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \quad (3.5)$$

В равенстве (3.5)

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon &= \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 \chi\left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| \leq N\right), \\ I_2^\varepsilon &= \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^2 \chi\left(\sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| \geq N\right). \end{aligned}$$

В силу свойства d) леммы 3

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1^\varepsilon = 0. \quad (3.6)$$

Далее, учитывая оценки леммы 5, имеем с некоторыми постоянными

$$\begin{aligned} I_2^\varepsilon &\leq \left(\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\beta_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))|^4 \right)^{1/2} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)| \geq N \right\} \\ &\leq \frac{K}{N^2} \left(1 + \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)|^8 \right)^{1/2} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_\varepsilon(t)|^2 \leq \frac{K_m}{N^2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу сначала по $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем по $N \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2^\varepsilon = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.5)–(3.7) следует утверждение леммы.

Лемма 7 (оценка Крылова). Пусть выполнены условия (I). Тогда существует постоянная K_p такая, что $\mathbf{E} \int_0^T |\Phi(\xi_\varepsilon(s))| ds \leq K_p \|\Phi\|_p$.

Доказательство. Процесс $f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t))$ определяется равенством (3.4). Для него оценка Крылова справедлива [3, с. 94]: $\mathbf{E} \int_0^T |\Psi(f(\xi_\varepsilon(s)))| ds \leq K_p \|\Psi\|_p$. Используя это неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^T |\Phi(\xi_\varepsilon(t))| dt &= \mathbf{E} \int_0^T \left| \Phi(\phi_\varepsilon(f_\varepsilon(\xi_\varepsilon(t)))) \right| dt \leq K_p \left[\int_{E_1} |\Phi(\phi_\varepsilon(x))|^p dx \right]^{1/p} \\ &= K_p \left[\int_{E_1} |\Phi(y)|^p F_\varepsilon(y) dy \right]^{1/p} \leq K_p \|\Phi\|_p. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть выполнено условие (I), функция $\psi_\varepsilon(t, x)$ такова, что $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\psi_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))|^2 \leq K$ и для любых $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \left| \int_s^t \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) dv \right| = 0. \quad (3.8)$$

Тогда для любых $\Phi(x) \in C_0^\infty$ и любых $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \left| \int_s^t \Phi(\xi_\varepsilon(v)) \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) dv \right| = 0$$

Доказательство. Пусть $\{t_i\}$ — некоторое разбиение отрезка $[s, t]$: $s \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = t$. Далее,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left| \int_s^t \Phi(\xi_\varepsilon(v)) \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) dv \right| \\ &\leq \mathbf{E} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\Phi(\xi_\varepsilon(v)) - \Phi(\xi_\varepsilon(t_i))] \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) dv \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E} \left| \Phi(\xi_\varepsilon(t_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) dv \right|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ второе слагаемое в (3.9) стремится к 0 в силу (3.8). Оценим первое слагаемое в (3.9). Очевидно, что оно не превосходит

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E} \left| \Phi(\xi_\varepsilon(v)) - \Phi(\xi_\varepsilon(t_i)) \right|^4 dv \right)^{1/4} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E} \left| \psi_\varepsilon(v, \xi_\varepsilon(v)) \right|^{4/3} dv \right)^{3/4} \\ & \leq K \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (v - t_i)^2 dv \right)^{1/4} (t_{i+1} - t_i)^{3/4} \leq K \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^{3/2} \\ & \leq K(t - s) \max_i |t_{i+1} - t_i|^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, первое слагаемое в (3.9) можно сделать сколь угодно малым равномерно по ε выбором разбиения. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $\xi(t)$ есть решение уравнения (0.2), выполнено условие (II) и для некоторых функций $f(x), l(x)$, любого $N < \infty$ и $x \in S_N$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}_x \left[f(\xi(\tau)) - \int_0^\tau l(\xi(s)) ds \right] = f(x), \quad (3.10)$$

где $\tau = \inf\{t \geq 0 : |\xi(t)| = N\}$. Тогда существует постоянная C такая, что

$$f(x) = f(0) + C \int_0^x F(y) dy + 2 \int_0^x F(y) \int_0^y \frac{l(z) dz}{F(z) a(z)} dy.$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2} a(x) \ddot{u}(x) + B(x) \dot{u}(x) = l(x), \quad -N < x < N,$$

$$u(-N) = f(-N), \quad u(N) = f(N).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x) = C_2(N) + C_1(N) \int_0^x F(y) dy + 2 \int_0^x F(y) \int_0^y \frac{l(z) dz}{F(z) a(z)} dy.$$

Постоянные $C_1(N)$ и $C_2(N)$ единственным образом определяются из граничных условий. Применим к функции $u(x)$ и процессу $\xi(t)$ формулу Ито:

$$\mathbf{E}_x u(\xi(\tau)) = u(x) + \mathbf{E}_x \int_0^\tau l(\xi(s)) ds.$$

Учитывая граничные условия, имеем для любого $x \in S_N$

$$\mathbf{E}_x \left[f(\xi(\tau)) - \int_0^\tau l(\xi(s)) ds \right] = u(x). \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.10) и (3.11), находим, что $f(x) = u(x)$ для любого $x \in S_N$. Отсюда $C_2(N) = f(0)$. Очевидно также, что $C_1(N) = \dot{u}(0) = \dot{f}(0) = C$. Лемма доказана.

Обозначим

$$Z_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y) + g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\},$$

$$z_\varepsilon(x) = \int_0^x Z_\varepsilon(y) dy, \quad v_\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{dy}{a_\varepsilon(y) Z_\varepsilon(y)}.$$

Лемма 10. Пусть $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ и выполнены условия (I), (II). Тогда существуют подпоследовательности $z_{\hat{\varepsilon}}(x)$, $v_{\hat{\varepsilon}}(x)$ и постоянная k такие, что равномерно на компактах

$$\lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} z_{\hat{\varepsilon}}(x) = k \int_0^x F(y) dy, \quad (3.12)$$

$$\lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} v_{\hat{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dy}{a(y) F(y)}. \quad (3.13)$$

Доказательство. При сделанных предположениях для любого $N < \infty$ существует постоянная K_N такая, что

$$\sup_{|x| \leq N} |\dot{z}_\varepsilon(x)| + \sup_{|x| \leq N} |\dot{v}_\varepsilon(x)| \leq K_N.$$

То есть семейства функций $z_\varepsilon(x)$, $v_\varepsilon(x)$ относительно компактны. Следовательно, существуют подпоследовательности $z_{\hat{\varepsilon}}(x)$, $v_{\hat{\varepsilon}}(x)$ и непрерывные функции $z(x)$, $v(x)$ такие, что для любого $N < \infty$

$$\lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |z_{\hat{\varepsilon}}(x) - z(x)| = \lim_{\hat{\varepsilon} \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq N} |v_{\hat{\varepsilon}}(x) - v(x)| = 0. \quad (3.14)$$

Обозначим $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0, |\xi_\varepsilon(t)| = N\}$. Применим формулу Ито:

$$\mathbf{E}_x z_\varepsilon(\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)) = z_\varepsilon(x), \quad x \in S_N. \quad (3.15)$$

Так как $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, а функционал $\tau(x(\cdot)) = \inf\{t > 0: |x(t)| = N\}$ непрерывен на пространстве $\mathcal{C}[0, T]$ по мере μ [2, с. 579], то случайные величины $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$ сходятся по распределению к случайной величине $\xi(\tau)$. Далее,

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E} z_\varepsilon(\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)) - \mathbf{E} z(\xi(\tau)) \right| &\leq \mathbf{E} \left| z(\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)) - z(\xi(\tau_\varepsilon)) \right| \\ &\quad + \left| \mathbf{E} z(\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)) - \mathbf{E} z(\xi(\tau)) \right|. \end{aligned}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу по подпоследовательности $\hat{\varepsilon} \rightarrow 0$. Последнее слагаемое в правой части неравенства сходится к нулю в силу отмеченной выше сходимости $\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$ к $\xi(\tau)$, а первое слагаемое стремится к нулю в силу (3.14). Имеем,

$$\mathbf{E}_x z(\xi(\tau)) = z(x), \quad x \in S_N. \quad (3.16)$$

Так как $z(0) = 0$, то в силу леммы 9 существует постоянная k такая, что $z(x) = k \int_0^x F(y) dy$. Утверждение (3.12) доказано. Докажем (3.13).

Обозначим $R_\varepsilon(x) = \int_0^x z_\varepsilon(y) v_\varepsilon(y) dy$. Из (3.12) и (3.14) следует, что существует подпоследовательность R_{ε} такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\varepsilon}(x) = k \int_0^x F(y) v(y) dy = R(x). \quad (3.17)$$

С другой стороны, применяя формулу Ито, получим $E_x[R(\xi(\tau)) - \tau/2] = R(x)$, $x \in S_N$. На основании леммы 9 заключаем, что существует постоянная C такая, что функция $R(x)$ допускает представление

$$R(x) = C \int_0^x F(y) dy + \int_0^x F(y) \int_0^y \frac{dz}{a(z)F(z)} dy. \quad (3.18)$$

Сравнивая (3.17) и (3.18), получаем

$$v(y) = \frac{C}{k} + \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dy}{a(y)F(y)}.$$

Так как $v(0) = 0$, то $C = 0$ и равенство (3.13) установлено. Лемма доказана.

4. Примеры. В этом пункте рассматриваются некоторые классы стохастических уравнений и для них на основании полученных выше результатов устанавливаются предельные теоремы. Сохраним введенные выше обозначения.

1. Пусть случайный процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \int_0^t b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s), \quad (4.1)$$

и предельный процесс $\xi(t)$ есть решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (4.2)$$

Будем считать, что выполнены условия (I) и (II). Для того чтобы для решений уравнений (4.1), (4.2) имела место сходимость $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная k такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x F_\varepsilon(y) dy = kx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{a(y)}{a_\varepsilon(y) F_\varepsilon(y)} dy = \frac{x}{k}.$$

Действительно, в этом случае применимо следствие 1. Приведенные условия показывают, что выполнено условие (III) с $F(x) = 1$. В силу теоремы 2 выполнено условие (β) с функцией $b(x) = 0$ и постоянной β такой, что $(2\beta + 1)k = 1$, выполнено и условие (α).

2. Пусть процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является решением стохастического уравнения

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t g\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) dw(s). \quad (4.3)$$

Предположим, что для коэффициентов уравнения (4.3) выполнено условие (I) и существуют следующие пределы:

$$\begin{aligned}\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^y \frac{b(z)}{a(z)} dz \right\} dy &= B_1 > 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{a(y)} \exp \left\{ 2 \int_0^y \frac{b(z)}{a(z)} dz \right\} dy &= B_2 > 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(y)}{a(y)} dy &= B_3.\end{aligned}$$

В этом случае условие (β) выполнено с постоянной β такой, что $2\beta + 1 = B_1^{-1}$ и функцией $b(x) = 0$, условие (α) выполнено с функцией $a(x) = (B_1 B_2)^{-1}$, условие (γ) выполнено с функцией $g(x) = (B_1 B_2)^{-1} B_3$. В силу теоремы 1 предельный процесс для решения уравнения (4.3) есть

$$\xi(t) = x + \frac{B_3}{B_1 B_2} t + \frac{1}{\sqrt{B_1 B_2}} w(t).$$

3. Рассмотрим вновь уравнение (4.3), но сделаем другие предположения относительно коэффициентов. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{b(x)}{a(x)} \right| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x)}{a(x)} dx = 0$$

и существуют пределы

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(y)}{a(y)} dy = A_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{a(y)} = A_2 > 0.$$

В этом случае условие (β) выполнено с функцией $b(x) = 0$ и постоянной β такой, что

$$2\beta + 1 = \exp \left\{ 2 \int_0^{\infty} \frac{b(y)}{a(y)} dy \right\}.$$

Условие (α) выполняется с функцией $a(x) = A_2^{-2}$, а условие (γ) выполняется с функцией $g(x) = A_2^{-1} A_1$.

Согласно теореме 1, предельный процесс в этом случае определяется как

$$\xi(t) = x + \frac{A_1}{A_2} t + \frac{1}{A_2} w(t).$$

4. Пусть случайный процесс $\xi_\varepsilon(t)$ определяется уравнением

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \int_0^t \left[\dot{a}_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) \right] ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (4.4)$$

Предположим, что

$$(g_\varepsilon(x), a_\varepsilon(x)) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda).$$

Ясно, что условие (I) выполнено. Будем считать, что существуют следующие пределы:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(0) &= a_0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{dy}{a_\varepsilon(y)} &= \int_0^x A_1(y) dy, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x a_\varepsilon(y) dy = \int_0^x A_2(y) dy, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(x)}{a_\varepsilon(y)} dy &= \int_0^x G(y) dy.\end{aligned}$$

Пусть, кроме того, $\lambda \leq A_1(x) A_2(x) \leq \Lambda$ и $|\dot{A}_1(x)| \leq \Lambda$. Простой подсчет показывает, что в этом случае $F_\varepsilon(x) = a_\varepsilon(0)/a_\varepsilon(x)$ и условие (β) выполняется с постоянной β такой, что $2\beta + 1 = (a_0 A_1(0))^{-1}$, и функцией

$$b(x) = -\frac{\dot{A}_1(x)}{2A_1^2(x) A_2(x)}.$$

Условие (α) выполнено с функцией

$$a(x) = \frac{1}{A_1(x) A_2(x)},$$

а условие (γ) выполнено с функцией

$$g(x) = \frac{G(x)}{A_1(x) A_2(x)}.$$

В силу теоремы 1 предельный для решения уравнения (4.4) процесс будет решением уравнения

$$\xi(t) = x + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2G(\xi(s)) A_1(\xi(s)) - \dot{A}_1(\xi(s))}{A_1^2(\xi(s)) A_2(\xi(s))} ds + \int_0^t \frac{dw(s)}{\sqrt{A_1(\xi(s)) A_2(\xi(s))}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веретенников А. Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 2, с. 348–360.
2. Гилман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
3. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Кулинич Г. Л. О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 4, с. 795–801.

Поступила в редакцию
12.V.1997