Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ринотт, В. И. Ротарь, Некоторые оценки скорости сходимости в ЦПТ для мартингалов. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 573–588

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:53:41

© 1999 г.

РИНОТТ И.*, РОТАРЬ В. И.**

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦПТ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ. II¹⁾

Настоящая статья касается точности нормальной аппроксимации распределений случайных величин $S_n = \sum_1^n X_m$, где X_m — мартингал-разности. Известно, что в общем случае, даже если третьи моменты слагаемых конечны, точность аппроксимации не может иметь порядок лучший, чем $O(n^{-1/8})$. Если условные дисперсии $E\{X_m^2 | X_1, \dots, X_{m-1}\} = EX_m^2$, то скорость сходимости имеет порядок $O(n^{-1/4})$, в то время как при дополнительном условии независимости слагаемых точность аппроксимации имеет порядок $O(n^{-1/2})$. Настоящая статья представляет попытку объединить упомянутые выше случаи в одной оценке, а также рассмотреть ряд промежуточных ситуаций. Оценка дана в терминах определенных характеристик зависимости между слагаемыми, отражающих влияние различных факторов на скорость сходимости.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, мартингалы, скорость сходимости.

3. Доказательство теоремы 1

3.1. Предварительные построения. Зафиксируем целое n и предположим, что

$$\sum_{m=1}^n \bar{\sigma}_m^2 = 1. \quad (3.1.1)$$

Шаг 1. Заметим, что если $\bar{\sigma}_{m'}^2 > \frac{1}{6}$ при некотором $m' \leq n$, то, как легко видеть, $\bar{\sigma}_n^* \geq \frac{1}{6\sqrt{6}}$. В этом случае теорема тривиальна, и без

* Department of Mathematics, UCSD, La Jolla, CA 92093; e-mail: yrinott@ucsd.edu

**Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский просп., 47, 117428 Москва, Россия; e-mail: rotar@cemi.rssi.ru

¹⁾ Начало статьи опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», 1988, т. 43, в. 4, с. 692–710. Работа выполнена при поддержке гранта NSF #DMS 95-04616; второй автор пользовался также поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-0100358.

ограничения общности можно предположить, что $\bar{\sigma}_m^2 \leq \frac{1}{6}$ для всех m . В этом случае существует m_0 , для которого

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{j=1}^{m_0} \bar{\sigma}_j^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (3.1.2)$$

и, как легко подсчитать, для любых положительных $a_1, \dots, a_n$

$$a_m \leq a_m^* \text{ для всех } m \text{ и } a_m^* \leq 3a_n^* \text{ при } m \geq m_0. \quad (3.1.3)$$

Обратимся к доказательству при условии $\bar{\sigma}_m^2 \leq \frac{1}{6}$. Как и раньше, будем обозначать символом C абсолютные постоянные, различные в различных формулах, так что возможна запись типа $C + C = C$, $C < C$, и т.д. Символы $\xi, \xi_0, \xi_1, \dots$ будут обозначать стандартные нормальные величины, не зависящие от с.в. X_j и между собой.

Шаг 2. По неравенству сглаживания (см., например, [1]) для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sup_z |\mathbf{P}\{S_n < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 < z\}| \\ & \leq C \left\{ \sup_z |\mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 + \varepsilon\xi < z\}| + \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Шаг 3. Пусть $\tau = \max\{k: \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \leq 1\}$. Ясно, что τ — марковский момент относительно $\{\mathcal{F}^j\}$. Для $m < n$ положим

$$\theta_m^2 = \begin{cases} \sigma_m^2, & m \leq \tau, \\ 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^2, & m = \tau + 1, \\ 0, & m > \tau + 1, \end{cases} \quad \theta_n^2 = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2, & \tau \geq n - 1, \\ 0, & \tau < n. \end{cases}$$

Таким образом, хотя θ_j^2 «сходны» с σ_j^2 , но $\sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1$. Отметим также, что θ_m^2 измеримо относительно $\mathcal{F}^{m-1}$.

При фиксированном ε , которое будет уточнено позже, положим $\lambda_m^2 = 1 - \sum_{j=1}^m \theta_j^2 + \varepsilon^2$. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 + \varepsilon\xi < z\} \\ & = \mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^n \theta_m \xi_m + \varepsilon\xi < z\right\} \\ & = \sum_{m=1}^n \left[\mathbf{P}\left\{S_m + \sum_{j=m+1}^n \theta_j \xi_j + \varepsilon\xi < z\right\} - \mathbf{P}\left\{S_{m-1} + \sum_{j=m}^n \theta_j \xi_j + \varepsilon\xi < z\right\} \right] \\ & = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \theta_m \xi_m}{\lambda_m}\right) \right] \\ & = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(T_m - \frac{\theta_m \xi_m}{\lambda_m}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где $T_m = (z - S_{m-1})/\lambda_m$. Число z будем считать фиксированным в течение всего доказательства. Поскольку оно довольно громоздко, приведем

3.2. План дальнейшего доказательства. (I) Сначала мы заменим в последней сумме в (3.1.5) θ_m на σ_m . На шаге 1 п. 3.3 будет оценена ошибка при такой замене, т.е. разность $E\{\Phi(T_m - \theta_m \xi_m/\lambda_m) - \Phi(T_m - \sigma_m \xi_m/\lambda_m)\}$.

(II) Таким образом мы придем к интегралу $E\{\Phi(T_m - X_m/\lambda_m) - \Phi(T_m - \sigma_m \xi_m/\lambda_m)\}$, который будет разбит на два: по множеству $A_m = \{|\alpha_m| \leq \frac{1}{2}, \beta_m \leq \frac{1}{2}\}$ и по его дополнению. Оценка последнего интеграла проста и будет осуществлена на шаге 2 п. 3.3. Оставшаяся часть доказательства посвящена

$$E \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \sigma_m \xi_m}{\lambda_m}\right) \right], \quad (3.2.1)$$

где I_m — индикатор A_m .

(III) Сперва мы перейдем от (3.2.1) к

$$E \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \bar{\sigma}_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) \right], \quad (3.2.2)$$

где $\bar{\sigma}_m^2 = E\sigma_m^2$, $\bar{\lambda}_m^2 = 1 - \sum_{j=1}^m \bar{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2$ и $Y_m = X_m/\sigma_m$. Заметим, что, по определению, $E_m Y_m = 0$, и $E_m Y_m^2 = 1$, где $E_m(\cdot) = E(\cdot | \mathcal{F}^{m-1})$. Указанный переход будет осуществлен в п. 3.4 в два этапа: сначала мы перейдем от λ_m к $\bar{\lambda}_m$, а затем — от σ_m к $\bar{\sigma}_m$.

(IV) В конце п. 3.4 мы «уберем» I_m из (3.2.2), т.е. перейдем от (3.2.2) к

$$E \sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \bar{\sigma}_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) \right]. \quad (3.2.3)$$

(V) Преимущество, которое мы получили, — в том, что теперь мы имеем дело с неслучайными масштабными характеристиками $\bar{\lambda}_m$ и $\bar{\sigma}_m$. Оценивание (3.2.3) приведет к основным членам в (1.5). Положим $Q_m(y) = \Phi((z - y)/\bar{\lambda}_m)$. Тогда (3.2.3) можно переписать в виде $\sum_{m=1}^n J_m$, где $J_m = E[Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m Y_m) - Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m \xi_m)]$.

(VI) Оценивание $\sum_{m=1}^{m_0} J_m$ просто; мы проведем его на шаге 1 п. 3.5.

(VII) Перейдем к $m > m_0$. Пусть $\tilde{Y}_m$, $m = 1, \dots, n$, — независимые с.в. с теми же маргинальными распределениями, что и у Y_m . Обозначим N_m , $m = 1, 2, \dots$, нормальную с.в. с теми же первыми двумя моментами, что и у S_m . Мы предполагаем, что все N_m независимы между собой и от остальных с.в. Имеем

$$J_m = E \left[Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m Y_m) - Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m) \right] \\ + E \left[Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m) - Q_m(N_{m-1} + \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -Q_m(S_{m-1} + \bar{\sigma}_m \xi_m) + Q_m(N_{m-1} + \bar{\sigma}_m \xi_m) \\
& + E \left[Q_m(N_{m-1} + \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m) - Q_m(N_{m-1} + \bar{\sigma}_m \xi_m) \right] \\
& = J_{m1} + J_{m2} + J_{m3}.
\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

(VIII) Оценивание сумм $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m2}$ и $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m3}$ сходно с таким же оцениванием для случая независимых величин и осуществляется на шагах 2-3 п. 3.5.

(IX) Сумма $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m1}$ отражает влияние конкретного типа зависимости на скорость. Эта сумма оценивается на шаге 4 того же раздела.

(X) Собирая все оценки, мы приходим к рекуррентному соотношению между δ_n и δ_m при $m < n$. Индукция осуществляется в п. 3.6.

3.3. Предварительные оценки. Шаг 1. Согласно разложению Тейлора,

$$\begin{aligned}
& E \left[\Phi \left(T_m - \frac{\theta_m \xi_m}{\lambda_m} \right) - \Phi \left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m} \right) \right] \\
& = \int_0^1 E \varphi \left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m + t(\theta_m - \sigma_m) \xi_m}{\lambda_m} \right) (\theta_m - \sigma_m) \lambda_m^{-1} \xi_m dt, \quad (3.3.1)
\end{aligned}$$

где φ — стандартная нормальная плотность. Применяя теперь то же разложение к $\varphi(\cdot)$ под знаком интеграла и используя то, что $\lambda_m^2 \geq \varepsilon^2$, $E \xi_m = 0$ и ξ_m не зависит от остальных с.в., нетрудно получить, что подынтегральное выражение не превосходит по абсолютной величине

$$\left| E \varphi \left(\frac{z - S_{m-1}}{\lambda_m} \right) \frac{\theta_m - \sigma_m}{\lambda_m} \xi_m \right| + C E \frac{\theta_m + \sigma_m}{\lambda_m^2} |\theta_m - \sigma_m| \leq 0 + C E \frac{|\theta_m^2 - \sigma_m^2|}{\varepsilon^2}.$$

Так как $\sum_{m=1}^n |\theta_m^2 - \sigma_m^2| \leq |1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2|$, из (3.3.1) получаем, что

$$E \left| \sum_{m=1}^n \left[\Phi \left(T_m - \frac{\theta_m \xi_m}{\lambda_m} \right) - \Phi \left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m} \right) \right] \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} E \left| 1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 \right|. \quad (3.3.2)$$

Шаг 2. Ниже будем опускать индекс n в β_{mn} , т.е. $\beta_m = \beta_{mn}$. Разлагая по Тейлору и принимая во внимание (1.1), определение σ_m и то, что I_m измеримо относительно $\mathcal{F}^{m-1}$, имеем

$$\begin{aligned}
& \left| E \sum_{m=1}^n (1 - I_m) \left[\Phi \left(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m} \right) - \Phi \left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m} \right) \right] \right| \\
& \leq C \sum_{m=1}^n [E(1 - I_m) |X_m^3| + E(1 - I_m) \sigma_m^3] \frac{1}{\lambda_m^3} \\
& \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n E(1 - I_m) |X_m|^3 \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n E(|\alpha_m| + |\beta_m|) |X_m^3|. \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

3.4. Переход от условных к безусловным дисперсиям. Наша следующая цель — перейти от (3.2.1) к (3.2.2).

Шаг 1. Пусть $\bar{T}_m = (z - S_{m-1})/\bar{\lambda}_m$. Ниже U обозначает с.в., равномерно распределенную на $[0, 1]$ и не зависящую ни от каких иных с.в. Оценим

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi \left(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m} \right) - \Phi \left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m} \right) \right] \\
 & \quad - \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi \left(\bar{T}_m - \frac{X_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \Phi \left(\bar{T}_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \\
 & = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \lambda_m^{-2} \right. \\
 & \quad \left. - \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \sigma_m^2 \xi_m^2 \lambda_m^{-2} \right] \\
 & \quad - \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right. \\
 & \quad \left. - \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 \xi_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right] \\
 & = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n [J_{Y_m} - J_{\xi_m} - \bar{J}_{Y_m} + \bar{J}_{\xi_m}]. \tag{3.4.1}
 \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое равно нулю (так как $\lambda_n = \bar{\lambda}_n = \varepsilon$), и в последней сумме достаточно рассматривать $m = 1, \dots, n-1$.

Нетрудно видеть также, что, поскольку $|\alpha_m| \leq \frac{1}{2}$ на множестве A_m , на том же множестве $\frac{1}{3} \leq \sigma_m/\bar{\sigma}_m \leq 3$. То же касается и условия $|\beta_m| \leq \frac{1}{2}$ и отношения $\sum_{j=m+1}^n \sigma_{jm}^2 / \sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_j^2$. Мы будем использовать это неоднократно.

Условимся, что любая сумма $\sum_m^k = 0$ при $m > k$.

Пусть $\kappa = \min\{n-1, \tau+1\}$. Так как $\theta_m = \sigma_m$ при $m \leq \tau$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \sum_{m=1}^{n-1} J_{Y_m} & = \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\kappa} I_m \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \theta_m^2 Y_m^2 \lambda_m^{-2} \\
 & \quad + \mathbf{E} I_{\kappa} \varphi' \left(T_{\kappa} - \frac{U \sigma_{\kappa} Y_{\kappa}}{\lambda_{\kappa}} \right) (\sigma_{\kappa}^2 - \theta_{\kappa}^2) Y_{\kappa}^2 \lambda_{\kappa}^{-2} \\
 & \quad + \mathbf{E} \sum_{m=\kappa+1}^{n-1} I_m \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \lambda_m^{-2} \\
 & = K_1 + K_2 + K_3. \tag{3.4.2}
 \end{aligned}$$

Поскольку $\theta_m = 0$ при $m > \tau + 1$ и $E_m Y_m^2 = 1$, получаем

$$\begin{aligned} |K_2 + K_3| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \left[E|\sigma_\kappa^2 - \theta_\kappa^2| Y_\kappa^2 + \sum_{m=\kappa+1}^{n-1} E\sigma_m^2 Y_m^2 \right] \\ &= \frac{C}{\varepsilon^2} \left[E|\sigma_\kappa^2 - \theta_\kappa^2| + E \sum_{m=\kappa+1}^{n-1} \sigma_m^2 \right] \leq \frac{C}{\varepsilon^2} E \left| \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 - 1 \right|. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} K_1 &= E \sum_{m=1}^{\kappa} I_m \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \theta_m^2 Y_m^2 (\lambda_m^{-2} - \bar{\lambda}_m^{-2}) \\ &\quad + E \sum_{m=1}^{\kappa} I_m \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \theta_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} = K_{11} + K_{12}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\theta_j^2 - \bar{\sigma}_j^2) &= E_m \sum_{j=1}^m (\theta_j^2 - \bar{\sigma}_j^2) = -E_m \sum_{j=m+1}^n (\theta_j^2 - \bar{\sigma}_j^2) \\ &= E_m \sum_{j=m+1}^n (\bar{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2) + E_m \sum_{j=m+1}^n (\sigma_j^2 - \theta_j^2) \\ &= \chi_{1m} + \chi_{2m}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Отметим также, что с.в. χ_{1m} и χ_{2m} измеримы относительно $\mathcal{F}^{m-1}$ и

$$|\chi_{2m}| \leq E_m \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 - 1 \right|. \quad (3.4.6)$$

Разлагая появляющееся ниже $\varphi'(\cdot)$, только когда оно умножается на χ_{1m} , имеем

$$\begin{aligned} K_{11} &= E \sum_{m=1}^{\kappa} I_m \varphi' \left(T_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\lambda_m} \right) \theta_m^2 Y_m^2 (\chi_{1m} + \chi_{2m}) \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2} \\ &= E \sum_{m=1}^{\kappa} I_m \varphi'(T_m) \theta_m^2 Y_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2} + R, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

где R равно сумме остаточного члена в указанном разложении и части, содержащей χ_{2m} .

Примем во внимание теперь, что $I(m \leq \kappa)$ измеримо относительно $\mathcal{F}^{m-1}$, и, следовательно, сумма в правой части (3.4.7) равна

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^n E I_m I(m \leq \kappa) \varphi'(T_m) \theta_m^2 Y_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2} \\ &= \sum_{m=1}^n E I_m I(m \leq \kappa) \varphi'(T_m) \theta_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что последнее выражение полностью совпадает с соответствующим выражением, которое возникнет, когда мы будем оценивать, следуя в точности той же схеме, члены J_{ξ_m} . Поэтому указанные выражения взаимно уничтожаются. В то же время

$$|R| \leq \mathbb{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m \theta_m^2 \sigma_m |Y_m^3| |\chi_{1m}| \lambda_m^{-1} \cdot \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2} \\ + \mathbb{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m \theta_m^2 Y_m^2 |\chi_{2m}| \lambda_m^{-2} \bar{\lambda}_m^{-2} = R_1 + R_2. \quad (3.4.8)$$

В m -м слагаемом в R_2 все с.в., за исключением Y_m , измеримы относительно $\mathcal{F}^{m-1}$. Поэтому, ввиду (3.4.6),

$$R_2 \leq \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 - 1 \right| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m \theta_m^2}{\lambda_m^2 \bar{\lambda}_m^2}. \quad (3.4.9)$$

(Мы воспользовались также тем, что $\kappa \leq \tau + 1$.) Полагая снова $\sum_m^k = 0$ при $m > k$, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m \theta_m^2}{\lambda_m^2 \bar{\lambda}_m^2} \leq \sum_{m=1}^{m_0} + \sum_{m_0+1}^{\tau+1}. \quad (3.4.10)$$

В силу (3.1.2) в первой сумме $\bar{\lambda}_m^2 \geq \frac{1}{2}$ и $\lambda_m^2 \geq \varepsilon^2$, так что первая сумма не превосходит $2 \sum_{j=1}^{m_0} \theta_j^2 / \varepsilon^2 \leq 2 / \varepsilon^2$. Применяя ко второй сумме неравенства Коши–Буняковского–Шварца и учитывая, что $\theta_m^2 \leq \sigma_m^2 \leq 3\bar{\sigma}_m^2$ на множестве A_m , получаем, что указанная сумма ограничена выражением

$$C \left[\sum_{m_0+1}^{\infty} I_m \frac{\theta_m^2}{\lambda_m^4} \right]^{1/2} \left[\sum_{m_0+1}^{\infty} I_m \frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^4} \right]^{1/2}. \quad (3.4.11)$$

Оценивая первый сомножитель с помощью (3.1.3), приходим к следующему:

$$\sum_{m_0+1}^{\infty} I_m \frac{\theta_m^2}{\lambda_m^4} = \sum_{m_0+1}^{\tau+1} I_m \frac{\theta_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j^2 + \varepsilon^2 - \theta_m^2)^2} \\ \leq \sum_{m_0+1}^{\infty} \frac{\theta_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j^2 + \varepsilon^2 - 3\bar{\sigma}_m^2)^2} \\ \leq \sum_{m_0+1}^{\tau+1} \frac{\theta_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j^2 + \varepsilon^2 - 27\sigma_n^{*2})^2}. \quad (3.4.12)$$

Воспользуемся теперь тем, что для любых $c_m \geq 0$ таких, что $\sum_{m=1}^n c_m = 1$, и любого $p > 1$,

$$\sum_{m=1}^n \frac{c_m}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} c_j + b)^p} \leq \frac{1}{(p-1)b^{p-1}}. \quad (3.4.13)$$

(Оценивается сверху соответствующим интегралом.) Поэтому, полагая ε^2 большим, чем, скажем, $29(\bar{\sigma}_n^2)^*$, получаем, что правая часть (3.4.12) не больше чем C/ε^2 при достаточно большой абсолютной постоянной C . Второй сомножитель в (3.4.11) рассматривается аналогично, и окончательно

$$R_2 \leq CE \left| \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 - 1 \right| \varepsilon^{-2}. \quad (3.4.14)$$

Вернемся к R_1 . Нетрудно убедиться, что

$$R_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E} I_m \left| X_m^3 \left\{ \mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^n \sigma_j^2 \left(\sum_{j=m+1}^n \bar{\sigma}_j^2 \right)^{-1} - 1 \right\} \right|.$$

Заметим, что $\mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^n \sigma_j^2 = \sum_{j=m+1}^n \sigma_{jm}^2$, и выражение в фигурных скобках равно $2\beta_m/(1-\beta_m)$, где $\beta_m = \beta_{mn}$. Следовательно, в силу последнего неравенства и определения I_m ,

$$R_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E} |\beta_m X_m^3|. \quad (3.4.15)$$

Обратимся к K_{12} . Полагая $\Psi_m = z - S_{m-1} - U\sigma_m Y_m$, имеем: $K_{12} = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \varphi'(\Psi_m/\lambda_m) \theta_m^2 Y_m^2 / \bar{\lambda}_m^2$. Рассмотрим разность между этим выражением и соответствующим выражением, возникающим при оценивании, в рамках той же схемы, членов с $\bar{Y}_m$, иными словами, рассмотрим $\mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m D_m$, где $D_m = [\varphi'(\Psi_m/\lambda_m) - \varphi'(\Psi_m/\bar{\lambda}_m)] \theta_m^2 Y_m^2 / \bar{\lambda}_m^2$.

Пусть I_{m1} и I_{m2} — индикаторы событий $A_{m1} := \{|\chi_{1m}| \leq \bar{\lambda}_m^2/10\}$ и $A_{m2} := \{|\chi_{2m}| \leq \bar{\lambda}_m^2/10\}$ соответственно. Разобьем последнее интересующее нас математическое ожидание на интегралы по области $A_{m1}A_{m2}$ и его дополнению. Заметим, что $\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2 = \chi_{1m} + \chi_{2m}$. На $A_{m1}A_{m2}$ верно соотношение $\bar{\lambda}_m^2 \asymp \lambda_m^2$ (т.е. отношение левой и правой частей лежит между двумя абсолютными постоянными), и можно выписать разложение

$$\begin{aligned} \varphi'\left(\frac{\Psi_m}{\lambda_m}\right) - \varphi'\left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) &= \varphi''\left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) \Psi_m (\lambda_m^{-1} - \bar{\lambda}_m^{-1}) \\ &= \varphi''\left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) \frac{\Psi_m}{\lambda_m \bar{\lambda}_m} \cdot \frac{\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2}{\bar{\lambda}_m + \lambda_m} = \varphi''\left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m}\right) \frac{\Psi_m}{\lambda_m} \cdot \frac{\chi_{1m} + \chi_{2m}}{\bar{\lambda}_m(\lambda_m + \lambda_m)}, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

где $\bar{\lambda}_m$ — «промежуточное» выражение, фигурирующее в разложении Тейлора. Ясно, что $\bar{\lambda}_m^2 \asymp \lambda_m^2$, и, следовательно, $|\varphi''(\Psi_m/\bar{\lambda}_m)| \leq C$.

Мы видим, что $\mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m I_{m1} I_{m2} D_m$ не превосходит суммы двух слагаемых, одно из которых связано с членом в (3.4.16), содержащим χ_{2m} , и ограничено выражением $C \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \chi_{2m} \theta_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-4}$. Как было показано ранее, последнее выражение не больше чем правая часть (3.4.14).

Второе из означенных слагаемых, содержащее χ_{1m} , равно

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m I_{m1} I_{m2} \theta_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \varphi'' \left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \frac{\Psi_m \chi_{1m}}{\lambda_m \bar{\lambda}_m (\lambda_m + \bar{\lambda}_m)} \\ &= \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar{\lambda}_m^2} \varphi'' \left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m} + U_1 \Psi_m \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right) \right) \\ & \quad \times \frac{(z - S_{m-1}) \chi_{1m}}{\lambda_m \bar{\lambda}_m (\lambda_m + \bar{\lambda}_m)} \\ & - \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar{\lambda}_m^2} \varphi'' \left(\frac{\Psi_m}{\bar{\lambda}_m} + U_1 \Psi_m \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right) \right) \\ & \quad \times \frac{U \sigma_m Y_m \chi_{1m}}{\lambda_m \bar{\lambda}_m (\lambda_m + \bar{\lambda}_m)}, \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

где U_1 — с.в., равномерно распределенная на $[0, 1]$. Нетрудно видеть, что m -е слагаемое во второй сумме в правой части (3.4.17) не больше, по абсолютной величине, чем $C I_m \sigma_m^3 |Y_m^3 \chi_{1m}| / \bar{\lambda}_m^5$. Докажем, что та же оценка верна и для m -го слагаемого в первой сумме. Этого достаточно, так как $\mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^3 |Y_m^3 \chi_{1m}| / \bar{\lambda}_m^5$, как показано выше, не превосходит правой части (3.4.15).

По определению Ψ_m , если $|z - S_{m-1}| \leq 10 |\sigma_m Y_m|$, то $|\Psi_m| \leq 11 |\sigma_m Y_m|$, и доказываемая оценка очевидна (см. также определения I_{m1}, I_{m2}). Если же $|z - S_{m-1}| > 10 |\sigma_m Y_m|$, разложим по Тейлору φ'' в (3.4.17) в окрестности $(z - S_{m-1})[1/\bar{\lambda}_m + U_1(1/\lambda_m - 1/\bar{\lambda}_m)]$. Первый член указанного разложения равен

$$I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar{\lambda}_m^2} \varphi'' \left((z - S_{m-1}) \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_m} + U_1 \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \right) \frac{(z - S_{m-1}) \chi_{1m}}{\lambda_m \bar{\lambda}_m (\lambda_m + \bar{\lambda}_m)}.$$

Математическое ожидание этого члена совпадает с математическим ожиданием соответствующего члена для J_{ξ_m} , так что эти члены взаимно уничтожаются.

Пусть $\tilde{\varphi}(x) = \sup_{|t| > x} |\varphi'''(t)|$. Тогда, поскольку $|\sigma_m Y_m| \leq |z - S_{m-1}|/10$, остаточный член рассматриваемого разложения, при введенных условиях на χ_{1m} и χ_{2m} , не превосходит

$$C I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\sigma_m^3 |Y_m^3 \chi_{1m}|}{\bar{\lambda}_m^5} \left[\frac{|z - S_{m-1}|}{\bar{\lambda}_m} \tilde{\varphi} \left(\frac{9(z - S_{m-1})}{10 \bar{\lambda}_m} \right) \right].$$

Так как $\hat{\lambda}_m^2 \asymp \bar{\lambda}_m^2$, выражение в квадратных скобках ограничено абсолютной постоянной, и математическое ожидание всего выражения не превосходит правой части (3.4.15).

Рассмотрим теперь $\mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m (1 - I_{m1}) D_m$. В этом случае, т.е. при $|\chi_{1m}| > \bar{\lambda}_m^2/10$, будем раскладывать в ряд Тейлора в окрестности $z - S_{m-1}$ каждый из членов $\varphi'(\Psi_m/\lambda_m)$ и $\varphi'(\Psi_m/\bar{\lambda}_m)$ отдельно. Нулевые

члены взаимно уничтожаются с соответствующими членами для $J_{\xi_m} - \bar{J}_{\xi_m}$. Остаточный член не превосходит

$$\begin{aligned} CI_m \frac{\sigma_m^2 Y_m^2}{\bar{\lambda}_m^2} \left(\frac{\sigma_m |Y_m|}{\lambda_m} + \frac{\sigma_m |Y_m|}{\bar{\lambda}_m} \right) I \left(|\chi_{1m}| > \frac{\bar{\lambda}_m^2}{10} \right) \\ \leq C \frac{I_m \sigma_m^3 |Y_m^3|}{\bar{\lambda}_m^4} |\chi_{1m}| \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Математическое ожидание последнего выражения не больше правой части (3.4.15).

Наконец,

$$\mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} I_m (1 - I_{m2}) D_m \leq C \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_m^2 Y_m^2 |\chi_{2m}|}{\bar{\lambda}_m^4},$$

что вновь приводит к правой части (3.4.14).

Просматривая уже проведенные выкладки, нетрудно прийти к выводу, что оставшиеся интегралы в (3.4.1), а именно J_{ξ_m} , $\bar{J}_{Y_m}$, $\bar{J}_{\xi_m}$, могут быть оценены совершенно аналогично, причем ряд соответствующих членов, как было выше объяснено, взаимно уничтожаются.

Собирая все оценки этого пункта, получаем, что абсолютное значение выражения (3.4.1) не превосходит

$$C \left\{ \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E} |\beta_m X_m^3| + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left| \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 - 1 \right| \right\}. \quad (3.4.19)$$

Шаг 2. Теперь перейдем от σ_m к $\bar{\sigma}_m$, точнее, оценим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi \left(\bar{T}_m - \frac{X_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \Phi \left(\bar{T}_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \\ - \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\Phi \left(\bar{T}_m - \frac{\bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \Phi \left(\bar{T}_m - \frac{\bar{\sigma}_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \\ = \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right. \\ \left. - \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 \xi_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right] \\ - \mathbf{E} \sum_{m=1}^n I_m \left[\varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \bar{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right. \\ \left. - \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \bar{\sigma}_m^2 \xi_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Рассмотрим

$$I_m \left[\varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} - \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \bar{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right]$$

$$= I_m \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) (\sigma_m^2 - \bar{\sigma}_m^2) Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \\ + I_m \left[\varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \varphi' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \bar{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2}. \quad (3.4.21)$$

Разлагая первое слагаемое в окрестности $\bar{T}_m$, легко увидеть, что вновь нулевой член взаимно уничтожится с соответствующим членом для величин ξ_i . Остаточный член ограничен выражением $I_m \sigma_m (\sigma_m^2 - \bar{\sigma}_m^2) |Y_m^3| / \bar{\lambda}_m^3$.

Разлагая второе слагаемое в (3.4.21), мы видим, что оно не превосходит $I_m \bar{\sigma}_m^2 |\sigma_m - \bar{\sigma}_m| |Y_m^3| / \bar{\lambda}_m^3$.

В силу определения I_m математические ожидания последних двух выражений не больше чем

$$C \frac{\bar{\sigma}_m^3}{\bar{\lambda}_m^3} \mathbf{E} I_m |Y_m^3| \left| \frac{\sigma_m^2}{\bar{\sigma}_m^2} - 1 \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \mathbf{E} I_m |X_m^3| \left| \frac{\sigma_m^2}{\bar{\sigma}_m^2} - 1 \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \mathbf{E} |\alpha_m X_m^3|.$$

Конечно, замена $\bar{\lambda}_m$ на ε груба, но мы все равно уже приходили к оценкам того же типа в (3.4.21). Таким образом, выражение в (3.4.20) не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n \mathbf{E} |\alpha_m X_m^3|. \quad (3.4.22)$$

Этим оценивание разности между (3.2.1) и (3.2.2) завершено.

Для последующего нам удобно теперь «убрать» I_m из (3.2.2), т.е. перейти от (3.2.2) к (3.2.3). Это делается аналогично выкладкам шага 4 п. 3.1, и погрешность при указанном переходе не превосходит

$$\frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n \bar{\sigma}_m^3 \mathbf{E} (|\alpha_m| + |\beta_m|) |Y_m^3|. \quad (3.4.23)$$

3.5. Оценивание при постоянных условных дисперсиях.

Шаг 1. Поскольку $\mathbf{E}_m Y_m = 0$ и $\mathbf{E}_m Y_m^2 = 1$, первые три члена разложения Тейлора выражений в (3.2.3) взаимно уничтожаются, и

$$\mathbf{E} |J_m| \leq \frac{\bar{\sigma}_m^3 \mathbf{E} |Y_m^3|}{\bar{\lambda}_m^3} + \frac{\bar{\sigma}_m^3 \mathbf{E} |\xi_m^3|}{\bar{\lambda}_m^3} \leq C \bar{\sigma}_m^3 \mathbf{E} |Y_m^3| \quad \text{при } m \leq m_0, \quad (3.5.1)$$

где последнее неравенство следует из того, что $\mathbf{E} |Y_m^3| > 1$ и $\bar{\lambda}_m > C$ при $m \leq m_0$ ввиду (3.1.2).

Пусть $\nu_m = \mathbf{E} |Y_m^3|$. Из (3.5.1) и (3.1.3) следует, что

$$\sum_{m=1}^{m_0} |J_m| \leq C \sum_{m=1}^{m_0} \nu_m \bar{\sigma}_m^3 \leq C \sum_{m=1}^n \bar{\sigma}_m^2 \max_{m \leq k \leq n} \nu_k \bar{\sigma}_k = C (\nu_n \bar{\sigma}_n)^*. \quad (3.5.2)$$

Случай $m > m_0$ рассмотрим, используя представление (3.2.4).

Шаг 2. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} |J_{m3}| &\leq \mathbf{E} \left| \Phi \left(\frac{z - \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m}{\sqrt{1 - \bar{\sigma}_m^2 + \varepsilon^2}} \right) - \Phi \left(\frac{z - \bar{\sigma}_m \xi_m}{\sqrt{1 - \bar{\sigma}_m^2 + \varepsilon^2}} \right) \right| \\ &\leq \frac{C}{(1 - \bar{\sigma}_m^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \bar{\sigma}_m^3 [\mathbf{E}|Y_m^3| + \mathbf{E}|\xi_m^3|]. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Так как $\bar{\sigma}_m^2 < \frac{1}{6}$ для всех m , получаем $|J_{m3}| \leq C \bar{\sigma}_m^3 \nu_m$. Следовательно,

$$\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m3}| \leq C \sum_{m=m_0+1}^n \nu_m \bar{\sigma}_m^3 \leq C(\nu_n \bar{\sigma}_n)^*. \quad (3.5.4)$$

Шаг 3. Обращаясь к J_{m2} , имеем

$$\begin{aligned} J_{m2} &= \int \left(\int [\mathbf{P}\{S_{m-1} \leq z - x - y\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}\{N_{m-1} \leq z - x - y\}] \mathbf{P}\{\bar{\lambda}_m \xi \in dy\} \right) \\ &\quad \times [\mathbf{P}\{\bar{\sigma}_m Y_m \in dx\} - \mathbf{P}\{\bar{\sigma}_m \xi_m \in dx\}]. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Заметим теперь, что для любых с.в. Y и Z с совпадающими первыми двумя моментами

$$\begin{aligned} &\left| \iint g(x+y) \mathbf{P}\{\lambda \xi \in dy\} [\mathbf{P}\{Y \in dx\} - \mathbf{P}\{Z \in dx\}] \right| \\ &\leq \sup_x |g(x)| \frac{1}{\lambda^3} [\mathbf{E}|Y^3| + \mathbf{E}|Z^3|], \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

см., например, [26]. Применяя (3.5.6), приходим к оценке

$$|J_{m2}| \leq \frac{\delta_{m-1}}{\bar{\lambda}_m^3} \bar{\sigma}_m^3 (\mathbf{E}|Y_m^3| + \mathbf{E}|\xi_m^3|) \leq C \frac{\delta_{m-1}}{\bar{\lambda}_m^3} \bar{\sigma}_m^3 \nu_m.$$

Отсюда и из (3.1.3) получаем, что

$$\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m2}| \leq C(\nu_n \bar{\sigma}_n)^* \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\delta_{m-1} \bar{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3}. \quad (3.5.7)$$

Шаг 4. Обратимся к J_{m1} . В силу разложения Тейлора

$$\begin{aligned} J_{m1} &= \mathbf{E}(1-U) \left[\varphi'' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \bar{\sigma}_m^3 Y_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \right. \\ &\quad \left. - \varphi'' \left(\bar{T}_m - \frac{U \bar{\sigma}_m \tilde{Y}_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \bar{\sigma}_m^3 \tilde{Y}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \right] \\ &= \bar{\sigma}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \mathbf{E}(1-U) \iint x^3 \varphi'' \left(\frac{z-y-U \bar{\sigma}_m x}{\bar{\lambda}_m} \right) \\ &\quad \times [\mathbf{P}\{S_{m-1} \in dy | Y_m = x\} - \mathbf{P}\{S_{m-1} \in dy\}] \mathbf{P}\{Y_m \in dx\}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Полагая $\Delta_m(y | x) := \mathbf{P}\{S_{m-1} \leq y | Y_m = x\} - \mathbf{P}\{S_{m-1} \leq y\}$ и интегрируя по частям относительно y , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} |J_{m1}| &= \bar{\sigma}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \mathbf{E} \left| (1 - U) \iint x^3 \varphi''' \left(\frac{z - y - U \bar{\sigma}_m x}{\bar{\lambda}_m} \right) \right. \\ &\quad \times \bar{\lambda}_m^{-1} \Delta_m(y | x) \mathbf{P}\{Y_m \in dx\} dy \Big| \\ &\leq \bar{\sigma}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \int |x^3| \left[\int \left| \varphi''' \left(\frac{z - y - U \bar{\sigma}_m x}{\bar{\lambda}_m} \right) \right| \bar{\lambda}_m^{-1} dy \right] \\ &\quad \times \sup_y |\Delta_m(y | x)| \mathbf{P}\{Y_m \in dx\} = C \bar{\sigma}_m^3 r_m \bar{\lambda}_m^{-3}, \end{aligned}$$

где $r_m = \int |x^3| \sup_y |\Delta_m(y | x)| \mathbf{P}\{Y_m \in dx\}$.

Отсюда и из (3.1.3) следует $\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m1}| \leq C \sum_{m=m_0+1}^n \bar{\sigma}_m^3 r_m \times \bar{\lambda}_m^{-3} \leq C(\bar{\sigma}_n r_n)^* \sum_{m=m_0+1}^n \bar{\sigma}_m^2 \bar{\lambda}_m^{-3}$.

Заметим, что, ввиду (3.1.3) и (3.4.13),

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3} &= \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\bar{\sigma}_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \bar{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2 - \bar{\sigma}_m^2)^{3/2}} \\ &\leq \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\bar{\sigma}_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \bar{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2 - \bar{\sigma}_n^{*2})^{3/2}} \leq \frac{C}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

если $\varepsilon^2 > 2\bar{\sigma}_n^{*2}$. Таким образом,

$$\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m1}| \leq \frac{C}{\varepsilon} (\bar{\sigma}_n r_n)^*. \quad (3.5.10)$$

Все оценки завершены, и нам осталась

3.6. Индукция. Из неравенства сглаживания (3.1.4), представления (3.1.5) и оценок (3.3.2), (3.3.3), (3.4.19), (3.4.22), (3.4.23), (3.5.2), (3.5.4), (3.5.7) и (3.5.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq C \left\{ \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left| 1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 \right| + \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n \mathbf{E}(|\alpha_m| + |\beta_{mn}|) (|X_m^3| + \bar{\sigma}_m^3 |Y_m^3|) \right. \\ &\quad \left. + (\nu_n \bar{\sigma}_n)^* + \frac{1}{\varepsilon} (\bar{\sigma}_n r_n)^* + (\nu_n \bar{\sigma}_n)^* \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\delta_{m-1} \bar{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Положим

$$L_m = \frac{(\nu_m \bar{\sigma}_m)^*}{B_m} + \sqrt{\frac{(r_m \bar{\sigma}_m)^*}{B_m}} + (\Gamma_{1m}^*)^{1/3} + (\Gamma_{2m}^*)^{1/4}. \quad (3.6.2)$$

Предположим, что $\delta_m \leq C_0 L_m$ для всех $m \leq n-1$ и некоторой постоянной C_0 , которая будет уточнена позже. (При $m=1$ утверждение

тривиально.) Заметим, что для $m > m_0$, ввиду (3.1.2), $B_m^2 \geq B_n^2/3 = \frac{1}{3}$. Следовательно, в силу (3.1.3) и индукционного предположения, для $m = m_0 + 1, \dots, n - 1$ верно $\delta_m \leq 9C_0L_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta_n \leq C \left\{ \varepsilon + \frac{\Gamma_{1n}^*}{\varepsilon^2} + \frac{\Gamma_{2n}^*}{\varepsilon^3} + (\nu_n \bar{\sigma}_n)^* + \frac{1}{\varepsilon} (r_n \bar{\sigma}_n)^* + (\nu_n \bar{\sigma}_n)^* 9C_0L_n \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3} \right\}. \quad (3.6.3)$$

Из (3.6.3), (3.6.2) и (3.5.9) следует существование абсолютной постоянной $\bar{C} \geq 1$ такой, что

$$\delta_n \leq \bar{C} \left[\varepsilon + \frac{L_n^3}{\varepsilon^2} + \frac{L_n^4}{\varepsilon^3} + \frac{L_n^2}{\varepsilon} + \frac{9C_0L_n^2}{\varepsilon} \right]. \quad (3.6.4)$$

Положим теперь $\varepsilon = 30\bar{C}L_n$. Заметим, что, поскольку $\nu_n^* \geq 1$, так выбранное $\varepsilon \geq 30\bar{\sigma}_n^*$, т.е. ε удовлетворяет введенному ранее требованию. Тогда, окончательно,

$$\delta_n \leq L_n \left(30\bar{C}^2 + 3 + \frac{9}{30}C_0 \right) \leq L_n \left(C_1 + \frac{1}{3}C_0 \right), \quad (3.6.5)$$

где C_1 — некоторая абсолютная постоянная. Индукция завершается выбором $C_0 = \frac{3}{2}C_1$.

4. Дополнительные замечания

1. Как отмечалось в п. 1.2, оценки δ_n могут быть также получены в терминах не с.в. Y_m , а самих с.в. X_m . Точнее, верна следующая

Теорема 2. Оценка теоремы 1 остается верной, если заменить в (1.5) $(\nu_n \bar{\sigma}_n)^*$ на $(\mu_n \bar{\sigma}_n)^*$ и $(r_n \bar{\sigma}_n)^*$ на $(\hat{r}_n \bar{\sigma}_n)^*$, где $\hat{r}_n = E\{|X_m^3| \Delta_{m-1}(X_m)\} / \bar{\sigma}_n^3$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 со следующими изменениями. Во-первых, на шаге 2 п. 3.4 мы должны оставить σ_m , как они есть, и перейти от $E \sum_{m=1}^n I_m [\Phi(\bar{T}_m - X_m / \bar{\lambda}_m) - \Phi(\bar{T}_m - \sigma_m \xi_m / \bar{\lambda}_m)]$ к $E \sum_{m=1}^n I_m [\Phi(\bar{T}_m - \tilde{X}_m / \bar{\lambda}_m) - \Phi(\bar{T}_m - \tilde{\sigma}_m \xi_m / \bar{\lambda}_m)]$, где $\tilde{X}_m$ и $\tilde{\sigma}_m$ имеют те же распределения, что и X_m и σ_m соответственно, и не зависят от остальных с.в. Оценивание разности между указанными выражениями проводится совершенно аналогично выкладкам шага 2, за исключением члена $E I_m [\varphi'(\bar{T}_m - U X_m / \bar{\lambda}_m) - \varphi'(\bar{T}_m - U \tilde{X}_m / \bar{\lambda}_m)] \tilde{X}_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2}$, который должен оцениваться так же, как член J_{m1} на шаге 4 п. 3.5.

2. Полученные оценки относительно точны или когда σ_m не слишком близки к $\bar{\sigma}_m$, или, напротив, когда достаточно близки. Как уже отмечалось в п. 1.2, в промежуточных случаях, например, когда $|\sigma_m - \bar{\sigma}_m|$ мало только при больших m , последние члены в (1.5) могут иметь худший порядок, чем можно получить, рассматривая те или иные конкретные ситуации отдельно.

Указанное обстоятельство тесно связано с типом аппроксимации, принятом на первом шаге доказательства. Мы использовали приближение суммой $\sum_{m=1}^n \theta_m \xi_m$, т.е. суммой нормальных с.в. со «случайными» дисперсиями. Ясно, что без каких-либо дополнительных предположений о σ_j^2 приближение суммой $\sum_{m=1}^n \bar{\sigma}_m \xi_m$ не приведет к оценке даже порядка $O(n^{-1/8})$, так что, ставя цель охватить «крайние» случаи, мы должны были использовать первую из указанных аппроксимаций.

С другой стороны, вторая из указанных аппроксимаций, кажущаяся более грубой, в некоторых случаях может привести к более точным оценкам. К такому выводу можно прийти, анализируя, например, некоторые доказательства в [2], где указанная аппроксимация, будучи применена к ряду частных, но важных случаев, привела к достаточно точным результатам. Было бы интересно исследовать возможности этой аппроксимации систематически. Мы надеемся сделать в будущем.

3. Читатель, прошедший через доказательство, заметил, что при дополнительных требованиях на условные дисперсии оценка скорости сходимости может быть улучшена. Мы видели, что $|\bar{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2| \leq |\sum_{j=m+1}^n (\bar{\sigma}_j^2 - \sigma_j^2)| + |1 - B_m^{-2} \sum_{j=1}^m \sigma_j^2|$. Если второе слагаемое меньше по порядку, чем первое, т.е. если $\|1 - B_m^{-2} \sum_{j=1}^m \sigma_j^2\|_\infty$ достаточно мало при больших m , то $\bar{\lambda}_m^2 \asymp \lambda_m^2$ на A_m . Это дает возможность заменить λ_m на $\bar{\lambda}_m$ в вычислениях п. 3.4. В этом случае мы можем вместо грубой оценки $\lambda_m \geq \varepsilon$ прийти к выражению типа $\sum_{m=m_0+1}^n \bar{\sigma}_m^2 / \bar{\lambda}_m^3 \leq C/\varepsilon$. Это, в свою очередь, позволит заменить член $\Gamma_{2n}^* / \varepsilon^3$ на $\Gamma_{2n}^* / \varepsilon$. Что касается интегрирования по A_m^c , т.е. члена (3.3.3), он может быть оценен проще, так как он мал, если $|\sigma_j^2 - \bar{\sigma}_j^2|$ не велико. Например, если $\min\{|\alpha_m|, |\beta_m|\} \geq \frac{1}{2}$, правая часть (3.3.3) равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhattacharya R. N., Ranga Rao R.* Normal Approximation and Asymptotic Expansion. Melbourne: Krieger, 1986.
2. *Bolthausen E.* Exact convergence rates in some martingale central limit theorems. — Ann. Probab., 1982, v. 10, p. 672–688.
3. *Bolthausen E.* The Berry–Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1982, B. 60, H. 3, S. 283–289.
4. *Bradley R.* Basic properties of strong mixing conditions. — Dependence in Probability and Statistics. Ed. by E. Eberlein, M. Taqqu. Boston: Birkhäuser. Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 165–192.
5. *Dvoretzky A.* Asymptotic normality for sums of dependent random variables. — Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 3. Berkeley: Univ. of California Press, 1972, p. 513–535.
6. *Erickson R. V., Quine M. P., Weber N. C.* Explicit bounds for the departure from normality of sums of dependent random variables. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1979, v. 34, p. 27–32.

7. Евстигнеев И. В. Регулярные условные математические ожидания случайных величин, зависящих от параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 3, с. 586–589.
8. Грамз И. Г. Нормальная аппроксимация для семимартингалов. — Успехи матем. наук, 1987, т. 42, № 6, с. 189–190.
9. Haeusler E. On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales. — Ann. Probab., 1988, v. 16, p. 275–299.
10. Haeusler E., Joos K. A nonuniform bound on the rate of convergence in the central limit theorem for martingales. — Ann. Probab., 1989, v. 16, p. 1690–1720.
11. Hall P., Heyde C. C. Martingale Limit Theory and its Applications. New York: Academic Press, 1980, 308 p.
12. Hall P., Heyde C. C. Rates of convergence in martingale limit theorem. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 2, p. 395–404.
13. Heyde C. C., Brown B. M. On the departure from normality of a certain class of martingales. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, p. 2161–2165.
14. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 2. М.: Физматлит, 1994, 368 с.
15. Kato Y. Rates of convergence in the central limit theorem for martingale differences. — Bull. Math. Statist., 1979, p. 1–8.
16. Кирьянова Л. В., Ротарь В. И. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 301–312.
17. Кубилюс К. Скорость сходимости в функциональной центральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1989, т. XXV, в. 1, с. 59–69.
18. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 1, с. 3–14.
19. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
20. Mori T. On the rate of convergence in the martingale limit theory. — Studia Sci. Math. Hungar., 1977, v. 12, № 3, p. 413–417.
21. Нагаев С. В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 1, с. 67–86.
22. Peligrad M. Recent advances in the central limit theorem and its weak invariance principle for mixing sequences of random variables (a survey). — Dependence in Probability and Statistics. Ed. by E. Eberlein, M. Taqqu. Boston: Birkhäuser. Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 193–223.
23. Rinott Y. On normal approximation rates for certain sums of dependent random variables. — J. Comput. Appl. Math., 1994, v. 55, p. 135–143.
24. Rinott Y., Rotar V. A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2} \log n$ rate, and applications to multivariate graph related statistics. — J. Multivariate Anal., 1996, v. 56, p. 333–350.
25. Ротарь В. И. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1992, 368 с.
26. Sazonov V. V. Normal approximation — some recent advances. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 879, p. 1–105.
27. Stein C. Approximate Computation of Expectations. Hayward, CA: IMS, 1986, 164 p.

Поступила в редакцию
12.VIII.1997